27

Distributionen

Der Kalkül der Distributionen erlaubt es, stetigen und anderen Funktionen eine Ableitung zuzuordnen, auch wenn sie im klassischen Sinne nicht differenzierbar sind. Hierzu wird der Funktionsbegriff geeignet verallgemeinert, weshalb Distributionen auch als verallgemeinerte Funktionen bezeichnet werden.

Die Idee ist folgende. Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können wir als definierenden Kern eines linearen *Funktionals* Λ_f auffassen, dass auf geeignete *Testfunktionen* φ mittels

$$\Lambda_f(\varphi) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} f\varphi \,\mathrm{d}\lambda$$

angewnedet wird. Ein geeigneter Raum von Testfunktionen ist beispielsweise $C_c^\infty(\mathbb{R})$, denn dann existiert dieses Integral auf jeden Fall.

Ist f stetig differenzierbar, so ist nach partieller Integration

$$\Lambda_{f'}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'\varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda,$$

da die Randterme für Testfunktionen verschwinden. Die rechte Seite involviert aber nur f, nicht f', und ist ebenfalls für alle Testfunktionen wohldefiniert. Es liegt daher nahe, die *Distributionsableitung* von f durch

$$(\Lambda_f)'(\varphi) \coloneqq -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

zu *definieren.* Ist f stetig differenzierbar, so ist $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$, und Distributions- und klassische Ableitung stimmen überein.

Dieser Prozess lässt sich wiederholen. Die r-te Distributionsableitung einer beliebigen stetigen Funktion f ist demnach definiert durch

$$(\Lambda_f)^{(r)}(\varphi) \coloneqq (-1)^r \int_{\mathbb{R}} f\varphi^{(r)} \,\mathrm{d}\lambda, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Eine stetige Funktion, als verallgemeinerte Funktion aufgefasst, ist also beliebig oft im Distributionssinne differenzierbar. Nur sind die Ableitungen im Allgemeinen keine klassischen Funktionen mehr.

27.1

Diese Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs erfüllt folgende sinnvolle Forderungen:

(i) Jede stetige Funktion ist eine Distribution.
(ii) Jede Distribution ist beliebig oft differenzierbar, und jede Ableitung ist wieder eine Distribution.
(iii) Ist eine Funktion stetig differenzierbar, so sind Distributions- und klassische Ableitung identisch.
(iv) Die klassischen Ableitungsregeln gelten weiterhin.

Außerdem vertauschen verschiedene Grenzübergänge unter recht allgemeinen Bedingungen.

Ihren Ursprung hat die Theorie der Distributionen in der Modellierung physikalischer Messvorgänge. Angenommen, die Funktion f beschreibt eine physikalische Größe wie Druck oder Temperatur als Funktion des Ortes. Kein Messvorgang ist vollkommen exakt und liefert den Wert $f(x)$ genau am Punkt x. Vielmehr liefert jede Messung einen gemittelten Wert

$$\Lambda_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f\varphi \,\mathrm{d}\lambda,$$

wobei φ das Messverfahren modelliert. Je besser φ am Messpunkt x konzentriert ist, desto genauer die Messung. Wir messen also f, indem wir es mit der Funktion φ *testen*, und dies ist die einzige Möglichkeit, f zu sehen. Dieser Kalkül wurde von den Physikern verwendet, lange bevor die Mathematiker die entsprechende Theorie entwickelt hatten – as usual.

27.1 Testfunktionen und Distributionen

Im Folgenden sei Ω immer eine nichtleere, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Die Notation $K \subset\subset \Omega$ steht im Folgenden für *kompakte*, nichtleere Mengen $K \subset \Omega$.

Definition

$$\mathcal{D}(\Omega) \coloneqq C_c^\infty(\Omega) \coloneqq \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega\}$$

heißt Raum der Testfunktionen auf Ω. ⋊

Es ist klar, dass skalare Vielfache, Summe und Produkte von Testfunktionen auf Ω wieder Testfunktionen auf Ω sind. Somit ist $\mathcal{D}(\Omega)$ eine Algebra. Sie enthält jedoch nicht die Eins, da deren Träger nicht kompakt ist. Jede Testfunktion auf Ω können wir auch als Testfunktion auf $\mathbb{R}^n$ betrachten, indem wir sie außerhalb ihres Trägers durch Null fortsetzen.

1 **Satz** *Für $1 \leqslant p < \infty$ gilt*

$$\mathcal{D}(\Omega) \overset{\triangle}{\hookrightarrow} C_c(\Omega) \overset{\triangle}{\hookrightarrow} L^p_c(\Omega) \overset{\triangle}{\hookrightarrow} L^p(\Omega),$$

wobei $L^p_c(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) : \operatorname{supp} f \subset\subset \Omega \}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Die Inklusionen $\mathcal{D}(\Omega) \subset C_c(\Omega) \subset L^p_c(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ sind offensichtlich.

Sei $f \in L^p(\Omega)$. Ist (K_k) eine steigende Ausschöpfung von Ω durch kompakte Mengen, so hat $f_k \coloneqq f\chi_{K_k}$ kompakten Träger, gehört zu $L^p_c(\Omega)$, und

$$\|f_k - f\|_p \to 0, \qquad k \to \infty,$$

aufgrund des Satzes von der dominierten Konvergenz. Also gilt $L^p_c(\Omega) \overset{\triangle}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$.

Sei nun $f \in L^p_c(\Omega)$. Somit ist $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \Omega$. Ist (φ_k) eine Diracfolge mit glättendem Kern 24.23, so ist

$$\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(\varphi_k) \subset\subset \Omega$$

für alle hinreichend großen k. Für diese k ist dann $f_k \coloneqq f * \varphi_k$ wohldefiniert, gehört zu $C^\infty_c(\Omega)$, und es gilt 24.24

$$\|f_k - f\|_p \to 0, \qquad \|f_k - f\|_\infty \to 0.$$

Also gilt auch $\mathcal{D}(\Omega) \overset{\triangle}{\hookrightarrow} C_c(\Omega) \overset{\triangle}{\hookrightarrow} L^p_c(\Omega)$. ⟩⟩⟩⟩

Unser Ziel ist, stetige Funktionale auf $\mathcal{D}(\Omega)$ zu studieren. Die erforderliche Topologie ist jedoch weder durch eine Norm noch durch eine Metrik definierbar – sie ist *nicht metrisierbar*. Aufgrund der Vektorraumstruktur von $\mathcal{D}(\Omega)$ können wir uns aber damit behelfen, Stetigkeit mithilfe von *Nullfolgen* zu erklären.

Definition *Eine Folge (φ_k) in $\mathcal{D}(\Omega)$ ist eine Nullfolge genau dann, wenn*

(N-1) $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ *für alle k mit einem festen $K \subset\subset \Omega$, und*

(N-2) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0$ *für alle Multiindizes α.* ⋊

Die Träger einer Nullfolge (φ_k) dürfen also den Definitionsbereich Ω *nicht* ausschöpfen, sondern müssen in *einer* kompakten Teilmenge von Ω enthalten sein. — Eine lineare Abbildung

$$\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$$

ist nun *per definitionem* stetig, wenn sie jede Nullfolge in $\mathcal{D}(\Omega)$ in eine Nullfolge in $\mathbb{K}$ abbildet. Solche Abbildungen heißen *Distributionen*.

Definition *Eine Distribution auf Ω ist ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$. Der Raum aller Distributionen auf Ω wird mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet.* ⋊

Bemerkung In klassischer Terminologie werden Distributionen auch als *verallgemeinerte Funktionen* bezeichnet. Der Strich $'$ für die Bezeichnung des Dualraums ist ebenfalls klassisch. Er ist auch kompakter und weniger aufdringlich als der Stern $*$. ⊸

Um ein handliches Stetigkeitskriterium zu formulieren, sei

$$\mathcal{D}_K(\Omega) \coloneqq \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \subset K\}, \qquad K \subset\subset \Omega.$$

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sei ferner

$$\|\varphi\|_N \coloneqq \max_{|\alpha| \leqslant N} \|D^\alpha \varphi\|_\Omega .$$

Die Supremumsnormen $\|D^\alpha \varphi\|_\Omega$ sind endlich, da der Träger jeder Testfunktion kompakt ist.

2 **Stetigkeitskriterium** *Ein lineares Funktional $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ ist stetig genau dann, wenn für jedes $K \subset\subset \Omega$ ein $N \geqslant 0$ und ein $c \geqslant 0$ existieren, so dass*

$$|\Lambda\varphi| \leqslant c\,\|\varphi\|_N, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨ $\Leftarrow$ Sei (φ_k) eine Nullfolge in $\mathcal{D}(\Omega)$. Dann existiert ein $K \subset\subset \Omega$, so dass $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K$ für alle k. Da jedes $D^\alpha\varphi_k$ gleichmäßig gegen Null konvergiert, gilt auch $\|\varphi_k\|_N \to 0$ für jedes $N \geqslant 0$. Da $|\Lambda\varphi_k| \leqslant c\,\|\varphi_k\|_N$ für ein $N \geqslant 0$ nach Voraussetzung, folgt

$$\Lambda\varphi_k \to 0.$$

Somit bildet Λ jede Nullfolge in eine Nullfolge ab und ist damit stetig.

$\Rightarrow$ Wir zeigen die Kontraposition, nehmen also an, die zweite Aussage gilt *nicht*. Dann gibt es ein $K \subset\subset \Omega$ und zu jedem $n \geqslant 0$ ein $\varphi_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ mit

$$|\Lambda\varphi_n| \geqslant n\,\|\varphi_n\|_n .$$

Wir können auch $\|\varphi_n\|_n = 1$ annehmen. Dividieren wir φ_n durch n, so erhalten wir Funktionen $\tilde\varphi_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ mit

$$|\Lambda\tilde\varphi_n| \geqslant 1, \qquad \|\tilde\varphi_n\|_n \leqslant 1/n.$$

Damit aber bildet $(\tilde\varphi_n)$ eine Nullfolge in $\mathcal{D}(\Omega)$, die von Λ *nicht* in eine Nullfolge in $\mathbb{K}$ abgebildet wird. Also ist Λ auch nicht stetig, und die Kontraposition ist bewiesen. ⟩⟩⟩⟩

Definition *Eine Distribution $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt von endlicher Ordnung, falls es ein $N \geqslant 0$ gibt, so dass für alle $K \subset\subset \Omega$ eine Konstanten c_K existiert mit*

$$|\Lambda\varphi| \leqslant c_K \|\varphi\|_N, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Das kleinste dieser N heißt dann die Ordnung von Λ. Andernfalls heißt Λ von unendlicher Ordnung. ⋊

▷ A. Ist $p \in \Omega$ ein fester Punkt, so wird durch

$$\delta_p\varphi \coloneqq \varphi(p)$$

die sogenannte *Diracdistribution* mit Träger in p definiert. Diese hat Ordnung 0.

B. Ist allgemeiner α ein Multiindex, so wird durch

$$\delta_p^\alpha\varphi \coloneqq D^\alpha\varphi(p)$$

eine Distribution der Ordnung $|\alpha|$ definiert. Denn

$$|\delta_p^\alpha\varphi| = |D^\alpha\varphi(p)| \leqslant \|\varphi\|_{|\alpha|},$$

und dieses $|\alpha|$ kann nicht verbessert werden.

C. Jede Funktion $g \in L^1(\Omega)$ definiert durch

$$\Lambda_g\varphi = \int_\Omega g\varphi \,\mathrm{d}\lambda$$

eine Distribution der Ordnung 0. Denn für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$|\Lambda_g\varphi| \leqslant \int_\Omega |g|\,|\varphi| \,\mathrm{d}\lambda \leqslant \|g\|_1 \|\varphi\|_0.$$

D. Ist allgemeiner α ein Multiindex, so wird durch

$$\Lambda_g^\alpha\varphi \coloneqq \int_\Omega gD^\alpha\varphi(p) \,\mathrm{d}\lambda$$

eine Distribution der Ordnung $|\alpha|$ definiert. ◁

3 *Bemerkung* Da jede Diracdistribution stetig ist, ist ihr Kern abgeschlossen in $\mathcal{D}(\Omega)$. Also ist auch

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \bigcap_{p \in \Omega \setminus K} \ker \delta_p$$

abgeschlossen in $\mathcal{D}(\Omega)$. Andererseits besitzt $\mathcal{D}_K(\Omega)$ keine inneren Punkte A-3. Somit ist $\mathcal{D}_K(\Omega)$ von erster Bairescher Kategorie. Mit einer Ausschöpfung von Ω durch kompakte Mengen $K_0 \subset K_1 \subset ..$ gilt aber

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{m \geqslant 0} \mathcal{D}_{K_m}(\Omega).$$

Somit ist auch $\mathcal{D}(\Omega)$ von erster Bairescher Kategorie. Hieraus folgt letzten Endes auch, dass $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht metrisierbar ist. ⊸

▪ Reguläre Distributionen

Das letzte Beispiel kann wesentlich verallgemeinert werden. Da der Träger jeder Testfunktion kompakt ist, muss das Integral von g nur über kompakte Teilmengen von Ω existieren. Gegen den Rand von Ω dagegen dürfen solche Funktionen beliebig schnell anwachsen. Es genügt also, dass diese Funktionen *lokal integrierbar* sind.

Definition *Eine messbare Funktion f auf Ω heißt lokal integrierbar, wenn*

$$\int_K |f| \, \mathrm{d}\lambda < \infty$$

für jedes $K \subset\subset \Omega$. Der Raum dieser Funktionen wird mit $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ bezeichnet. $\rtimes$

▹ A. Natürlich ist $L^1(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
B. Unabhängig von $\mu(\Omega)$ gilt allgemeiner $L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
C. $C(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
D. $|x|^{-n+1}$ ist auf $\mathbb{R}^n$ lokal integrierbar, *nicht* aber $|x|^{-n}$. ◂

Jede Funktion $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ definiert nun wie zuvor durch

$$\Lambda_g \varphi := \int_\Omega g\varphi \, \mathrm{d}\lambda$$

eine Distribution auf Ω der Ordnung 0. Denn für $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ gilt

$$|\Lambda_g \varphi| \leqslant \int_\Omega |g| \, |\varphi| \, \mathrm{d}\lambda = \|\varphi\|_0 \int_K |g| \, \mathrm{d}\lambda,$$

und das letzte Integral ist endlich für jedes $K \subset\subset \Omega$.

4 **Satz** *Die Abbildung*

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega), \quad g \mapsto \Lambda_g$$

ist linear und injektiv. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨ Die Linearität ist klar. Um die Injektivität zu zeigen, verschwinde g nicht fast überall auf Ω. Dann ist 20.27 $\int_\Omega |g| \, \mathrm{d}\lambda > 0$. Also gibt es auch ein $K \subset\subset \Omega$ so, dass

$$\int_K |g| \, \mathrm{d}\lambda > 0.$$

Approximieren wir die L^1-Funktion $\operatorname{sgn} g\chi_K$ durch Testfunktionen $\varphi_{k\ 1}$, so gilt aufgrund des Satzes von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} \Lambda_g \varphi_k = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g\varphi_k \, \mathrm{d}\lambda = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} g\varphi_k \, \mathrm{d}\lambda = \int_K |g| \, \mathrm{d}\lambda > 0.$$

Also ist $\Lambda_g \varphi_k \neq 0$ für fast alle k, und Λ_g ist nicht das Nullfunktional. ⟩⟩⟩⟩

Wir können also $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit einem Unterraum von $\mathcal{D}'(\Omega)$ identifizieren. Oder umgekehrt, es gibt einen Unterraum von Distributionen von der Form

$$\Lambda = \Lambda_g, \qquad g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

die wir mit Funktionen identifizieren können. Solche Distributionen heißen *regulär*, alle übrigen *singulär*. Eine Distribution ist also singulär genau dann, wenn sie nicht durch eine lokal integrierbare Funktion dargestellt werden kann.

Jede Diracdistribution δ_p mit $p \in \Omega$ ist singulär. Denn angenommen, es gibt ein $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\delta_p = \Lambda_g$. Für die offene Menge $\dot{\Omega} = \Omega \setminus \{p\}$ gilt dann

$$\int_{\dot{\Omega}} g\varphi \,\mathrm{d}\lambda = 0, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\dot{\Omega}).$$

Also gilt [4] $g \,|\, \dot{\Omega} =_\lambda 0$. Dann gilt aber auch $g =_\lambda 0$ und somit $\Lambda_g = 0$. Also kann g nicht δ_p darstellen.

27.2 Rechenregeln

Als Nächstes wollen wir Ableitungen einer Distribution erklären. — Wird eine reguläre Distribution Λ_g durch eine glatte Funktion g dargestellt, so sollten ihre distributiven Ableitungen durch die Ableitungen von g gegeben sein, also

$$D^\alpha \Lambda_g = \Lambda_{D^\alpha g}$$

gelten. Um diese Distribution wieder durch g darzustellen, rekapitulieren wir die klassische Situation.

5 **Lemma** *Sei $g \in C^\infty(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\int_\Omega D^\alpha g \varphi \,\mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}\lambda$$

für alle Multiindizes α.

Betrachte $D^\alpha = \partial_i$, der Rest folgt mit Induktion. — Wegen ihres kompakten Trägers können wir die Funktion φ durch 0 auf Ω^c fortsetzen, ohne ihre Regularität zu beeinträchtigen. Also gilt $\partial_i(g\varphi) = \partial_i g\,\varphi + g\partial_i\varphi$ auf ganz $\mathbb{R}^n$. Integration über $\mathbb{R}$ in der i-ten Koordinate ergibt

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i(g\varphi)\,\mathrm{d}x_i = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i g\,\varphi\,\mathrm{d}x_i + \int_{-\infty}^{\infty} g\partial_i\varphi\,\mathrm{d}x_i.$$

Integration über alle übrigen Koordinaten ergibt mit Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i g\,\varphi\,\mathrm{d}\lambda + \int_{\mathbb{R}^n} g\partial_i\varphi\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

Da beide Integranden außerhalb von Ω identisch verschwinden, können wir ebensogut nur über Ω integrieren und erhalten die Behauptung für ∂_i,

$$\int_\Omega \partial_i g\,\varphi\,\mathrm{d}\lambda = -\int_\Omega g\partial_i\varphi\,\mathrm{d}\lambda.$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Für eine glatte Funktion g gilt also

$$(\Lambda_{D^\alpha g})(\varphi) = \Lambda_g((-D)^\alpha\varphi).$$

Dies nehmen wir zum Anlass für folgende Definition.

6 **Definition** *Sei $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und α ein Multiindex. Dann wird durch*

$$(D^\alpha\Lambda)(\varphi) \coloneqq \Lambda((-D)^\alpha\varphi)$$

eine Distribution $D^\alpha\Lambda$ auf Ω definiert, genannt die Distributionsableitung von Λ der Ordnung α. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir müssen die Stetigkeit von $D^\alpha\Lambda$ zeigen. Zu jedem $K \subset\subset \Omega$ existieren ein N und c, so dass [2]

$$|\Lambda(\varphi)| \leqslant c\,\|\varphi\|_N, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Dann gilt auch

$$|(D^\alpha\Lambda)(\varphi)| \leqslant c\,\|D^\alpha\varphi\|_N \leqslant c\,\|\varphi\|_{N+|\alpha|}, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Also ist $D^\alpha\Lambda$ stetig [2] und damit eine Distribution. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für glatte Funktionen g gilt damit [5]

$$D^\alpha\Lambda_g = \Lambda_g \circ (-D)^\alpha = \Lambda_{D^\alpha g}.$$

Distributions- und klassische Ableitung stimmen also wie gewünscht überein.

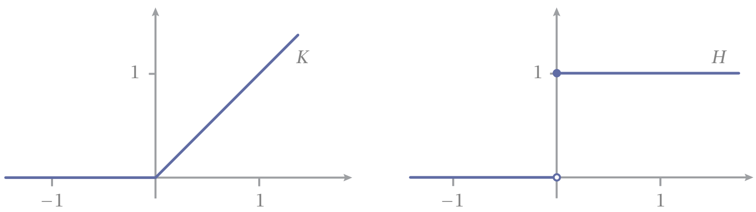
7 **Lemma** *Für Polynome P und Multiindizes σ, τ gilt*

$$P(D)\Lambda = \Lambda \circ P(-D), \qquad D^\sigma D^\tau\Lambda = D^{\sigma+\tau}\Lambda = D^\tau D^\sigma\Lambda.$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $P = x^\alpha$ entspricht dies der Definition der Distributionsableitung. Der allgemeine Fall folgt hieraus mit der Linearität von Λ. Und für jede Testfunktion gilt

$$\begin{aligned}(D^\sigma D^\tau\Lambda)(\varphi) &= (D^\tau\Lambda)((-D)^\sigma\varphi)\\ &= \Lambda((-D)^\tau(-D^\sigma)\varphi)\\ &= \Lambda((-D)^{\sigma+\tau}\varphi) = (D^{\sigma+\tau}\Lambda)(\varphi).\end{aligned}$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 1 Knickfunktion K und Heavisidefunktion H



A. Betrachte die *Heaviside-* und die *Knickfunktion*,

$$H \coloneqq \chi_{[0,\infty)}, \qquad K \coloneqq \mathrm{id}\, H,$$

auf $\mathbb{R}$. Beide sind lokal integrierbar und fast überall differenzierbar, aber nicht C^1. Für Testfunktionen φ gilt

$$\begin{aligned}(D\Lambda_K)(\varphi) &= -\int_{\mathbb{R}} K\varphi' \,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\infty t\varphi' \,\mathrm{d}t \\ &= -t\varphi\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \varphi \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} H\varphi \,\mathrm{d}t = \Lambda_H(\varphi).\end{aligned}$$

Also ist $D\Lambda_K = \Lambda_H$. Andererseits gilt auch $DK = H$ überall außer im Nullpunkt. Also gilt in diesem Fall sogar

$$D\Lambda_K = \Lambda_H = \Lambda_{DK}.$$

B. Für die Heavisidefunktion H gilt wiederum

$$(D\Lambda_H)(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} H\varphi' \,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \varphi' \,\mathrm{d}t = -\varphi\Big|_0^\infty = \varphi(0) = \delta_0\varphi.$$

Also ist $D\Lambda_H = \delta_0$ die Diracdistribution mit Träger in 0, die wir auch kurz mit δ bezeichnen. Andererseits gilt $DH = 0$ außer im Nullpunkt. In diesem Fall ist also

$$D\Lambda_H = \delta \neq \Lambda_{DH} = 0.$$

Die Heavisidefunktion ist fast überall differenzierbar, trotzdem stellt ihre Ableitung nicht ihre distributive Ableitung dar.

Wir bilden nun das Produkt einer Distribution mit einer C^∞-Funktion. Auch hier bildet die Definition nur nach, was für reguläre Distributionen aufgrund üblicher Rechenregeln gilt.

8 **Definition** *Sei $f \in C^\infty(\Omega)$ und $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann definiert*

$$(f\Lambda)(\varphi) := \Lambda(f\varphi)$$

eine Distribution $f\Lambda$ auf Ω, genannt das Produkt aus f und Λ. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨ Wir müssen die Stetigkeit von $f\Lambda$ zeigen. Zu jedem $K \subset\subset \Omega$ existieren ein N und c, so dass $_2$

$$|\Lambda(f\varphi)| \leqslant c\,\|f\varphi\|_N, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Aufgrund der Produktregel für die Ableitungen von $f\varphi$ gilt

$$\|f\varphi\|_N \leqslant c_1 \max_{|\alpha|\leqslant N} \|D^\alpha f\|_K \,\|\varphi\|_N \leqslant c_2\,\|\varphi\|_N$$

mit weiteren Konstanten c_1 und c_2, die von f, K und N abhängen. Also gilt

$$|(f\Lambda)(\varphi)| \leqslant c\,\|f\varphi\|_N \leqslant c_3\,\|\varphi\|_N, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Somit ist $f\Lambda$ ebenfalls eine Distribution auf Ω $_2$. ⟩⟩⟩⟩

Für die Ableitung von Produkten klassischer Funktionen mehrerer Variablen gilt die Leibnizsche Formel

$$D^\alpha(fg) = \sum_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} B^\alpha_\sigma\, D^{\alpha-\sigma}f\, D^\sigma g$$

mit den Binomialkoeffizienten

$$B^\alpha_\sigma := B^{\alpha_1}_{\sigma_1} \cdot\cdot B^{\alpha_n}_{\sigma_n} = \binom{\alpha_1}{\sigma_1} \cdot\cdot \binom{\alpha_n}{\sigma_n}.$$

Sie folgt aus der eindimensionalen Leibnizformel $_{8.19}$ durch Induktion über die Dimension. Für Produkte mit Distributionen gilt Entsprechendes.

9 **Lemma** *Für $f \in C^\infty(\Omega)$ und $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gilt*

$$D^\alpha(f\Lambda) = \sum_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} B^\alpha_\sigma\, D^{\alpha-\sigma}f\, D^\sigma\Lambda. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨ Wenden wir die rechte Seite auf eine Testfunktion φ an, so wird

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} B^\alpha_\sigma\, D^{\alpha-\sigma}f\, D^\sigma\Lambda(\varphi) &= \sum_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} B^\alpha_\sigma\, D^\sigma\Lambda(\varphi D^{\alpha-\sigma}f) \\ &= \sum_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} B^\alpha_\sigma\, \Lambda((-D)^\sigma(\varphi D^{\alpha-\sigma}f)) = \Lambda(\psi)\end{aligned}$$

mit

$$\psi = \sum_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha} (-1)^{|\sigma|} B^\alpha_\sigma D^\sigma(\varphi D^{\alpha-\sigma}f).$$

Mit der klassischen Leibnizformel wird

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha}(-1)^{|\sigma|}B^\alpha_\sigma\sum_{0\leqslant\tau\leqslant\sigma}B^\sigma_\tau D^\tau\varphi\, D^{\alpha-\tau}f\\ &= \sum_{0\leqslant\tau\leqslant\alpha}\Bigg\{\sum_{\tau\leqslant\sigma\leqslant\alpha}(-1)^{|\sigma|}B^\alpha_\sigma B^\sigma_\tau\Bigg\}D^\tau\varphi\, D^{\alpha-\tau}f.\end{aligned}$$

Die geschweifte Klammer verschwindet für $\tau \neq \alpha$ und ist $(-1)^{|\alpha|}$ für $\tau = \alpha$, denn

$$\begin{aligned}t^\alpha = (s+(t-s))^\alpha &= \sum_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha}B^\alpha_\sigma s^{\alpha-\sigma}(t-s)^\sigma\\ &= \sum_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha}B^\alpha_\sigma s^{\alpha-\sigma}\sum_{0\leqslant\tau\leqslant\sigma}(-1)^{|\sigma-\tau|}B^\sigma_\tau s^{\sigma-\tau}t^\tau\\ &= \sum_{0\leqslant\tau\leqslant\alpha}(-1)^{|\tau|}s^{\alpha-\tau}t^\tau\Bigg\{\sum_{\tau\leqslant\sigma\leqslant\alpha}(-1)^{|\sigma|}B^\alpha_\sigma B^\sigma_\tau\Bigg\}.\end{aligned}$$

Also ist $\psi = (-1)^{|\alpha|}fD^\alpha\varphi$ und

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha}B^\alpha_\sigma D^{\alpha-\sigma}f\,D^\sigma\Lambda(\varphi) &= \Lambda(\psi)\\ &= (-1)^{|\alpha|}\Lambda(fD^\alpha\varphi)\\ &= (-1)^{|\alpha|}f\Lambda(D^\alpha\varphi) = D^\alpha(f\Lambda)(\varphi).\end{aligned}$$

Das wollten wir zeigen. ⟫⟫⟫

▪ Konvergenz

Definition *Eine Folge* (Λ_k) *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *konvergiert gegen eine Distribution* Λ *im Distributionssinn, geschrieben*

$$\Lambda_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} \Lambda,$$

falls $\lim_{k\to\infty}\Lambda_k\varphi = \Lambda\varphi$ *für alle* $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. ⋊

Bemerkung Dies definiert auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ die *schwach-∗-Topologie*. Die allgemeine Situation ist folgende. Sei X ein linearer topologischer Raum mit Dualraum X^* und

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X^* \to \mathbb{K}, \quad (u,v)\mapsto\langle u,v\rangle = v(u)$$

die *duale Paarung*. Dann ist die *schwach-∗-Topologie* auf X^* die gröbste Topologie, in der jedes Funktional $\langle u,\cdot\rangle$ stetig auf X^* ist.

In einem Hilbertraum H bedeutet dies Folgendes. Identifizieren wir H mit seinem Dualraum H^*, so ist die duale Paarung durch das Skalarprodukt gegeben. Somit gilt $v_n \xrightarrow{H^*} v$ genau dann, wenn

$$\langle u,v_n\rangle \to \langle u,v\rangle, \qquad u\in H.$$

Beispielsweise konvergiert eine Folge (e_n) paarweise verschiedener, orthonormaler Vektoren schwach-$*$ gegen 0, da

$$\langle u, e_n \rangle = \hat{u}_n \to 0$$

aufgrund des Riemann-Lebesgue-Lemmas 25.27. Auf einem Hilbertraum hat die schwach-$*$-Topologie die schöne Eigenschaft, dass abgeschlossene und beschränkte Mengen kompakt sind. ⊸

A. Für eine Folge (g_k) in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist $g_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} g$ äquivalent mit

$$\int_\Omega g_k \varphi \, \mathrm{d}\lambda \to \int_\Omega g \varphi \, \mathrm{d}\lambda, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Hinreichend hierfür ist wegen des Satzes von der dominierten Konvergenz, dass $g_k \to_\lambda g$ und $|g_k| \leqslant h$ mit einem $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

B. Für eine Diracfolge (φ_k) gilt $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$. Denn für alle $\varphi \in \mathcal{D}_n$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \varphi_k, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \varphi \, \mathrm{d}u &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(0-u)\varphi(-u) \, \mathrm{d}u \\ &= (\varphi_k * \check{\varphi})(0) \\ &\to \check{\varphi}(0) = \varphi(0) = \delta(\varphi). \end{aligned}$$

Dieser – sehr weit gefasste – Konvergenzbegriff macht es leicht, Grenzübergänge und Ableitungen ohne weitere Voraussetzungen zu vertauschen

10 **Satz** *Gilt $\Lambda_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} \Lambda$, so gilt auch $D^\alpha \Lambda_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} D^\alpha \Lambda$ für alle Multiindizes α.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ haben wir

$$\lim_{k\to\infty} (D^\alpha \Lambda_k)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \Lambda_k((-D)^\alpha \varphi) = \Lambda((-D)^\alpha \varphi) = (D^\alpha \Lambda)(\varphi).$$

Das bedeutet gerade, dass $D^\alpha \Lambda_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} D^\alpha \Lambda$. ⟩⟩⟩⟩

Wir bemerken noch, dass bereits aus der punktweisen Konvergenz einer Distributionenfolge – das heißt, der Konvergenz auf jeder Testfunktion – die Konvergenz gegen eine Distribution im Distributionssinne folgt. Es ist also nicht nötig, die Stetigkeit des punktweise definierten Grenzwerts zu fordern.

11 **Satz** *Sei (Λ_k) eine Folge in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Existiert*

$$\Lambda\varphi \coloneqq \lim_{k\to\infty} \Lambda_k \varphi$$

für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, so definiert dies eine Distribution $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze* Für jedes $K \subset\subset \Omega$ existiert also

$$\Lambda\varphi \coloneqq \lim_{k\to\infty} \Lambda_k\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Nun ist $\mathcal{D}_K(\Omega)$ mit der Metrik des Schwartzraums 26.10 ein vollständiger metrischer Raum, außerdem lokal konvex und damit ein *Frechétraum*. Aufgrund einer verallgemeinerten Satzes von Banach-Steinhaus 25.52 ist daher Λ stetig auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ – denn da $\mathcal{D}_K(\Omega)$ selber nur von erster Kategorie ist 3, kann $(\Lambda_k\varphi)$ nicht auf einer Menge zweiter Bairescher Kategorie unbeschränkt sein. Da dies für jedes $K \subset\subset \Omega$ gilt, ist Λ auf ganz $\mathcal{D}(\Omega)$ stetig, somit eine Distribution. ⟩⟩⟩⟩

27.3 Darstellungssätze

Eine reguläre Distribution wird durch eine lokal integrierbare Funktion dargestellt. Wir wissen also, wie eine solche Distribution ›aussieht‹. Bleibt die Frage, wie man sich singuläre Distributionen vorstellen soll. Hierfür benötigen wir den Begriff des *Trägers*, der indirekt definiert wird.

Definition *Eine Distribution Λ auf Ω verschwindet auf einer offenen Menge $\omega \subset \Omega$, falls*

$$\Lambda\varphi = 0, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Der Träger von Λ, bezeichnet $\operatorname{supp}\Lambda$, ist das Komplement der Vereinigung aller offenen Teilmengen von Ω, auf denen Λ verschwindet. ⋊

A. Der Träger der Diracdistribution δ_p ist $\{p\}$.
B. Für die Heavisidefunktion H gilt $\operatorname{supp}\Lambda_H = [0,\infty)$.
C. Fur $f \in C(\mathbb{R})$ ist $\operatorname{supp}\Lambda_f = \operatorname{supp} f$.

Der Träger ist *per definitionem* relativ abgeschlossen in Ω. Da er aber als Komplement einer lokal erklärten Menge definiert ist, müssen wir noch zeigen, dass eine Distribution außerhalb ihres Trägers tatsächlich verschwindet.

12 **Lemma** *Jede Distribution verschwindet auf dem Komplement ihres Trägers. Für eine Distribution Λ und eine Testfunktion φ gilt also*

$$\operatorname{supp}\Lambda \cap \operatorname{supp}\varphi = \varnothing \;\Rightarrow\; \Lambda\varphi = 0. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Definitionsgemäß ist

$$\Omega \setminus \operatorname{supp} \Lambda = \bigcup_\alpha \omega_\alpha$$

die Vereinigung aller offenen Teilmengen ω_α von Ω, auf denen Λ verschwindet. Zu dieser Familie (ω_α) existiert eine untergeordnete Zerlegung der Eins (σ_κ) [21.7]. Jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit Träger außerhalb von $\operatorname{supp} \Lambda$ können wir damit schreiben als lokal endliche Summe

$$\varphi = \sum_\kappa \sigma_\kappa \varphi$$

Nun ist der Träger von σ_κ in einem ω_α enthalten und daher auch $\sigma_\kappa \varphi \in \mathcal{D}(\omega_\alpha)$. Also ist $\Lambda(\sigma_\kappa \varphi) = 0$ für jedes κ und damit

$$\Lambda\varphi = \sum_\kappa \Lambda(\sigma_\kappa \varphi) = 0.$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

13 **Lemma** *Sei $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\chi \in C^\infty(\Omega)$. Gilt $\chi \,|\, U \equiv 1$ für eine offene Umgebung U von $\operatorname{supp} \Lambda$, so ist*

$$\chi\Lambda = \Lambda.$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Die Träger von $\varphi - \chi\varphi$ und Λ sind disjunkt. Somit [12] gilt $\Lambda(\varphi - \chi\varphi) = 0$, was äquivalent ist mit

$$\Lambda\varphi = \Lambda(\chi\varphi) = (\chi\Lambda)(\varphi).$$

Da dies für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt, ist $\Lambda = \chi\Lambda$. ⟩⟩⟩⟩⟩

14 **Satz** *Ist der Träger einer Distribution Λ kompakt, so ist Λ von endlicher Ordnung. Es existieren sogar ein $N \geqslant 0$ und ein festes $c \geqslant 0$, so dass*

$$|\Lambda\varphi| \leqslant c \, \|\varphi\|_N, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wähle eine Abschneidefunktion $\chi \in C^\infty(\Omega)$ zu einer kompakt in Ω enthaltenen offenen Umgebung von $\operatorname{supp} \Lambda$ [24.26]. Hierfür gilt $\chi\Lambda = \Lambda$ [13]. Zu der kompakten Menge $K = \operatorname{supp} \chi$ existieren $N \geqslant 0$ und $c \geqslant 0$ mit [2]

$$|\Lambda\varphi| \leqslant c \, \|\varphi\|_N, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt dann $\chi\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ und deshalb

$$|\Lambda\varphi| = |(\chi\Lambda)(\varphi)| = |\Lambda(\chi\varphi)| \leqslant c \, \|\chi\varphi\|_N \leqslant c_1 \, \|\varphi\|_N$$

aufgrund der Leibnizformel [9] mit einer Konstanten c_1, die von χ abhängt. ⟩⟩⟩⟩⟩

Eine Distribution mit leerem Träger verschwindet identisch – dieser Fall ist trivial. Betrachten wir also Distributionen, deren Träger aus einem Punkt besteht. Diese können wir vollständig beschreiben.

15 **Satz** *Sei $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Gilt $\operatorname{supp} \Lambda = \{p\}$, so ist*

$$\Lambda = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c_\alpha \delta_p^\alpha$$

mit gewissen Konstanten c_α und der Ordnung N von Λ. Umgekehrt hat jede nichttriviale Distribution dieser Gestalt den Träger $\{p\}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die zweite Aussage des Satzes ist offensichtlich. Betrachte also die erste Aussage, und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 0$. Wegen der Kompaktheit ihres Trägers ist Λ von endlicher Ordnung N und 14

$$|\Lambda\varphi| \leqslant c \, \|\varphi\|_N, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Sei $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine Abschneidefunktion zum Punkt 0, die außerhalb einer in Ω enthaltenen kleinen Kugel um 0 verschwindet 24.26, und

$$T_N\varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant N} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \varphi(0) x^\alpha$$

das N-te Taylorpolynom von φ in 0. Dann ist

$$\psi = \chi(\varphi - T_N\varphi) \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Wir zeigen gleich, dass $\Lambda\psi = 0$. Wegen $\chi\Lambda = \Lambda$ 13 erhalten wir damit

$$\Lambda\varphi = \Lambda(\chi\varphi) = \Lambda(\chi T_N\varphi).$$

Das wiederum bedeutet, dass $\Lambda\varphi$ eine Linearkombination der Koeffizienten von $T_N\varphi$ sein muss. Diese können wir darstellen als

$$D^\alpha\varphi(0) = \delta_0(D^\alpha\varphi) = (-D)^\alpha\delta_0(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\delta_0^\alpha(\varphi).$$

Dies ergibt die Behauptung.

Bleibt zu zeigen, dass $\Lambda\psi = 0$. Mit $\chi_\varepsilon = \chi \circ \varepsilon^{-1}$ gilt A-1

$$\|\chi_\varepsilon\psi\|_N = O(\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0.$$

Wegen $\chi_\varepsilon \equiv 1$ in einer gewissen Umgebung von 0 gilt somit

$$|\Lambda\psi| = |(\chi_\varepsilon\Lambda)(\psi)| = |\Lambda(\chi_\varepsilon\psi)| \leqslant c \, \|\chi_\varepsilon\psi\|_N = O(\varepsilon).$$

Also ist $\Lambda\psi = 0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Wir betrachten jetzt noch den Fall eines beliebigen kompakten Trägers. Für den Beweis des folgenden Satzes siehe Rudin, Functional Analysis, Seiten 152–3.

16 **Satz** *Sei $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ von endlicher Ordnung N. Ist der Träger von Λ kompakt, so existieren stetige Funktionen λ_α auf Ω so, dass*

$$\Lambda = \sum_{\alpha:\alpha_i \leqslant N+2} D^\alpha \lambda_\alpha. \quad \rtimes$$

Die Ableitungen sind natürlich im Distributionssinn gemeint. Es ist also

$$\Lambda\varphi = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \lambda_\alpha D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}\lambda.$$

Da Λ auf seinem kompakten Träger konzentriert ist, kann man zu jeder offenen Umgebung U von $\operatorname{supp}\Lambda$ die Funktionen λ_α auch noch so wählen, dass

$$\operatorname{supp}\lambda_\alpha \subset\subset U.$$

Dieser Satz enthält den vorangehenden, denn Ein-Punkt-Mengen sind kompakt. Die Aussagen stehen nur scheinbar im Widerspruch, denn die Dirac-Distribution kann als zweite Ableitung einer stetigen Funktion geschrieben werden.

27.4 Temperierte Distributionen

Wir betrachten nun eine Klasse von Distributionen speziell auf dem $\mathbb{R}^n$, die nicht nur auf dem Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}_n$ auf dem $\mathbb{R}^n$ erklärt und stetig sind, sondern auch auf dem größeren Raum der Schwartzfunktionen $\mathcal{S}_n$. Dies erlaubt uns, auch die Fouriertransformation zu erklären, erfordert allerdings gewisse Wachstumsbeschränkungen im Unendlichen, weshalb man von *temperierten Distributionen* spricht.

Wir haben bereits gezeigt 26.14, dass

$$\mathcal{D}_n \overset{\wedge}{\hookrightarrow} \mathcal{S}_n.$$

Ist also $L \in \mathcal{S}'_n$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}_n$, so ist dessen Einschränkung auf $\mathcal{D}_n$ eine Distribution auf $\mathbb{R}^n$, denn $L \,|\, \mathcal{D}_n = L \circ i$ ist ebenfalls stetig. Hat umgekehrt eine Distribution $\Lambda \in \mathcal{D}'_n$ eine stetige Fortsetzung zu einem Funktional L auf $\mathcal{S}_n$, so ist diese eindeutig, da $\mathcal{D}_n$ dicht in $\mathcal{S}_n$ liegt. Wir können daher $\mathcal{S}'_n$ mit einem *Unterraum* von $\mathcal{D}'_n$ identifizieren. Dies ist der Raum der *temperierten Distributionen.*

Definition *Eine Distribution $\Lambda \in \mathcal{D}'_n$ heißt temperiert, wenn sie stetig zu einem Funktional $L \in \mathcal{S}'_n$ fortgesetzt werden kann.* $\rtimes$

A. Jede Distribution Λ mit kompaktem Träger ist temperiert: Wähle eine Abschneidefunktion χ zu einer Umgebung der kompakten Menge $K = \operatorname{supp}\Lambda$ und definiere

$$L(f) \coloneqq \Lambda(\chi f), \qquad f \in \mathcal{S}_n.$$

Dies ist eine Fortsetzung von Λ, denn für $\varphi \in \mathcal{D}_n$ gilt $_{13}$

$$L\varphi = \Lambda(\chi\varphi) = (\chi\Lambda)(\varphi) = \Lambda\varphi.$$

L ist auch stetig auf $\mathcal{S}_n$, denn mit dem Stetigkeitskriterium $_2$ ist

$$|Lf| = |\Lambda(\chi f)| \leqslant c\, \|\chi f\|_N \leqslant c'\, \|f\|_{N:N}\,.$$

B. Ist

$$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \qquad \omega^{-m} g \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

für ein $m \geqslant 0$, wobei $\omega(x) = 1 + |x|^2$, so ist Λ_g eine temperierte Distribution: Denn

$$|\Lambda_g f| \leqslant \int |fg|\, \mathrm{d}\lambda \leqslant \|\omega^m f\| \int \omega^{-m}\, |g|\, \mathrm{d}\lambda \leqslant c1.m0f.$$

Also ist Λ_g stetig.

C. Insbesondere kann jede Funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ als temperierte Distribution aufgefasst werden, ebenso jedes Polynom, und überhaupt *jede messbare Funktion, deren Wachstum durch ein Polynom dominiert wird.*

17 **Satz** *Ist Λ eine temperierte Distribution, so auch $D^\alpha\Lambda$, $P\Lambda$ und $\varphi\Lambda$ für jeden Multiindex α, jedes Polynom P und jede Schwartzfunktion φ.*

⟨⟨⟨⟨ Die Abbildungen

$$f \mapsto D^\alpha f, \qquad f \mapsto Pf, \qquad f \mapsto \varphi f$$

bildet $\mathcal{S}_n$ stetig in sich ab $_{26.13}$. Somit sind auch

$$D^\alpha\Lambda = \Lambda \circ (-D)^\alpha, \qquad P\Lambda = \Lambda \circ P, \qquad \varphi\Lambda = \Lambda \circ \varphi$$

stetig auf $\mathcal{S}_n$, also temperierte Distributionen. ⟩⟩⟩⟩

Wir schreiben von nun an $\mathcal{S}'_n \subset \mathcal{D}'_n$ für den Unterraum der temperierten Distributionen in $\mathcal{D}'_n$ und bezeichnen diese wieder mit Λ.

Fouriertransformation

Im Hinblick auf die Anwendung dieser Theorie auf partielle Differenzialgleichungen benötigen wir noch die Fouriertransformation von temperierten Distributionen. Ausgangspunkt ist die Identität $\langle \hat{f}, g\rangle = \langle f, \hat{g}\rangle$ für L^1-Funktionen $_{26.8}$.

Definition *Sei Λ eine temperierte Distribution. Dann wird durch*

$$\hat{\Lambda}\varphi \coloneqq \Lambda\hat{\varphi}, \qquad \varphi \in \mathcal{S}_n,$$

eine temperierte Distribution $\hat{\Lambda}$ definiert, genannt die Fouriertransformierte von Λ. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund der Stetigkeit von $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ 26.17 ist auch $\hat{\Lambda} = \Lambda \circ \mathcal{F}$ stetig auf $\mathcal{S}_n$ und damit eine temperierte Distribution. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkungen *a.* Diese Definition ist für allgemeine Distributionen *nicht möglich*, da die Fouriertransformierten von Testfunktionen keinen kompakten Träger besitzen und daher keine Testfunktionen sind.

b. Dies ist eine stetige Fortsetzung der Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$. Denn für eine reguläre Distribution Λ_f mit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt 26.8

$$(\Lambda_f)\hat{}(\varphi) = \Lambda_f(\hat{\varphi}) = \langle f, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{f}, \varphi\rangle = (\Lambda_{\hat{f}})(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}_n$. Also ist $(\Lambda_f)\hat{} = \Lambda_{\hat{f}}$. ⊸

18 **Satz** *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist ein linearer Isomorphismus des Raumes $\mathcal{S}'_n$ mit Periode 4.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für die hier benötige Topologie verweisen wir auf Rudin, *Funktionalanalysis*. Die Topologie auf $\mathcal{S}'_n$ ist die von $\mathcal{S}_n$ induzierte schwach-$*$-Topologie und damit die gröbste, in der für jedes $f \in \mathcal{S}_n$ das lineare Funktional $\Lambda \mapsto \Lambda f$ stetig ist. Zu jeder Nullpunktsumgebung W in $\mathcal{S}'_n$ existieren deshalb Funktionen $f_1, .., f_k \in \mathcal{S}_n$ so, dass

$$\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k} \{\Lambda \in \mathcal{S}'_n : |\Lambda f_i| < 1\} \subset W.$$

Dann ist auch

$$V = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k} \{\Lambda \in \mathcal{S}'_n : |\Lambda \hat{f}_i| < 1\}$$

eine Nullpunktsumgebung in $\mathcal{S}'_n$. Wegen $\hat{\Lambda}(f) = \Lambda(\hat{f})$ wird diese von $\mathcal{F}$ in W abgebildet. Also ist $\mathcal{F}$ stetig.

Da $\mathcal{F}$ Periode 4 auf $\mathcal{S}_n$ hat, hat $\mathcal{F}$ wegen $\mathcal{F}\Lambda = \Lambda \circ \mathcal{F}$ Periode 4 auf $\mathcal{S}'_n$. Also ist $\mathcal{F}$ bijektiv, und wegen $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$ ist auch $\mathcal{F}^{-1}$ stetig. ⟩⟩⟩⟩⟩

19 **Lemma** *Für eine temperierte Distribution Λ und ein Polynom P gilt*

$$(P(D)\Lambda)\hat{} = P\hat{\Lambda}, \qquad (P\Lambda)\hat{} = P(-D)\hat{\Lambda}.$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Zum Beispiel ist 26.16

$$\begin{aligned}(P(D)\Lambda)^\wedge(\varphi) &= (P(D)\Lambda)(\hat\varphi)\\ &= \Lambda(P(-D)\hat\varphi)\\ &= \Lambda((P\varphi)^\wedge) = \hat\Lambda(P\varphi) = (P\hat\Lambda)(\varphi).\end{aligned}$$

Analog die zweite Identität. ⟩⟩⟩⟩⟩

20 **Umkehrsatz für Distributionen** *Für temperierte Distributionen gilt*

$$\mathcal{F}^2\Lambda = \Lambda \circ \rho$$

mit der Reflexion $\rho\colon x \mapsto -x$. *Oder kürzer:* $\Lambda^{\wedge\wedge} = \Lambda^\vee$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Mit den entsprechenden Eigenschaften für Schwartzfunktionen 26.18 gilt

$$(\mathcal{F}^2\Lambda)(\varphi) = \Lambda(\mathcal{F}^2\varphi) = \Lambda(\varphi\circ\rho) = (\Lambda\circ\rho)(\varphi). \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

▷ A. *Das konstante Polynom* 1*:* Jedes Polynom P kann als temperierte Distribution betrachtet werden. Insbesondere ist für das konstante Polynom 1 [1]

$$1(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} 1\cdot\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\mathrm{d}\lambda,$$

also

$$\hat 1(\varphi) = 1(\hat\varphi) = \int \hat\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

Umgekehrt gilt ebenso

$$\hat\delta(\varphi) = \delta(\hat\varphi) = \hat\varphi(0) = \int \varphi\,\mathrm{d}\lambda = 1(\varphi).$$

Also gilt

$$\hat 1 = \delta, \qquad \hat\delta = 1.$$

B. *Beliebige Polynome* P*:* Mit dem vorletzten Lemma 19 gilt

$$(P(D)\delta)^\wedge = P\hat\delta = P1 = P$$

und

$$\hat P = (P1)^\wedge = P(-D)\hat 1 = P(-D)\delta.$$

C. Man kann auch mit dem Umkehrsatz argumentieren. Aus $\hat 1 = \delta$ folgt

$$\hat\delta = 1^{\wedge\wedge} = 1^\vee = 1,$$

und aus $(P(D)\delta)^\wedge = P$ folgt

$$\hat P = (P(D)\delta)^\vee = P(-D)\check\delta = P(-D)\delta. \qquad ◁$$

[1] Wir schreiben hier kürzer 1 statt Λ_1 für die reguläre Distribution zur Funktion 1.

▪ Faltungen

Wir benötigen noch die Faltung einer temperierten Distribution mit einer Schwartzfunktion. Für zwei L^1-Funktionen haben wir

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\check{g}(u-x)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\tau_x\check{g}(u)\,\mathrm{d}u = \Lambda_f(\tau_x\check{g}).\end{aligned}$$

Dies nehmen wir zum Anlass für folgende Definition.

21 **Definition und Lemma** *Für $\Lambda \in \mathcal{S}_n'$ und $\varphi \in \mathcal{S}_n$ wird durch*

$$(\Lambda * \varphi)(x) \coloneqq \Lambda(\tau_x\check{\varphi}), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

eine glatte Funktion $\Lambda * \varphi$ definiert, genannt die Faltung von Λ und φ. Diese wächst höchstens polynomial und definiert daher eine temperierte Distribution $\Lambda * \varphi \in \mathcal{S}_n'$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wie für Distributionen 2 A-10 zeigt man, dass es für eine temperierte Distribution Λ ein $m \geqslant 0$ und ein $c \geqslant 0$ gibt, so dass

$$|\Lambda\varphi| \leqslant c1.mm\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{S}_n.$$

Somit gilt

$$|(\Lambda * \varphi)(x)| \leqslant c1.mm\tau_x\varphi.$$

Dabei ist, $(1+|u+x|^2) \leqslant 2(1+|u|^2)(1+|x|^2)$,

$$\begin{aligned}1.m0D^\alpha(\tau_x\varphi) &= \sup_{u\in\mathbb{R}^n}(1+|u|^2)^m\,|D^\alpha\varphi(u-x)| \\ &= \sup_{u\in\mathbb{R}^n}(1+|u+x|^2)^m\,|D^\alpha\varphi(u)| \\ &\leqslant 2^m(1+|x|^2)^m 1.m0D^\alpha\varphi.\end{aligned}$$

Also gilt

$$1.mm\tau_x\varphi \leqslant 2^m(1+|x|^2)^m 1.mm\varphi,$$

und $\Lambda * \varphi$ wächst höchstens polynomial. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Die Definition der Faltung ist auch sinnvoll für Distributionen und Testfunktionen. Das Ergebnis ist in diesem Fall eine C^∞-Funktion. ⊸

▹ Für die Diracdistribution δ und $\varphi \in \mathcal{S}_n$ erhalten wir

$$(\delta * \varphi)(x) = \delta(\tau_x \check{\varphi}) = \delta(\varphi(x - \cdot)) = \varphi(x).$$

Somit gilt $\delta * \varphi = \varphi$. ◃

Rechenregeln

22 **Satz** *Sei $\Lambda \in \mathcal{S}'_n$ und $\varphi \in \mathcal{S}_n$. Dann gilt*
(i) $D^\alpha(\Lambda * \varphi) = \Lambda * (D^\alpha \varphi) = (D^\alpha \Lambda) * \varphi$ *für jeden Multiindex α,*
(ii) $(\Lambda * \varphi)\hat{} = \hat{\varphi}\hat{\Lambda}$,
(iii) $(\varphi\Lambda)\hat{} = \hat{\Lambda} * \hat{\varphi}$,
(iv) $(\Lambda * \varphi) * \psi = \Lambda * (\varphi * \psi)$ *für jede Schwartzfunktion ψ.* ⋊

Man beachte in (ii) und (iii) die Reihenfolge der Faktoren.

⟨⟨⟨⟨ (i) Für die erste Identität betrachten wir zunächst den Differenzenquotientenoperator bezüglich der i-ten Koordinate, $\Delta^i_\varepsilon = (\tau_{-\varepsilon e_i} - \tau_0)/\varepsilon$. Für diesen gilt aus Linearitätsgründen

$$\Delta^i_\varepsilon(\Lambda * \varphi) = \Lambda * (\Delta^i_\varepsilon \varphi).$$

Im nachfolgenden Lemma 23 zeigen wir, dass $\Delta^i_\varepsilon \varphi \to \partial_i \varphi$ *im Schwartzraum*. Somit ist

$$\partial_i(\Lambda * \varphi) = \Lambda * (\partial_i \varphi).$$

Iteration über alle Ableitungen in D^α ergibt die erste Identität. Die zweite folgt daraus direkt:

$$\begin{aligned}(\Lambda * (D^\alpha \varphi))(x) &= \Lambda(\tau_x (D^\alpha \varphi)\check{}\,) \\ &= \Lambda(\tau_x((-D)^\alpha \check{\varphi})) \\ &= \Lambda((-D)^\alpha \tau_x \check{\varphi}) \\ &= (D^\alpha \Lambda)(\tau_x \check{\varphi}) = ((D^\alpha \Lambda) * \varphi)(x).\end{aligned}$$

(ii) Wegen $\Lambda * \varphi \in \mathcal{S}'_n$ 21 existiert die Fouriertransformierte. Für $\psi \in \mathcal{D}_n$ gilt dann

$$\begin{aligned}(\Lambda * \varphi)\hat{}(\hat{\psi}) &= (\Lambda * \varphi)(\check{\psi}) \qquad (1) \\ &= \int (\Lambda * \varphi)(u)\check{\psi}(u)\,\mathrm{d}u \qquad 21, 8 \\ &= \int \Lambda(\tau_u \check{\varphi})\check{\psi}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int \Lambda(\tau_u \check{\varphi}\, \check{\psi}(u))\,\mathrm{d}u = \Lambda \int \tau_u \check{\varphi}\, \check{\psi}(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Die letzte Umformung ist möglich, da sich die Integrale effektiv nur über den kompakten Träger von $\check{\psi}$ erstrecken und dort als Limes über Treppenfunktionen dargestellt werden können. Das letzte Integral definiert die x-Funktion

$$\begin{aligned}\int \tau_u \check{\varphi}\, \check{\psi}(u)\,\mathrm{d}u &= \int \varphi(u-x)\psi(-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int \varphi(-x-u)\psi(u)\,\mathrm{d}u = (\varphi * \psi)\check{}\,.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}(\Lambda * \varphi)\hat{}\,(\hat{\psi}) &= \Lambda((\varphi * \psi)\check{}\,) \\ &= \Lambda\hat{}\,((\varphi * \psi)\hat{}\,) = \hat{\Lambda}(\hat{\varphi}\hat{\psi}) = (\hat{\varphi}\hat{\Lambda})(\hat{\psi}).\end{aligned} \tag{2}$$

Dies gilt für alle $\psi \in \mathcal{D}_n$. Aus Stetigkeitsgründen gilt es auch für alle $\psi \in \mathcal{S}_n$. Da $\mathcal{F}$ diesen Raum isomorph auf sich abbildet, folgt hieraus (ii) auf ganz $\mathcal{S}_n$.

(iii) Mit dem gerade Bewiesenen gilt auch

$$(\hat{\Lambda} * \hat{\varphi})\hat{} = \check{\varphi}\check{\Lambda} = (\varphi\Lambda)\check{}\; = (\varphi\Lambda)\hat{}\hat{}.$$

Rücktransformation ergibt (iii).

(iv) Mit (ii) gelten (1) und (2) für alle $\psi \in \mathcal{S}_n$, also auch

$$(\Lambda * \varphi)(\check{\psi}) = \Lambda((\varphi * \psi)\check{}\,).$$

Somit gilt es auch für $\tau_x\check{\psi}$ statt $\check{\psi}$. Das ergibt

$$\begin{aligned}(\Lambda * \varphi) * \psi &= (\Lambda * \varphi)(\tau_x\check{\psi}) \\ &= \Lambda((\varphi * \tau_{-x}\psi)\check{}\,) \\ &= \Lambda(\tau_x(\varphi * \psi)\check{}\,) = \Lambda * (\varphi * \psi).\end{aligned}$$ ⟫⟫⟫

23 **Lemma** *Für den Differenzenquotientenoperator* $\Delta_\varepsilon^i = (\tau_{-\varepsilon e_i} - \tau_0)/\varepsilon$ *gilt*

$$\Delta_\varepsilon^i \varphi \xrightarrow{\mathcal{S}_n} \partial_i \varphi, \qquad \varepsilon \to 0.$$ ⋊

⟪⟪⟪ Wir beweisen dies für die Fouriertransformierten. Wir zeigen also 26.7

$$(\Delta_\varepsilon^i \varphi - \partial_i \varphi)\hat{} = \eta_\varepsilon^i \hat{\varphi} \xrightarrow{\mathcal{S}_n} 0, \qquad \eta_\varepsilon^i \coloneqq \frac{\mathrm{e}^{\varepsilon \mathrm{i} x_i} - 1}{\varepsilon} - \mathrm{i}x_i.$$

Für ein Polynom P und einen Multiindex α gilt mit der Leibnizformel

$$PD^\alpha(\eta_\varepsilon^i \hat{\varphi}) = \sum_{0 \leqslant \sigma \leqslant \alpha} B_\sigma^\alpha P(D^{\alpha-\sigma}\hat{\varphi})(D^\sigma \eta_\varepsilon^i),$$

und es ist leicht zu zeigen A-2, dass

$$|D^\sigma \eta_\varepsilon^i| \leqslant \begin{cases} \varepsilon\,|x_i|^{2-|\sigma|}, & |\sigma| \leqslant 2, \\ \varepsilon^{|\sigma|-1}, & |\sigma| > 2. \end{cases}$$

Somit gilt $PD^\alpha(\eta_\varepsilon^i \hat{\varphi}) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. ⟫⟫⟫

27.5 Fundamentallösungen

Wir betrachten nun wieder lineare partielle Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, also Gleichungen der Form

$$P(D)u = f$$

mit einem Polynom P. Besitzt das Polynom *keine reellen Nullstellen*, so ist die Gleichung im Schwartzraum eindeutig lösbar durch

$$u = P(D)^{-1}f, \qquad P(D)^{-1} = \mathcal{F}^{-1}P^{-1}\mathcal{F}.$$

Diese Nullstellenbedingung wollen wir jetzt fallen lassen, aber weiterhin annehmen, dass die Lösung u *eindeutig* ist. Dann ist u eine lineare Funktion von f, symbolisch

$$u = \Phi f.$$

Dieser noch unbekannte Operator Φ bestimmt die Lösung u von $P(D)u = f$ für jedes f, weshalb er auch *Fundamentallösung* dieser Gleichung genannt wird.

Aus der linearen Algebra ist dies vertraut. Angenommen die lineare Gleichung $Ax = b$ hat für jedes b eine eindeutige Lösung x, die wir als

$$x = \Phi b$$

schreiben. Dann ist $A\Phi b = Ax = b$ für alle b und $x = \Phi b = \Phi Ax$ für alle x. Also ist

$$A\Phi = I = \Phi A.$$

Die Fundamentallösung ist in diesem Fall also gerade die Inverse $\Phi = A^{-1}$.

Um eine solche Fundamentallösung zu finden, setzen wir sie in der Form

$$u = E * f$$

mit einer temperierten Distribution E an. Dies ergibt eine Lösung, wenn

$$P(D)u = P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = f$$

für alle $f \in \mathcal{D}_n$. Dies gilt dann, und auch nur dann, wenn

$$P(D)E = \delta.$$

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition *Eine Distribution $E \in \mathcal{D}'_n$ heißt Fundamentallösung des linearen partiellen Differenzialoperators $P(D)$, falls*

$$P(D)E = \delta. \quad \rtimes$$

Eine Fundamentallösung ist übrigens nicht eindeutig. Man kann immer eine Lösung der homogenen Gleichung $P(D)u = 0$ addieren.

Mit einer Fundamentallösung E ist $u = E * f$ für jedes $f \in \mathcal{D}_n$ eine Lösung der Differenzialgleichung $P(D)u = f$, denn

$$P(D)u = P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f.$$

Besitzt P keine reellen Nullstellen, so entspricht dies der Fouriermultiplikatoren-Lösung. Denn wegen $(P(D)E)\hat{} = P\hat{E} = \hat{\delta} = 1$ ist dann $\hat{E} = 1/P$ eine temperierte Distribution, und

$$\begin{aligned} u = E * f &= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(E * f) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{E}\hat{f}) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(P^{-1}\hat{f}) \\ &= (\mathcal{F}^{-1}P^{-1}\mathcal{F})(f). \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung $u = P(D)^{-1}f$.

▪ Existenz von Fundamentallösungen

Die Frage ist natürlich, ob es solche Fundamentallösungen überhaupt gibt – ob sich also $\hat{E} = 1/P$ auch bei Vorliegen reeller Nullstellen durch eine Distribution lösen lässt. Tatsächlich ist dies der Fall.

24 **Satz von Malgrange-Ehrenpreis** *Jeder lineare partielle Differenzialoperator mit konstanten Koeffizienten besitzt eine Fundamentallösung.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze* Mit φ ist immer auch

$$\psi = P(-D)\varphi$$

eine Testfunktion, und Fouriertransformation ergibt

$$\hat{\psi} = \check{P}\hat{\varphi}.$$

Nun sind die Fouriertransformierten von Funktionen mit kompaktem Träger *ganze Funktionen*, also analytisch auf $\mathbb{C}^n$. Daher bestimmt die letzte Gleichung $\hat{\varphi}$ eindeutig als lineare Funktion von $\hat{\psi}$. Damit ist auch φ und $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ als lineare Funktion von ψ eindeutig bestimmt. Die Krux ist zu zeigen, dass die so formal erklärte Abbildung

$$\psi \mapsto (\varphi(\psi))(0)$$

stetig ist und damit eine *Distribution* E darstellt. Dann wäre also

$$\begin{aligned}(P(D)E)(\varphi) &= E(P(-D)\varphi) \\ &= E(\psi) \\ &= \delta(\varphi)\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}_n$, und E wäre die gesuchte Fundamentallösung.

Der Nachweis der Stetigkeit von $\psi \mapsto \varphi(\psi)(0)$ zieht sich über knapp vier Seiten – siehe beispielsweise W. Rudin, Funktinalanalysis, Seiten 194-7. ⟫⟫⟫

▪ Stammfunktionsgleichung

Wir beschreiben einige Beispiele. Betrachte zunächst die vertraute Gleichung

$$u' = f$$

für die Stammfunktion einer Funktion f auf der reellen Geraden. Dies ist zwar keine partielle Differenzialgleichung im engeren Sinne, da die Funktionen nur von einer reellen Variablen abhängen. Sie ist aber von der Form $P(D)u = f$ mit $P(t) = \mathrm{i}t$. Die Fundamentallösung muss also der Gleichung

$$P(D)E = E' = \delta$$

genügen. Die Heavisidefunktion $E = H$ ist eine Distributionslösung, und alle Lösungen von $u' = f$ mit einer Schwartzfunktion f sind gegeben durch

$$\begin{aligned}u = H * f &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} f(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert, da f schnell abfällt.

Man beachte, dass mit $f \in \mathcal{D}_n$ auch $u \in \mathcal{D}_n$ dann und nur dann, wenn

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}t = 0.$$

Andernfalls ist u lediglich eine temperierte Distribution. Mehr haben wir aber auch nicht behauptet.

- **Laplacegleichung**

Als zweites Beispiel betrachten wir die Laplacegleichung

$$\Delta u = f$$

auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \geqslant 2$. Gesucht ist eine Distribution, die wir nun der Einfachheit halber ebenfalls mit u bezeichen, mit $\Delta u = \delta$. Diese Distribution hat ihren Träger offensichtlich im Nullpunkt, denn für jede Testfunktion φ mit $0 \notin \operatorname{supp} \varphi$ ist

$$(\Delta u)(\varphi) = \delta(\varphi) = \varphi(0) = 0.$$

Wir betrachten daher zuerst die *harmonische Gleichung*

$$\Delta u = 0$$

auf dem punktierten Raum $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da sowohl der Laplaceoperator als auch dieses Gebiet invariant unter Rotationen sind, ist es naheliegend, eine *rotationssymmetrische Lösung*

$$u = v(r), \qquad r = |x|,$$

zu suchen. Die harmonische Gleichung geht dann über in die eindimensionale gewöhnliche Differenzialgleichung A-16

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0.$$

Diese lösen wir mit Separation der Variablen. Wir können $v' \neq 0$ auf $(0, \infty)$ annehmen – warum übrigens? – und gelangen zu $v' = a/r^{n-1}$ und weiter

$$v = \begin{cases} a \log r, & n = 2, \\ a/r^{n-2}, & n \geqslant 3. \end{cases} \tag{3}$$

Eine additive Integrationskonstante können wir ignorieren, da diese einer konstanten Lösungen von $\Delta u = 0$ auf dem $\mathbb{R}^n$ entspricht und diese für eine Fundamentallösung frei gewählt werden kann.

Die Integrationskonstante a ist nun so zu bestimmen, dass ›bei Null alles stimmt‹, wir also $(\Delta u)(\varphi) = \delta(\varphi)$ erhalten. Dazu schreiben wir

$$(\Delta u)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u \, \Delta\varphi \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u \, \Delta\varphi \, \mathrm{d}x$$

mit $\Omega_\varepsilon = \{|x| > \varepsilon\}$. Nach der Formel von Green 23.22 ist

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta\varphi - \varphi\Delta u) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (u\partial_r\varphi - \varphi\partial_r u) \, \mathrm{d}S,$$

da die Ableitung nach r der Ableitung nach der äußeren Normalen n an Ω_ε entspricht. Da $\Delta u = 0$ auf Ω_ε, gilt also

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u\,\Delta\varphi\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (u\,\partial_r\varphi - \varphi\,\partial_r u)\,\mathrm{d}S.$$

Für $n \geqslant 3$ ist nun $u = v(r) = a/r^{n-2}$. Also ist $u(\varepsilon) = O(\varepsilon^{2-n})$ und deshalb

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u\,\partial_r\varphi\,\mathrm{d}S = O(\varepsilon).$$

Dieses Integral verschwindet also für $\varepsilon \to 0$. Für das verbleibende Integral ergibt eine Reskalierung der Koordinaten

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \varphi\,\partial_r u\,\mathrm{d}S &= a(n-2)\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\varphi}{r^{n-1}}\,\mathrm{d}S \\
&= a(n-2)\int_{\mathbb{S}^n} \varphi\circ\varepsilon\,\mathrm{d}S \\
&\to a(n-2)\omega_n\,\varphi(0),
\end{aligned}$$

wobei ω_n den Oberflächeninhalt von $\mathbb{S}^n$ bezeichnet. Ist also $a(n-2)\omega_n = 1$, so wird

$$(\Delta u)(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} u\,\Delta\varphi\,\mathrm{d}x = \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

Das heißt, u ist eine Fundamentallösung des Laplaceoperstors. — Die entsprechende Rechnung für $n = 2$ ist als Übung überlassen.

25 **Ergebnis** *Eine Fundamentallösung des Laplaceoperators auf dem $\mathbb{R}^n$ ist*

$$E = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n = 2, \\[1ex] \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|x|}, & n = 3, \\[1ex] \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geqslant 3, \end{cases}$$

wobei ω_n den Oberflächeninhalt der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. ⋊

Eine Lösung der Gleichung $\Delta u = f$ im $\mathbb{R}^3$ ist damit gegeben durch

$$u(x) = (E * f)(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(u)}{|x-u|}\,\mathrm{d}u.$$

Bemerkung Im Fall $n = 1$ hatten wir als Lösung der Gleichung $u'' = \delta$ bereits die Knickfunktion K erhalten. Es ist instruktiv, dieses Ergebnis analog zum allgemeinen Fall herzuleiten. ⊸

▪ Evolutionsgleichungen

Eine Differenzialgleichung der Form

$$u_t = Lu$$

wird auch *Evolutionsgleichung* genannt. Hier ist u eine Funktion in $n+1$ Variablen $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, von denen t als Zeitkoordinate und $x = (x_1, .., x_n)$ als Ortskoordinaten aufgefasst werden. Der partielle Ableitungsoperator L bezieht sich nur auf die Ortskoordinaten. Ein Beispiel ist die *Wärmeleitungsgleichung* $u_t = \Delta u$, auf die wir gleich zurückkommen.

Interpretieren wir

$$u(t) \coloneqq u(t, \cdot)$$

als Beschreibung eines räumlichen Zustandes zum Zeitpunkt t, so beschreibt $u_t = Lu$ dessen zeitliches Veränderungsgesetz. Wie in der Theorie der gewöhnlichen Differenzialgleichungen erhält man – unter geeigneten Voraussetzungen – eine eindeutige Lösung erst durch Angabe eines Anfangswertes. Man betrachtet also im Allgemeinen das *Anfangswertproblem*

$$u_t = Lu, \qquad u(0) = u_0. \tag{4}$$

Um auch hier eine Fundamentallösung zu finden, suchen wir nicht nach einer einzelnen Distribution auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$, sondern vielmehr nach einer geeigneten *Schar* oder *Kurve* von Distributionen auf dem $\mathbb{R}^n$.

Definition *Eine Kurve*

$$G: \ [0, \infty) \to \mathcal{D}'_n, \quad t \mapsto G(t),$$

heißt Fundamentallösung der Gleichung $u_t = Lu$, wenn sie stetig differenzierbar ist und $G' = LG$ im Distributionssinne sowie $G(0) = \delta$ gilt ⋊

Wir übergehen an dieser Stelle die Definition von *stetig* und *differenzierbar*, da es uns hier auf diese Aspekte nicht ankommt. — Ist nun G eine solche Fundamentallösung, so ist

$$u(t) = G(t) * u_0$$

eine Lösung des Anfangswertproblems (4). Denn es ist ja

$$u(0) = G(0) * u_0 = \delta * u_0 = u_0$$

und

$$u_t = G' * u_0 = (LG) * u_0 = L(G * u_0) = Lu.$$