26

Fouriertransformation

Die Fouriertransformation überträgt die Idee der diskreten Fouriertransformation von periodischen Funktionen auf nichtperiodische Funktionen.

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Wert

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \, \mathrm{d}x$$

erklärt und definiert eine stetige Funktion $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Diese repräsentiert das *kontinuierliche Spektrum* von f. In Analogie zum diskreten Fall sollte man hieraus wieder die ursprüngliche Funktion f rekonstruieren können, und zwar durch

$$f(x) \sim \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}t.$$

Im Unterschied zum periodischen Fall ist jedoch ϕ für L^2-Funktionen im Allgemeinen *nicht* definiert. Wir können also nicht von einem allgemeinen Theorem für Hilberträume ausgehen und dieses auf L^1-Funktionen ausdehnen. Vielmehr gehen wir genau umgekehrt vor. Die Fouriertransformation ist natürlicherweise für L^1-Funktionen definiert und wird von dort auf andere Funktionsklassewn ausgedehnt.

Von Anfang an betrachten wir Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$. Dies ist nicht komplizierter als der eindimensionale Fall, aber wichtig für die Anwendung der Theorie auf partielle Differenzialgleichungen.

26.1 Definition und Umkehrsatz in L^1

Das Lebesgueintegral über $\mathbb{R}^n$ gewichten wir mit einem geeigneten Faktor und setzen

$$\fint_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\lambda \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Der Faktor ist so gewählt, dass 21.18 $\fint_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \,\mathrm{d}t = 1$ und mit Fubini 21.2

$$\fint_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|x|^2/2} \,\mathrm{d}x = \prod_{1\leqslant \nu\leqslant n} \fint_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x_\nu^2/2} \,\mathrm{d}x_\nu = 1.$$

Dementsprechend definieren wir $\|\cdot\|_p$ in diesem Kontext durch

$$\|f\|_p^p \coloneqq \fint_{\mathbb{R}^n} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda.$$

Schließlich sei $\langle t,x\rangle = t_1x_1 + .. + t_nx_n$.

1 **Definition** *Die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$\hat f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \hat f(t) \coloneqq \fint_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,x\rangle} \,\mathrm{d}x. \qquad \bowtie$$

Die Fouriertransformierte ist offensichtlich unabhängig vom Repräsentanten einer L^1-Funktion und in *jedem* Punkt wohldefiniert. Sie ist auch für reellwertige Funktionen im Allgemeinen komplexwertig A-2.

2 ▸ A. Für $\chi = \chi_{[-1,1]}$ und $t \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}\hat\chi(t) &= \fint_{\mathbb{R}} \chi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}}{t}\right|_{-1}^{1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin t}{t}\end{aligned}$$

sowie

$$\hat\chi(0) = \fint_{\mathbb{R}} \chi(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \lim_{t\to 0} \hat\chi(t).$$

Die Funktion $\hat\chi$ ist stetig, aber nicht in $L^1(\mathbb{R})$, sondern in $L^2(\mathbb{R})$.

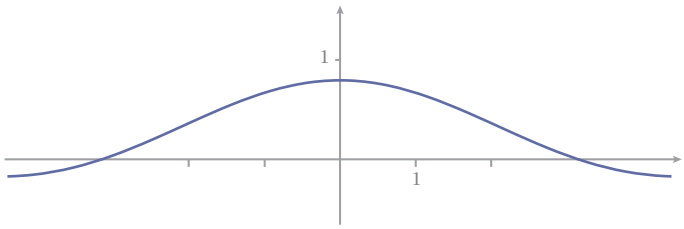
B. Sei φ gegeben durch $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\hat\varphi(t) &= \fint_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+\mathrm{i}t} + \frac{1}{1-\mathrm{i}t}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Hier ist die Funktion $\hat\varphi$ stetig und integrierbar.

C. Das nächste Beispiel formulieren wir als Lemma. ◂

Abb 1 Die Fouriertransformierte von $\chi_{[-1,1]}$



3 **Lemma** *Für die Gaussfunktion*

$$\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2/2}$$

gilt $\hat{\psi} = \psi$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei zuerst $n = 1$. Offensichtlich ist $\psi' = -x\psi$ und $\psi(0) = 1$. Differenziation unter dem Integral 20.36 und partielle Integration ergeben ebenfalls

$$\begin{aligned}\hat{\psi}'(t) &= \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx})'\,\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - t\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = -t\hat{\psi}(t).\end{aligned}$$

Ebenso gilt aufgrund der Normalisierung des Integrals

$$\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

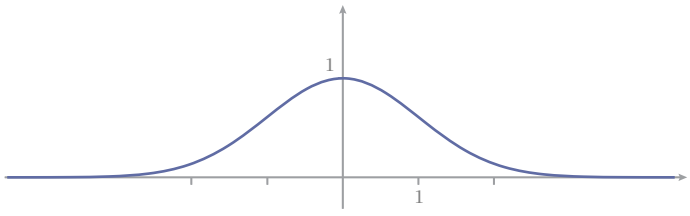
Also lösen ψ und $\hat{\psi}$ dasselbe Anfangswertproblem und sind daher gleich.

Für $n > 1$ schreibe ψ_n für ψ. Dann ist $\psi_n(x) = \psi_1(x_1)\cdot\cdot\psi_1(x_n)$ und mit Fubini

$$\hat{\psi}_n(t) = \hat{\psi}_1(t_1)\cdot\cdot\hat{\psi}_1(t_n) = \psi_1(t_1)\cdot\cdot\psi_1(t_n) = \psi_n(t).$$

Also ist $\hat{\psi} = \psi$ für alle $n \geqslant 1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 2 Die Gaussfunktion $\mathrm{e}^{-x^2/2}$



4 **Satz** *Die Fouriertransformation definiert eine stetige lineare Abbildung*

$$\mathcal{F}\colon\ L^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n),\quad f \mapsto \hat{f},$$

und es gilt $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ *für alle* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Linearität der Abbildung ist offensichtlich. Die Stetigkeit von $\hat{f}$ folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz 20.29 mit $|f|$ als integrierbarer Majorante für alle t:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to a}\hat{f}(t) &= \lim_{t\to a}\int f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \lim_{t\to a}\left(f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,x\rangle}\right)\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle a,x\rangle}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(a).\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt für alle t auch

$$|\hat{f}(t)| \leqslant \int |f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1.$$

Somit ist $\mathcal{F}$ stetig. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkungen *a.* Konvergiert eine Folge (f_k) in L^1 gegen f, so konvergiert die Folge ihrer Transformierten $(\hat{f}_k)$ also *gleichmäßig* gegen $\hat{f}$, da

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}\|_\infty = \|(f_k - f)\hat{}\,\|_\infty \leqslant \|f_k - f\|_1 \to 0.$$

b. Für die Operatornorm von $\mathcal{F}$ gilt sogar $\|\mathcal{F}\|_o = 1$, da die Gaussfunktion ψ auf sich selbst abgebildet wird.

c. Wir haben ihm letzten Beweis den Satz von der dominierten Konvergenz auf einen kontinuierlichen Grenzwert $t \to a$ angewandt, während er eigentlich für abzählbare Folgen formuliert wurde. Genau genommen müssten wir beliebige Folgen $t_n \to a$ betrachten und argumentieren, dass das Ergebnis nicht von der Wahl der Folge abhängt 7.21. Das Ergebnis bleibt natürlich dasselbe. ⊸

Es gilt auch das Analogon des Riemann-Lebesgue-Lemmas 25.27 über das Verhalten der Fouriertransformierten im Unendlichen. Sei

$$C_o(\mathbb{R}^n) \coloneqq \{f \in C(\mathbb{R}^n) :\ \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$$

der Raum der *im Unendlichen verschwindenden* stetigen Funktionen. Dies ist ein *abgeschlossener* Unterraum von $C(\mathbb{R}^n)$ und damit ebenfalls ein Banachraum A-8.

5 **Satz** *Die Fouriertransformation ist eine stetige lineare Abbildung*

$$\mathcal{F}\colon\ L^1(\mathbb{R}^n) \to C_o(\mathbb{R}^n).$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Es genügt, den Fall $n = 1$ zu betrachten. Mit $h = \pi/t$ gilt dann

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= \int f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int f(x+h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+h)}\,\mathrm{d}x = -\int f(x+h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Mit der halben Summe des ersten und dritten Integrals erhalten wir

$$\begin{aligned}|\hat{f}(t)| &= \frac{1}{2}\left|\int \{f(x+h) - f(x)\}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int |f(x+h) - f(x)|\,\mathrm{d}x = \|\Delta_h f\|_1.\end{aligned}$$

Für $|t| \to \infty$ und damit $|h| \to 0$ konvergiert die rechte Seite gegen Null [24.8]. Somit verschwindet $\hat{f}$ im Unendlichen. ⟩⟩⟩⟩⟩

Der Umkehrsatz in L^1

Aus der Fouriertransformierten $\hat{f}$ können wir die Funktion f rekonstruieren. Die Formel ist das kontinuierliche Analogon zur entsprechenden Formel für Fourierreihen. Allerdings müssen wir heirfür annehmen, dass die Funktionen $\hat{f}$ ebenfalls integrierbar ist. Wie wir bereits gesehen haben, ist dies nicht immer der Fall [2].

6 Umkehrsatz in L^1 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ist auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$f =_\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}t.$$

Gleichheit besteht insbesondere in jedem Stetigkeitspunkt von f. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Da wir $\hat{f} \in L^1$ annehmen, ist die Funktion φ mit

$$\varphi(x) = \int \hat{f}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}t$$

in jedem Punkt wohldefiniert. Mit die Gaussfunktion ψ und dem Satz von der dominierten Konvergenz [20.29] gilt dann

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \int \hat{f}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,t\rangle}\psi(t/k)\,\mathrm{d}t \coloneqq \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x).$$

Mit Fubini gilt

$$\begin{aligned}\varphi_k(x) &= \int \left\{\int f(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,s\rangle}\,\mathrm{d}s\right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,t\rangle}\psi(t/k)\,\mathrm{d}t \\ &= \int \left\{\int \psi(t/k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,s-x\rangle}\,\mathrm{d}t\right\} f(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int \left\{\int k^n\psi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,k(s-x)\rangle}\,\mathrm{d}t\right\} f(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Das innere Integral ist aber gerade

$$k^n \hat{\psi}(k(s-x)) = k^n \psi(k(s-x)) =: \psi_k(x-s).$$

Es gilt also

$$\varphi_k(x) = \int f(s)\psi_k(x-s)\,\mathrm{d}s = (f * \psi_k)(x).$$

Da $(\psi_k)_{k\geqslant 1}$ offensichtlich eine Diracfolge 24.21 bildet, folgt 24.24

$$\|\varphi_k - f\|_1 \to 0.$$

Zusammen mit $\varphi_k \to \varphi$ punktweise überall folgt daraus $f =_\lambda \varphi$.

Ist schließlich K eine kompakte Menge von Stetigkeitspunkten von f, so gilt auch $\varphi_k \to f$ auf K 24.24. Das ergibt die zweite Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkungen *a.* Statt der Gaussfunktion ψ kann man auch jede andere L^1-Funktion φ wählen mit den Eigenschaften

$$\varphi \geqslant 0, \qquad \hat{\varphi} \geqslant 0, \qquad \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\,\mathrm{d}\lambda = 1.$$

Ein Beispiel ist $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$.

b. Würde man wie im Umkehrsatz für Fourierreihen verfahren und direkt

$$\int \hat{f}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}t = \int \left\{ \int f(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,s\rangle}\,\mathrm{d}s \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}t$$

betrachten, so gelangte man zu einem undefinierten Integral der Gestalt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,u-x\rangle}\,\mathrm{d}t.$$

Man benötigt deshalb einen integrierenden Faktor. ⊸

26.2 Einfache Rechenregeln

Für das Weitere führen wir eine Reihe allgemein üblicher Notationen ein. Sei

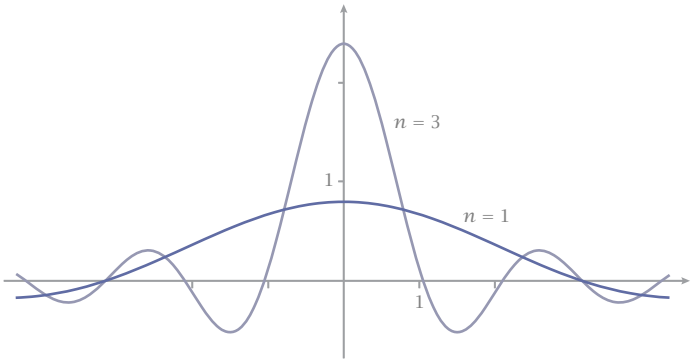
$$e_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad e_t(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle}, \qquad t \in \mathbb{R}^n.$$

Mit dieser Bezeichnung wird

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f e_{-t}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Weiter verwenden wir die übliche Multiindex-Notation

Abb 3 $\chi_{[-n,n]}\hat{}$ für $n = 1, 3$



$$t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdot\cdot\, t_n^{\alpha_n}, \qquad D^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdot\cdot\, \partial_n^{\alpha_n}.$$

Außerdem definieren wir

$$D_\alpha := (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha = \left(\frac{\partial_1}{\mathrm{i}}\right)^{\alpha_1} \cdot\cdot \left(\frac{\partial_n}{\mathrm{i}}\right)^{\alpha_n}.$$

Mit dieser Notation wird, wie man sofort nachrechnet,

$$D_\alpha e_t = t^\alpha e_t.$$

Schließlich definieren wir die *Translation* $\tau_h f$ durch $(\tau_h f)(x) := f(x-h)$.

7 **Lemma** *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$(e_h f)\hat{} = \tau_h \hat{f}, \qquad (\tau_h f)\hat{} = e_{-h}\hat{f}, \qquad h \in \mathbb{R}^n,$$

sowie

$$(f \circ \lambda^{-1})\hat{} = \lambda^n (\hat{f} \circ \lambda), \qquad \lambda > 0. \qquad \bowtie$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist

$$\begin{aligned}(e_h f)\hat{}(t) &= \int f(x) e_h(x) e_{-t}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int f(x) e_{-(t-h)}(x)\,\mathrm{d}x = \hat{f}(t-h) = (\tau_h \hat{f})(t).\end{aligned}$$

Mit der Substitution $x \mapsto x+h$ und $e_{-t}(h) = e_{-h}(t)$ wird

$$\begin{aligned}(\tau_h f)\hat{}(t) &= \int f(x-h) e_{-t}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int f(x) e_{-t}(x+h)\,\mathrm{d}x \\ &= e_{-t}(h) \int f(x) e_{-t}(x)\,\mathrm{d}x = e_{-h}(t)\hat{f}(t).\end{aligned}$$

Und mit der Substitution $x \mapsto \lambda x$ und $e_{-t}(\lambda\nu) = e_{-\lambda t}(\nu)$ erhält man

$$\begin{aligned}(f \circ \lambda^{-1})\hat{}(t) &= \int f(\lambda^{-1}x) e_{-t}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda^n \int f(x) e_{-t}(\lambda x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda^n \int f(x) e_{-\lambda t}(x)\,\mathrm{d}x = \lambda^n \hat{f}(\lambda t). \qquad \rangle\rangle\rangle\rangle\rangle\end{aligned}$$

8 Lemma *Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g\,\mathrm{d}\lambda. \qquad \bowtie$$

$\langle\langle\langle\langle\langle$ Mit Fubini und der Substitution $x \mapsto x + u$ gilt

$$\begin{aligned}(f * g)\hat{}(t) &= \int (f * g)(x) e_{-t}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left\{ \int f(x-u) g(u)\,\mathrm{d}u \right\} e_{-t}(x-u) e_{-t}(u)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left\{ \int f(x-u) e_{-t}(x-u)\,\mathrm{d}x \right\} g(u) e_{-t}(u)\,\mathrm{d}\nu \\ &= \int \left\{ \int f(x) e_{-t}(x)\,\mathrm{d}x \right\} g(u) e_{-t}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \hat{f}(t)\hat{g}(t),\end{aligned}$$

und ebenfalls mit Fubini

$$\begin{aligned}\int f\hat{g}\,\mathrm{d}x &= \int f(x) \left\{ \int g(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x \\ &= \int g(y) \left\{ \int f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle y,x\rangle}\,\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y = \int g\hat{f}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Übrigens sind $f\hat{g}$ und $\hat{f}g$ integrierbar, da $\hat{f}$ und $\hat{g}$ beschränkt sind $_4$. $\rangle\rangle\rangle\rangle\rangle$

Man beachte, dass die Faltung hier ebenfalls durch das gewichtete Integral definiert ist.

▹ *Beispiele* Für $\psi_\lambda := \lambda^n \psi \circ \lambda$ mit $\lambda > 0$ gilt

$$(\psi_\lambda)\hat{} = \lambda^n (\psi \circ \lambda)\hat{} = \hat{\psi} \circ \lambda^{-1} = \psi \circ \lambda^{-1} = \psi_{1/\lambda}.$$

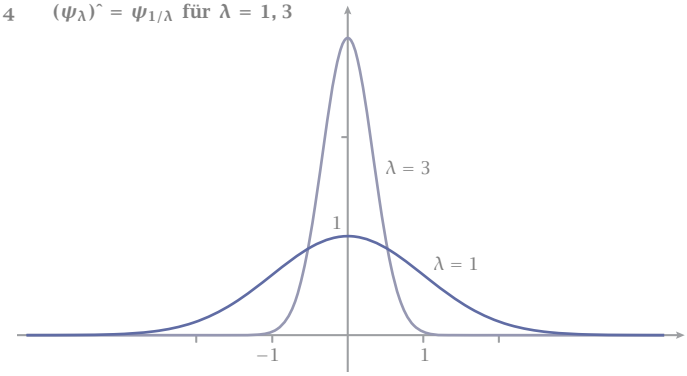
Es ist $\chi_{[-n,n]} = \chi_{[-1,1]} \circ n^{-1}$ und somit $_2$

$$\chi_{[-n,n]}\hat{} = n\,\hat{\chi}_{[-1,1]} \circ n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin nt}{t}.$$

Ebenso ist $\chi_{[n-1,n+1]} = \tau_n \chi_{[-1,1]}$ und somit

$$\chi_{[n-1,n+1]}\hat{} = e_{-n}\hat{\chi}_{[-1,1]} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\sin t}{t}. \qquad \triangleleft$$

Abb 4 $(\psi_\lambda)\hat{} = \psi_{1/\lambda}$ für $\lambda = 1, 3$



26.3 Der Schwartzraum

Innerhalb des Raumes der integrierbaren Funktionen $L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir nun einen Unterraum, in dem das Differenzieren und Multiplizieren mit Polynomen uneingeschränkt möglich ist, also nicht aus ihn herausführt.

Im Folgenden verwenden wir für schnell abfallende Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ die *gewichteten Normen*

$$\|\phi\|_{(N)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^N \, |\phi(x)|$$

Definition *Eine schnell abfallende Funktion oder Schwartzfunktion ist eine Funkton $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\|f\|_{N,N} := \sup_{|\alpha|\leqslant N} \|D^\alpha f\|_{(N)} < \infty$$

für alle $N \geqslant 1$. Der Raum aller Schwartzfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{S}_n$ bezeichnet. ⋊

A. Jede C^∞-Funktion mit kompakten Träger ist eine Schwartzfunktion.
B. Die Gaussfunktion ψ_3 ist eine Schwartzfunktion.
C. Kein Polynom außer dem Nullpolynom gehört zu $\mathcal{S}_n$. ◂

Offensichtlich ist $\mathcal{S}_n$ ein linearer Vektorraum. Seine Elemente lassen sich auf folgende Weisen charakterisieren.

9 **Lemma** *Für $f \in \mathcal{S}_n$ sind äquivalent:*

(i) $\|f\|_{N,N} < \infty$ *für alle $N \geqslant 1$.*
(ii) $PD^\alpha f$ *ist beschränkt für jedes Polynom P und jeden Multiindex α.*
(iii) *Jede Ableitung von f verschwindet schneller als jede Potenz von $|x|^{-1}$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies ist eine gute Übung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Jede Funktion $\|\cdot\|_{N,N}$ definiert eine Norm auf $\mathcal{S}_n$. Doch mit keiner dieser Normen ist $\mathcal{S}_n$ vollständig, da jeweils nur endlich viele Ableitungen kontrolliert werden. Man kann sogar zeigen, dass es *überhaupt keine* Norm gibt, mit der $\mathcal{S}_n$ vollständig wird. Für unsere Zwecke reicht es aber aus, Konvergenz in $\mathcal{S}_n$ wie folgt zu definieren.

Definition *Eine Folge (f_k) in $\mathcal{S}_n$ konvergiert gegen eine Funktion $f \in \mathcal{S}_n$ genau dann, wenn*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{N,N} = 0, \qquad N \geqslant 0.$$

Sie bildet eine Cauchyfolge in $\mathcal{S}_n$ genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge bezüglich jeder Norm $\|\cdot\|_{N,N}$ bildet. ⋊

Bemerkung $\mathcal{S}_n$ wird zu einem *metrischen Raum* mittels der *Metrik*

$$d(f,g) \coloneqq \sum_{N\geqslant 0} 2^{-N} \frac{\|f-g\|_{N,N}}{1+\|f-g\|_{N,N}}.$$

Konvergenz in dieser Metrik ist äquivalent zu dem hier vereinbarten Konvergenzbegriff. Da wir metrische Räume ansonsten nicht benötigen, vertiefen wir dies nicht weiter. ⊸

10 **Lemma** *Sei (f_k) eine Folge in $\mathcal{S}_n$ und $f \in \mathcal{S}_n$. Dann sind äquivalent:*

(i) $f_k \to f$ *in* $\mathcal{S}_n$.
(ii) $\|f_k - f\|_{N,N} \to 0$ *für jedes* $N \geqslant 0$.
(iii) $PD^\alpha f_k \Rightarrow PD^\alpha f$ *für jedes Polynom P und jeden Multiindex α.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i)⇔(ii) ist gerade die Definition der Konvergenz in $\mathcal{S}_n$.

(ii)⇒(iii) Sind P und α gegeben, so wähle N größer als $|\alpha|$ und den Grad des Polynoms P. Die Behauptung folgt dann aus $\|f_k - f\|_{N,N} \to 0$.

(iii)⇒(ii) Für jedes $N \geqslant 0$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt insbesondere auch

$$\|D^\alpha(f_k - f)\|_{(N)} \to 0.$$

Da es nur endlich viele α mit $|\alpha| \leqslant N$ gibt, gilt damit auch $\|f_k - f\|_{N,N} \to 0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

11 **Satz** *$\mathcal{S}_n$ ist ein vollständiger Raum.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei (f_k) eine Cauchyfolge in $\mathcal{S}_n$. Dann ist $(D^\alpha f_k)$ für jeden Multiindex α eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm. Ist also f der gleichmäßige Limes der f_k, so existiert $D^\alpha f$ aufgrund des Satzes von der Vertauschbarkeit von D und lim, und es gilt

$$D^\alpha f_k \Rightarrow D^\alpha f.$$

Da für jedes Polynom P auch $PD^\alpha f_k$ eine Cauchyfolge in der Supremumsnorm bildet, gilt ferner

$$PD^\alpha f_k \Rightarrow PD^\alpha f.$$

Also $_9$ gilt $f \in \mathcal{S}_n$ und $f_k \to f$ in $\mathcal{S}_n$ $_{10}$. Also ist $\mathcal{S}_n$ vollständig. ⟩⟩⟩⟩⟩

12 **Lemma** *Für jedes Polynom P, jede Schwartzfunktion g und jeden Multiindex α sind*

$$f \mapsto Pf, \qquad f \mapsto gf, \qquad f \mapsto D^\alpha f$$

stetige lineare Abbildungen von $\mathcal{S}_n$ in sich. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist klar $_9$, dass alle Abbildungen $\mathcal{S}_n$ linear in $\mathcal{S}_n$ abbilden. Es geht also nur noch um die Stetigkeit. Für D^α folgt dies zum Beispiel aus $_{10}$

$$\|D^\alpha f\|_{N,N} \leqslant \|f\|_{M,M}, \qquad M = N + |\alpha|.$$

Entsprechend für die beiden anderen Abbildungen $_{A\text{-}5}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Wir benötigen noch zwei Sätze über dichte Einbettungen von Unterräumen. Zunächst betrachten wir den Raum

$$\mathcal{D}_n := C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_n$$

aller glatten Funktionen mit kompakten Träger, dem wir im nächsten Kapitel als *Raum der Testfunktionen* wieder begegnen werden.

13 **Satz** *$\mathcal{D}_n$ ist stetig und dicht eingebettet in $\mathcal{S}_n$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wähle eine Abschneidefunktion φ zur Kugel vom Radius 1, setze $\varphi_r := \varphi \circ r^{-1}$ für $r \geqslant 1$ und damit

$$f_r := f\varphi_r.$$

Dann ist $f = f_r$ auf der Kugel vom Radius r und $f_r \in \mathcal{D}_n$ für alle $r \geqslant 1$. Für die Ableitungen gilt aufgrund der Leibnizschen Formel

$$\begin{aligned} |D^\alpha(f - f_r)(x)| &\leqslant \sum_{0 \leqslant \sigma \leqslant \alpha} B_\sigma^\alpha \, |D^\sigma f(x)| \, |D^{\alpha-\sigma}\varphi_r(x)| \\ &\leqslant c_\alpha \max_{|\sigma| \leqslant |\alpha|} |D^\sigma f(x)|, \end{aligned}$$

mit einer nur von φ und α abhängenden Konstanten c_α, da ja $r \geqslant 1$. Außerdem verschwindet die linke Seite für $|x| \leqslant r$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(f-f_r)\|_{(N)} &\leqslant c_\alpha \max_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} \sup_{|x|\geqslant r} (1+|x|^2)^N\,|D^\sigma f(x)| \\ &\leqslant \frac{c_\alpha}{r^2} \max_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{N+1}\,|D^\sigma f(x)| \\ &\leqslant \frac{c_\alpha}{r^2} \max_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} \|D^\sigma f\|_{(N+1)}\,.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\|f-f_r\|_{N,N} &= \max_{|\alpha|\leqslant N} \|D^\alpha(f-f_r\|_{(N)} \\ &\leqslant \frac{c_N}{r^2} \max_{|\alpha|\leqslant N+1} \|D^\alpha f\|_{(N+1)} \leqslant \frac{c_N}{r^2}\,\|f\|_{N+1,N+1}\,.\end{aligned}$$

Dies verschwindet für $r\to\infty$. Da dies für jedes N gilt, gilt auch $f_k\to f$ in $\mathcal{S}_n$. ⟩⟩⟩⟩⟩

14 **Satz** *Der Raum $\mathcal{D}_n$ ist stetig und dicht eingebettet in $C_o(\mathbb{R}^n)$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $f\in C_o(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon>0$. Dann ist

$$\|f\|_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} < \varepsilon/2$$

für ein hinreichend großes r. Wähle wir also eine Abschneidefunktion φ zu B_r, so ist $g=f\varphi$ stetig mit kompaktem Träger und

$$\|f-g\|_{\mathbb{R}^n} = \|f(1-\varphi)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \|f\|_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} < \varepsilon/2.$$

Glätten wir jetzt die Funktion g mit einer beliebigen Diracfolge aus glatten Funktionen $_{24.20}$ mit kompakten Trägern, so erhalten wir eine Folge (g_k) in $\mathcal{D}_n$ mit

$$\|g-g_k\|_{\mathbb{R}^n}\to 0, \qquad k\to\infty.$$

Dann ist auch $\|f-g_k\|_{\mathbb{R}^n}<\varepsilon$ für hinreichend großes k. Somit liegt $\mathcal{D}_n$ dicht in $C_o(\mathbb{R}^n)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

26.4 Die Fouriertransformation im Schwartzraum

Nun wieder zurück zur Fouriertransformation. Da wir im Schwartzraum uneingeschränkt differenzieren und mit Polynomen multiplizieren können, benötigen wir für die entsprechenden Rechenregeln der Fouriertransformation keine weiteren Voraussetzungen.

Sei P ein Polynom in n Variablen mit reellen oder komplexen Koeffizienten, also

$$P(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant N} c_\alpha x^\alpha = \sum_{|\alpha|\leqslant N} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdot\cdot\, x_n^{\alpha_n}.$$

Wir definieren damit den linearen partiellen Ableitungsoperator

$$P(D) \coloneqq \sum_{|\alpha|\leqslant N} c_\alpha D_\alpha$$

mittels der mit i versehenden Ableitungen D_α. Wegen $D_\alpha e_t = t^\alpha e_t$ gilt hierfür

$$P(D)e_t = P(t)e_t, \qquad P(-D)e_{-t} = P(t)e_{-t}.$$

15 **Satz** *Für $f \in \mathcal{S}_n$ und jedes Polynom P gilt*

$$(P(D)f)\hat{} = P\hat{f}, \qquad (Pf)\hat{} = P(-D)\hat{f}. \qquad \bowtie$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Mit f ist auch $P(D)f$ in $\mathcal{S}_{n\ 12}$, und mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}(P(D)f)\hat{}(t) &= \int (P(D)f)e_{-t}\,\mathrm{d}x \\ &= \int fP(-D)e_{-t}\,\mathrm{d}x \\ &= \int fP(t)e_{-t}\,\mathrm{d}x = P(t)\int fe_{-t}\,\mathrm{d}x = (P\hat{f})(t).\end{aligned}$$

Um die zweite Identität zu zeigen, betrachten wir zunächst eine partielle Ableitung $\partial_k\hat{f}$. Mit dem k-ten Einheitsvektor e_k und $e_{-he_k}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx_k}$ ist

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}}{h}\,(\hat{f}(t + he_k - \hat{f}(t)) &= \frac{\mathrm{i}}{h}\int f\,(e_{-t-he_k} - e_{-t})\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{i}}{h}\int fe_{-t}(e_{-he_k} - 1)\,\mathrm{d}x = \int x_k fe_{-t}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx_k} - 1}{-\mathrm{i}hx_k}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Die Funktion $x_k f$ ist integrierbar, und der Quotient ist gleichmäßig beschränkt mit Grenzwert 1 für $h \to 0$. Also können wir mit dem Satz von der dominierten Konvergenz zum Grenzwert $h \to 0$ übergehen und erhalten

$$\mathrm{i}\partial_k\hat{f}(t) = \int x_k fe_{-t}\,\mathrm{d}x = (x_k f)\hat{}(t).$$

Für α mit $|\alpha| = 1$ ist damit gezeigt, dass

$$-D_\alpha\hat{f} = (x^\alpha f)\hat{}.$$

Der allgemeine Fall folgt mit Induktion. ⟩⟩⟩⟩⟩

Diese Identitäten begründen die Bedeutung der Fouriertransformation für die Untersuchung partieller Differenzialgleichungen. Denn unter Transformation

wird aus einem partiellen *Differenzial*operator mit konstanten Koeffizienten ein *Multiplikations*operator – und dieser ist wesentlich einfacher zu untersuchen. Dies werden wir in Abschnitt 6 noch etwas vertiefen.

A. Es ist $-\ddot{u} + u = (-\partial^2 + 1)u$, das Symbol des Operators somit

$$P(t) = (-\partial^2 + 1)\Big|_{\partial = \mathrm{i}t} = t^2 + 1.$$

Für eine Funktion u einer Variablen gilt somit

$$(-\ddot{u} + u)\hat{} = (t^2 + 1)\hat{u}.$$

B. Entsprechend gilt $(u''' - u')\hat{} = -\mathrm{i}(t^3 - t)\hat{u}$.

C. Für eine Funktion u in n Variablen ist

$$(-\Delta u)\hat{} = (t_1^2 + .. + t_n^2)\hat{u} = |t|^2\,\hat{u}.$$

16 **Satz** *Die Fouriertransformation ist eine stetige lineare Abbildung des Schwartzraums $\mathcal{S}_n$ in sich.*

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $f \in \mathcal{S}_n$. Dann ist

$$PD_\alpha \hat{f} = P\hat{g} = (P(D)g)\hat{}, \qquad g = (-x)^\alpha f.$$

Hierbei ist $P(D)g)$ eine Schwartzfunktion, deren Fouriertransformeirte also beschränkt. Also ist $PD_\alpha \hat{f}$ beschränkt fur jedes Polynom P und jeden Multiindex α und damit [9] $\hat{f} \in \mathcal{S}_n$. Die Stetigkeit der Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ folgt mit einer analogen Überlegung [A-6]. ⟩⟩⟩⟩⟩

17 **Umkehrsatz in $\mathcal{S}_n$** *Die Fouriertransformation ist ein linearer Isomorphismus $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ mit Umkehrabbildung*

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \rho,$$

wobei ρ die Reflexion $x \mapsto -x$ bezeichnet. Es gilt also

$$\mathcal{F}^{-1} f = \int_{\mathbb{R}^n} f e_x \,\mathrm{d}\lambda.$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $g, \varphi \in \mathcal{S}_n$ und $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int g(t/\lambda)\hat{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t &= \int g(t)\lambda^n \hat{\varphi}(\lambda t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int g(t)\varphi(t/\lambda)\hat{}\,\mathrm{d}t \quad [7] \\ &= \int \hat{g}(t)\varphi(t/\lambda)\,\mathrm{d}t. \quad [8] \end{aligned}$$

Mit $\lambda \to \infty$ und dominierter Konvergenz folgt hieraus

$$g(0)\int \hat{\varphi}\,\mathrm{d}\lambda = \varphi(0)\int \hat{g}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Wählen wir jetzt für φ die Gaussfunktion ψ, so erhalten wir $_3$

$$g(0) = g(0) \int \hat{\psi}\, d\lambda = \psi(0) \int \hat{g}\, d\lambda = \int \hat{g}\, d\lambda.$$

Dies ist die Umkehrformel für $x = 0$. Der allgemeine Fall folgt hieraus mit

$$g(x) = (\tau_{-x} g)(0) = \int (\tau_{-x} g)\hat{}\, d\lambda = \int \hat{g} e_x\, d\lambda.$$

Somit ist $\mathcal{F}$ auch injektiv, denn aus $\hat{g} = 0$ folgt $g = 0$. Mit $\hat{g} = f$ erhalten wir

$$\mathcal{F}^{-1} f = \int f e_x\, d\lambda,$$

also genau die Behauptung $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \rho$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Gilt $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \rho$, so ergibt Anwenden von $\mathcal{F}$ von links und ρ von rechts $\mathcal{F}^2 = \rho$. Zweimaliges Anwenden der Fouriertransformation liefert also die ursprüngliche Funktion in reflektierter Form. Dafür schreibt man auch

$$f\hat{}\hat{} = f \circ \rho =: f\check{}\,.$$

Weiter folgt

$$\mathcal{F}^4 = \rho^2 = id.$$

Das heißt, die Fouriertransformation ist ein isometrischer Isomorphismus der Periode 4. Für den $L^1(\mathbb{R}^n)$ ergibt sich daraus noch folgender verbesserter Satz $_5$.

18 **Satz** *Die Fouriertransformation ist ein stetiger Endomorphismus*

$$\mathcal{F}\colon\ L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$$

mit dichtem Bild. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Stetigkeit der Abbildung haben wir bereits gezeigt $_5$. Die Injektivität ergibt sich aus dem Umkehrsatz $_6$, denn aus $\hat{f} = 0$ folgt $f =_\lambda 0$. Die Dichtheit des Bildes folgt aus $\mathcal{S}_n \subset L^1$ $_{24.17}$,

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{F}(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{F}(L^1) \subset C_0,$$

und der Dichtheit von $\mathcal{S}_n$ in C_0 $_{14}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Das Bild von L^1 ist allerdings *nicht abgeschlossen* in C_0, die Abbildung somit auch nicht surjektiv $_{A\text{-}12}$. Ein analoges Ergebnis hatten wir bereits für die diskrete Fouriertransformation bewiesen.

26.5 Die Fouriertransformation in L^2

Wir dehnen nun die Fouriertransformation vom Schwartzraum $\mathcal{S}_n$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ aus. Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definieren wir dazu, wie zu erwarten,

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \, \mathrm{d}\lambda.$$

Zuerst stellen wir fest, dass die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}_n$ die L^2-Norm erhält.

19 **Satz** *Für $f, g \in \mathcal{S}_n$ gilt $\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$ und damit die Parsevalsche Gleichung*

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 . \quad \bowtie$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Bezeichnet σ die komplexe Konjugation, so gilt

$$\int \sigma(g) e_x \, \mathrm{d}\lambda = \int \sigma(g e_{-x}) \, \mathrm{d}\lambda = \sigma\left(\int g e_{-x} \, \mathrm{d}\lambda\right) = \sigma(\hat{g}).$$

Mithilfe des Umkehrsatzes $_{17}$ und Fubini $_{21.2}$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int f \sigma(g) \, \mathrm{d}x \\ &= \int \left\{\int \hat{f} e_x \, \mathrm{d}t\right\} \sigma(g) \, \mathrm{d}x \\ &= \int \hat{f} \left\{\int \sigma(g) e_x \, \mathrm{d}x\right\} \mathrm{d}t = \int \hat{f} \sigma(\hat{g}) \, \mathrm{d}t = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle . \end{aligned}$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

20 **Satz von Plancherel** *Es existiert eine lineare Isometrie*

$$\Phi : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$

welche eindeutig durch $\Phi|\mathcal{S}_n = \mathcal{F}$ bestimmt ist. $\bowtie$

⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ eine Isometrie bezüglich der L^2-Norm $_{19}$, und $\mathcal{S}_n$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ $_{24.17}$. Daher lässt sich $\mathcal{F}$ eindeutig zu einer stetigen, isometrischen Abbildung Φ auf L^2 fortsetzen $_{9}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Abbildung Φ setzt also die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ isometrisch von $\mathcal{S}_n$ zu einer Abbildung von $L^2(\mathbb{R}^n)$ in sich fort. Diese Fortsetzung wird ebenfalls als *Fouriertransformation* oder genauer *Fourier-Plancherel-Transformation* bezeichnet. Wir schreiben dafür weiterhin $\mathcal{F}$ und

$$\hat{f} := \mathcal{F} f, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Aus Stetigkeitsgründen bleiben dabei alle Eigenschaften erhalten, die in L^2 sinnvoll erklärt sind.

21 **Satz** *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist ein isometrischer Isomorphismus des Raumes $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Umkehrabbildung $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \rho$.* ⋈

Die Ausdehnung auf L^2 können wir auch konkret wie folgt beschreiben.

22 **Satz** *Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\phi_r(t) \coloneqq \int_{[-r,r]^n} f e_{-t}\,\mathrm{d}x, \qquad \psi_r(x) \coloneqq \int_{[-r,r]^n} \hat{f} e_x\,\mathrm{d}t,$$

so gilt

$$\phi_r \xrightarrow{L^2} \hat{f}, \qquad \psi_r \xrightarrow{L^2} f, \qquad r \to \infty.$$ ⋈

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $f_r \coloneqq f\chi_{[-r,r]^n}$ gilt $f_r \in L^1$ und $\hat{f}_r = \phi_r$. Außerdem gilt

$$\|\hat{f} - \phi_r\|_2 = \|\hat{f} - \hat{f}_r\|_2 = \|f - f_r\|_2.$$

Da die rechte Seite für $r \to \infty$ aufgrund des Satzes von der dominierten Konvergenz verschwindet, folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung ergibt sich durch Anwendung der ersten auf $\hat{f}$ und die Identität $f^{\wedge\wedge} = f^{\vee}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ Die Funktion $f = \chi_{[-1,1]}$ gehört zu $L^1 \cap L^2$ und $\hat{f}$ ist gegeben durch ₂

$$\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin t}{t}.$$

Diese Funktion ist nicht in L^1, aber in L^2, wie es sich von der Theorie her auch gehört. Wir erhalten

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Also ist im ungemittelten Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \pi.$$ ◃

26.6 Fouriermultiplikationsoperatoren

Eine wichtige Anwendung der Fouriertransformation ist die Theorie der partiellen Differenzialgleichungen. Einen winzigen Aspekt hiervon wollen wir hier betrachten. — Ist

$$P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha x^\alpha$$

ein Polynom in n Variablen $x = (x_1, .., x_n)$ vom Grad m, so nennt man

$$L = P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha D_\alpha$$

einen *linearen Differenzialoperator der Ordnung m mit konstanten Koeffizienten*. Dieser operiert auf einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion u mittels

$$Lu = P(D)u \coloneqq \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha D_\alpha u.$$

Das Polynom P selbst nennt man das *Symbol* des Operators L.

Wir betrachten solche Differenzialoperatoren mithilfe der Fouriertransformation. Bekanntlich [8] ist

$$(P(D)u)\hat{} = P\hat{u}.$$

Transformieren wir zurück, so ist also

$$P(D)u = \mathcal{F}^{-1}(P\hat{u}) = (\mathcal{F}^{-1}P\mathcal{F})u.$$

Somit gilt in $\mathcal{S}_n$

$$P(D) = \mathcal{F}^{-1}P\mathcal{F}.$$

Unter Fouriertransformation geht ein *Differenzialoperator* also über in einen *Multiplikationsoperator:* man transformiert, multipliziert mit P und transformiert zurück. Die Fouriertransformation führt gewissermaßen auf $\mathcal{S}_n$ ›Koordinaten‹ so ein, dass jeder Differenzialoperator $P(D)$ zu einem Multiplikationsoperator wird.

Ein Analogon in der linearen Algebra ist die *Hauptachsentransformation*. Jeder normale Operator erhält in geeigneten Koordinaten Diagonalgestalt und wird damit ebenfalls zu einem Multiplikationsoperator.

Die Darstellung $P(D) = \mathcal{F}^{-1}P\mathcal{F}$ ermöglicht eine wesentliche Verallgemeinerung. Die rechte Seite definiert einen beschränkten linearen Operator auf $\mathcal{S}_n$, da jedes Polynom als beschränkter linearer Operator $u \mapsto Pu$ auf $\mathcal{S}_n$ aufgefasst werden kann. Dasselbe gilt aber auch für eine wesentlich größere Klasse von Funktionen, die bei Multiplikation Schwartzfunktionen wieder in Schwartzfunktionen überführen.

Definition *Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt langsam wachsend, wenn es zu jedem $N \geqslant 0$ ein $K \geqslant 0$ gibt, so dass*

$$\|f\|_{N,-K} = \sup_{|\alpha| \leqslant N} \|D^\alpha f\|_{(-K)} < \infty.$$

Der Raum dieser Funktionen wird mit $\mathcal{M}_n$ bezeichnet. ⋈

A. $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{M}_n$.
B. Offensichtlich gilt auch $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{M}_n$.
C. Für jedes *reelle* s ist $x \mapsto (1+|x|^2)^s$ langsam wachsend.
D. Die Exponenzialfunktion wächst *nicht* langsam.

Eine Funktion ist also langsam wachsend, wenn jede Ableitung höchsten polynomial anwächst. Offensichtlich sind Summe und Produkt langsam wachsender Funktionen wieder langsam wachsend, also $\mathcal{M}_n$ eine kommutative Algebra. Sie enthält auch die Eins, da sie alle Polynome enthält.

23 **Satz** *Jede langsam wachsende Funktion $\varphi \in \mathcal{M}_n$ definiert einen beschränkten Multiplikationsoperator*

$$\varphi : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n, \quad f \mapsto \varphi f.$$

Wir bezeichnen hier, wie allgemein üblich, den Operator mit demselben Symbol wie die Funktion, mit der wir multiplizieren. Nur selten benötigt man eine differenzierende Bezeichnung wie M_φ.

Aufgrund der Leibnizschen Produktregel gibt es zu jedem α eine Konstante c_α, so dass

$$|D^\alpha(\varphi f)(x)| \leqslant c_\alpha \max_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} |D^{\alpha-\sigma}\varphi(x)|\,|D^\sigma f(x)|\,.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(\varphi f)\|_{(N)} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^N\,|D^\alpha(\varphi f)(x)| \\ &\leqslant c_\alpha \sup_{s\in\mathbb{R}^n} \max_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} (1+|x|^2)^{-K}\,|D^{\alpha-\sigma}\varphi(x)|\;(1+|x|^2)^{N+K}\,|D^\sigma f(x)| \\ &\leqslant c_\alpha \max_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} \|D^{\alpha-\sigma}\varphi\|_{(-K)}\,\|D^\sigma f\|_{(N+K)}\,.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\|\varphi f\|_{N,N} \leqslant c_N\,\|\varphi\|_{N,-K}\,\|f\|_{N+K,N+K}\,.$$

Wählen wir zu gegebenem $N \geqslant 0$ ein $K \geqslant 0$ mit $\|\varphi\|_{N,-K} < \infty$, so folgt

$$\|\varphi f\|_{N,N} \leqslant c_N\,\|f\|_{N+K,N+K}\,.$$

mit einer anderen Konstanten c_N.

Wir können nun – zumindest auf $\mathcal{S}_n$ – den Begriff des Differenzialoperators erweitern zum Begriff des Fouriermultiplikationsoperators.

Definition *Jede langsam wachsende Funktion $\varphi \in \mathcal{M}_n$ definiert durch*

$$\varphi(D) \coloneqq \mathcal{F}^{-1}\varphi\mathcal{F} : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$$

einen Fouriermultiplikationsoperator, kurz FMO*, mit Symbol φ.* ⋈

Die Notation $\varphi(D)$ ist konsistent mit der bereits eingeführten Notation $P(D)$ für Polynome. Denn es ist $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{M}_n$ und, wie bereits bemerkt,

$$\mathcal{F}^{-1}P\mathcal{F}u = \mathcal{F}^{-1}P\hat{u} = \mathcal{F}^{-1}(P(D)u)\hat{} = P(D)u.$$

Ein linearer Differenzialoperator mit konstanten Koeffizienten ist also nichts anderes als ein Fouriermultiplikationsoperator, dessen Symbol ein Polynom ist.

24 **Lemma** *Für $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_n$ gilt $(\varphi\psi)(D) = \varphi(D)\psi(D) = \psi(D)\varphi(D)$.* ⋈

⟪⟪⟪⟪ Denn

$$(\varphi\psi)(D) = \mathcal{F}^{-1}\varphi\psi\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}\varphi\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\psi\mathcal{F} = \varphi(D)\psi(D).$$

Vertauschen von φ und ψ liefert die zweite Identität. ⟫⟫⟫⟫

Mithilfe der Theorie der FMO kann man nun in besonders einfachen Fällen partielle Differenzialgleichungen lösen.

▹ Besitzt ein Polynom $P \in \mathcal{P}_n$ keine reellen Nullstellen, so ist $P(D)$ ein Automorphismus von $\mathcal{S}_n$ mit

$$P(D)^{-1} = (1/P)(D).$$

Das heißt, die Umkehrabbildung zu $P(D)$ ist der FMO mit Symbol $1/P$. Denn da P keine Nullstellen besitzt, ist auch $1/P \in \mathcal{M}_n$, und aufgrund des vorangehenden Lemmas 24 ist

$$(1/P)(D)\,P(D) = P(D)\,(1/P)(D) = 1(D) = id_{\mathcal{S}_n}.$$

Also ist $P(D)$ ein Automorphismus von $\mathcal{S}_n$ mit Inverser $(1/P)(D)$. Man beachte, dass $1/P(D)$ *kein Differenzialoperator* ist, wenn P nicht konstant ist. ◃

▹ Der *Laplaceoperator* $\Delta = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \partial_k^2$ hat das Symbol

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{i}x_k)^2 = -\,|x|^2\,,$$

das Symbol von $1 - \Delta$ ist somit $1 + |x|^2$. Dieses Polynom besitzt keine reellen Nullstellen, so dass

$$(1 - \Delta)^{-1} = (1 + |x|^2)^{-1}(D).$$

Die partielle Differenzialgleichung

$$(1 - \Delta)u = -\Delta u + u = f$$

hat für jedes $f \in \mathcal{S}_n$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{S}_n$, gegeben durch

$$u = (1/P)(D)f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}/P).$$

Diese Lösung Lösung u hängt in der Topologie des Raumes $\mathcal{S}_n$ stetig von der rechten Seite f ab. ◂