28

Funktionentheorie

Wir betrachten in diesem Kapitel Funktionen

$$f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}.$$

Da $\mathbb{C}$ genau wie $\mathbb{R}$ einen Körper bildet, kann die Ableitung einer solchen Funktion in klassischer Weise als Grenzwert von Differenzenquotienten definiert werden, also durch

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Die elementaren Rechenregeln für Ableitungen gelten hierfür unverändert.

Es stellt sich allerdings heraus, dass die Differenzierbarkeit im Komplexen Konsequenzen hat, die weit über das hinausgehen, was im Reellen gilt. Ist die Funktion $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenziert, so ist auch

— f' stetig und wieder differenzierbar,

— f unendlich oft differenzierbar,

— f in jedem Punkt durch seine Taylorreihe darstellbar, also analytisch.

Komplex differenzierbare Funktionen werden auch *holomorphe Funktionen* genannt. Die Theorie dieser Funktionen wird aus historischen Gründen schlicht *Funktionentheorie* genannt, denn in der Anfangszeit der modernen Mathematik spielten andere Funktionen kaum eine Rolle.

In diesem Kapitel benötigen wir übrigens nicht das Lebesgueintegral. Das Cauchyintegral aus dem ersten Band reicht völlig.

28.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Da es zunächst nur um lokale Eigenschaften geht, benötigen wir keine explizite Bezeichnung des Definitionsbereiches. Wir schreiben daher kurz

$$f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

für eine Funktion f, die auf einer offenen, nichtleeren Teilmenge von $\mathbb{C}$ definiert ist. — Wir definieren die Differenzierbarkeit einer solchen Funktion in einem Punkt a in klassischer Weise über den Differenzenquotienten $_{8.1}$.

Definition *Eine Funktion $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ heißt im Punkt a komplex differenzierbar, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert die Ableitung von f im Punkt a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet. $\rtimes$

Bei beiden Grenzwerten handelt es sich um übliche Funktionsgrenzwerte. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \varepsilon, \qquad 0 < |h| < \delta.$$

Zu beachten ist aber, dass jetzt $h \in \mathbb{C}$.

Analog zum reellen Fall kann die komplexe Differenzierbarkeit auch auf folgende Weisen charakterisiert werden. Der Beweis verläuft genauso wie dort $_{8.1}$.

1 **Satz** *Für eine in einer Umgebung des Punktes a definierte Funktion $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist im Punkt a komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(a) = \lambda$.*

(ii) *Es gibt eine im Punkt a stetige Funktion $\varphi: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi(a) = \lambda$, so dass*

$$f(z) = f(a) + \varphi(z)(z - a).$$

(iii) *Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und eine im Punkt a stetige Funktion $\varepsilon: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit $\varepsilon(a) = 0$, so dass*

$$f(z) = f(a) + \lambda(z - a) + \varepsilon(z)(z - a).$$

(iv) *Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $f(z) = f(a) + \lambda(z - a) + o(z - a)$.* $\rtimes$

Genau wie in Kapitel 8 beweist man hiermit die folgenden Rechenregeln für komplexe Ableitungen.

2 **Rechenregeln** *Sind $f, g\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ im Punkt $a \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so sind es auch $f+g$, fg, und falls $g(a) \neq 0$, auch f/g, und es gelten die Summen-, Produkt- und Quotientenregeln*

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= (f'+g')(a)\\ (fg)'(a) &= (f'g+fg')(a)\\ (f/g)'(a) &= ((f'g-fg')/g^2)(a). \quad \rtimes\end{aligned}$$

3 **Kettenregel** *Sind $f\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ im Punkt a und $g\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ im Punkt $f(a)$ komplex differenzierbar, so ist $g \circ f$ im Punkt a komplex differenzierbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a). \quad \rtimes$$

Soweit die Differenzierbarkeit in einem Punkt. Nun die allgemeine Differenzierbarkeit.

Definition *Eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches komplex differenzierbar ist. Sie heißt holomorph, wenn ihre Ableitung f' in jedem Punkt stetig ist.* $\rtimes$

Wir werden bald sehen, dass jede komplex differenzierbare Funktion auch holomorph ist $_{20}$. Das heißt, die *Existenz* der Ableitung zieht bereits ihre *Stetigkeit* nach sich – was für reelle Funktionen ganz und gar nicht gilt $_{\text{A-8.34}}$. Der Begriff ›holomorph‹ wird daher oft synonym mit ›komplex differenzierbar‹ verwendet.

▷ A. Jedes Monom $z \mapsto z^n$ ist für $n \geqslant 0$ holomorph auf $\mathbb{C}$ und für $n < 0$ holomorph auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und für alle n gilt

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

B. Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten ist holomorph auf $\mathbb{C}$, mit

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}.$$

C. Die *komplexe Exponenzialfunktion*

$$\exp(z) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$$

ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit $\exp'(z) = \exp(z)$. Dies zeigen wir später $_{22}$.

D. Die komplexe Konjugation $\sigma\colon z \mapsto \bar{z}$ ist in *keinem Punkt* von $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Denn es ist

$$\sigma(z+h) = \sigma(z) + \sigma(h),$$

und $\sigma(h) = \bar{h}$ ist *nicht* $\mathbb{C}$*-linear* in h. ◁

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

Jede Funktion $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ können wir auch als eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}$ auffassen, indem wir $z = x + \mathrm{i}y$ schreiben und damit

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y)$$

als Funktion von x und y auffassen. Ist f komplex differenzierbar, so existieren auch die partiellen Ableitungen nach x und y. Der nächste Satz klärt, wie sich diese Ableitungen zueinander verhalten.

4 **Satz** *Eine Funktion $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ ist im Punkt a komplex differenzierbar genau dann, wenn sie dort reell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen die komplexe Cauchy-Riemann-Gleichung*

$$f_y = \mathrm{i} f_x \tag{1}$$

erfüllen. ⋊

⟪⟪ ⇒ Ist f komplex differenzierbar in a, so gilt mit *reellem* h

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f_x(a) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + \mathrm{i}h) - f(a)}{\mathrm{i}h} \\ &= -\mathrm{i} \lim_{h \to 0} \frac{f(a + \mathrm{i}h) - f(a)}{h} = -\mathrm{i} f_y(a). \end{aligned}$$

Also gilt (1). Mit $h = \xi + \mathrm{i}\eta$ folgt dann weiter

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + o(h) \\ &= f(a) + f_x(a)\xi + f_y(a)\eta + o(|\xi| + |\eta|). \end{aligned}$$

Also ist f in a auch reell differenzierbar.

⇐ Gilt umgekehrt (1), so schließen wir mit $h = \xi + \mathrm{i}\eta$ und der reellen Differenzierbarkeit von f umgekehrt

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f_x(a)\xi + f_y(a)\eta + o(|\xi| + |\eta|) \\ &= f(a) + f_x(a)(\xi + \mathrm{i}\eta) + o(|\xi| + |\eta|) \\ &= f(a) + f_x(a)h + o(h). \end{aligned}$$

Also ist f in a auch komplex differenzierbar mit $f'(a) = f_x(a) = -\mathrm{i} f_y(a)$. ⟫⟫

A. Für ein Monom $p \colon z \mapsto z^n = (x + \mathrm{i}y)^n$ gilt

$$p_x = nz^{n-1}, \qquad p_y = \mathrm{i}nz^{n-1} = \mathrm{i}p_x.$$

B. Für die komplexe Konjugation $\sigma \colon z \mapsto \bar{z} = x - \mathrm{i}y$ gilt

$$\sigma_x = 1, \qquad \sigma_y = -\mathrm{i} \neq \mathrm{i}\sigma_x$$

in jedem Punkt von $\mathbb{C}$. Also ist σ nirgends komplex differenzierbar.

C. Ist allgemeiner f komplex differenzierbar und nicht konstant, so ist $\bar{f}$ *nicht* komplex differenzierbar $_{\text{A-19}}$.

Üblicherweise stellt man die Cauchy-Riemann-Gleichungen mit dem Real- und Imaginärteil der Funktion f dar. Schreiben wir $f = u + \mathrm{i}v$, so können wir eine Abbildung $f \colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ identifizieren mit einer Abbildung

$$f \colon \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (u(x + \mathrm{i}y), v(x + \mathrm{i}y)). \tag{2}$$

Die komplexe Cauchy-Riemann-Gleichung

$$f_y = u_y + \mathrm{i}v_y \overset{!}{=} \mathrm{i}f_x = \mathrm{i}u_x - v_y$$

führt dann zu den reellen

5 **Cauchy-Riemann-Gleichungen** *Eine Funktion $f = u + \mathrm{i}v \colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit reellen Funktionen u und v ist im Punkt a komplex differenzierbar genau dann, wenn dort die reellen Cauchy-Riemann-Gleichungen*

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

gelten. ⋊

Bemerkung Komplexe Differenzierbarkeit impliziert also reelle Differenzierbarkeit. Die Umkehrung gilt jedoch für eine Abbildung (2) nur, wenn die reellen Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt sind. Dies ist eine ganz wesentliche Einschränkung. Wie wir bald sehen werden, folgt hieraus die Existenz aller Ableitungen. Insbesondere gilt dann zum Beispiel

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$
$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xy} - u_{yx} = 0.$$

Das heißt, Real- und Imaginärteil einer komplex differenzierbaren Funktion sind notwendigerweise *harmonische Funktionen.* ⊸

Es folgen noch zwei Sätze über die Konstanz komplex differenzierbarer Funktionen. Der erste entspricht dem von reellen Funktionen her Gewohntem.

6 **Satz** *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar auf einem wegzusammenhängenden Definitionsbereich Ω. Dann ist f konstant genau dann, wenn $f' = 0$ auf ganz Ω.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist f auf Ω auf komplex differenzierbar mit $f' = 0$, so ist f auf Ω als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auch reell differenzierbar $_4$ mit $Df = 0$. Die Behauptung folgt somit aus dem entsprechenden reellen Satz $_{18.10}$. Die Umkehrung ist trivial. ⟩⟩⟩⟩⟩

7 **Satz** *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar auf einem wegzusammenhängenden Definitionsbereich Ω. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist konstant.*
(ii) *$\Re f$ ist konstant.*
(iii) *$\Im f$ ist konstant.*
(iv) *$|f|$ ist konstant.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist klar, dass (i) alle übrigen Aussagen impliziert. Um alles Andere zu zeigen, sei $f = u + \mathrm{i}v$.

(ii) ⇒ (i) Ist $\Re f$ konstant, so ist $u_x \equiv 0$ und $u_y \equiv 0$. Aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen folgt dann auch $f' \equiv 0$ und damit die Behauptung $_6$.

(iii) ⇒ (i) Analog.

(iv) ⇒ (i) Nach Annahme ist auch $|f|^2 = u^2 + v^2 = c$ konstant. Differenziation ergibt dann $uu_x + vv_x \equiv 0$ und $uu_y + vv_y \equiv 0$. Mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen folgt hieraus

$$uv_y + vv_x \equiv 0, \qquad -uv_x + vv_y \equiv 0.$$

Multiplikation mit u respektive v und Addition ergibt

$$(u^2 + v^2)v_y = cv_y \equiv 0.$$

Analog erhält man $(u^2 + v^2)v_x = cv_x \equiv 0$. Ist nun $c = 0$, so ist sowieso $f \equiv 0$. Andernfalls folgt wieder mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen $f' \equiv 0$ und damit die Konstanz von f. ⟩⟩⟩⟩⟩

28.2 Der Cauchysche Integralsatz

Ein wichtiges Hilfsmittel der Funktionentheorie sind Kurvenintegrale. Diese erklären wir analog zu Kurvenintegrale reeller 1-Formen $_{18.3}$.

Definition *Sei $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve im Definitionsbereich von f. Dann heißt*

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z \coloneqq \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t$$

das Kurvenintegral von f längs γ.

Das rechts stehende Integral einer komplexwertigen Funktion wird natürlich komponentenweise gebildet.

Diese Definition des Kurvenintegrals ist *natürlich* in dem Sinne, dass man sie auch als Grenzwert von entsprechenden approximierenden Summen erhält. Die Details sind exakt dieselben wie im reellen Fall $_{18.6}$ und sollen hier nicht wiederholt werden. Ebenso spielen die, eventuell auftretenden, endlich vielen Sprungpunkte der Ableitung von γ für das Integral keine Rolle und müssen nicht explizit berücksichtigt werden.

Schreiben wir $f = u + \mathrm{i}v$ und $z = x + \mathrm{i}y$ als Funktion von x und y, so wird $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$, und wir erhalten die reelle Darstellung

$$\begin{aligned} \int_\gamma f \,\mathrm{d}z &= \int_\gamma (u + \mathrm{i}v)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) \\ &= \int_\gamma (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_\gamma (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y). \end{aligned} \tag{3}$$

8 A. Für die komplexe Verbindungsstrecke $[a, a+h]$ von a nach $a + h$ gilt

$$\int_{[a,a+h]} \mathrm{d}z = h.$$

B. Besitzt f eine Stammfunktion F, so ist

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t = F \circ \gamma\Big|_a^b = F\Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}$$

für jede im Definitionsbereich von f verlaufende Kurve γ. Ist γ geschlossen, so verschwindet dieses Integral.

C. Aufgrund des vorangehenden Beispiels ist

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}} = 0, \qquad n \neq 0,$$

für jede geschlossene Kurve γ, die nicht durch den Punkt a verläuft.

D. Andererseits gilt

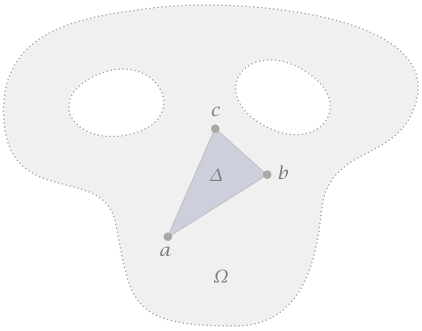
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}$$

für jede Kreislinie $\gamma : t \mapsto a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ um a mit positivem Radius r.

Für Kurvenintegrale benötigen wir noch folgende

Abb 1

Dreieck Δ im Definitionsbereich Ω



9 **Standardabschätzung** *Ist* $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ *entlang der Kurve* γ *stetig, so gilt*

$$\left| \int_\gamma f \,\mathrm{d}z \right| \leqslant L(\gamma) \, \|f\|_\gamma . \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist ja

$$\left| \int_\gamma f \,\mathrm{d}z \right| \leqslant \int_a^b |f(\gamma(t))| \, |\dot{\gamma}(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \,\mathrm{d}t .$$

Das Integral ist die Länge der Kurve γ, und das Maximum von $|f|$ über alle Punkte in der Spur von γ bezeichnen wir wie üblich mit $\|f\|_\gamma$. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Integralsätze

10 **Integralsatz von Cauchy** *Ist* $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph, so ist*

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = 0$$

für jede im Definitionsbereich von f *nullhomotope und stückweise stetig differenzierbare Kurve* γ. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte die Darstellung (3) des Kurvenintegrals. Aufgrund der Cauchy-Riemann-Gleichungen $_5$. gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(v \,\mathrm{d}y - u \,\mathrm{d}x) &= (v_x + u_y) \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0, \\ \mathrm{d}(v \,\mathrm{d}x + u \,\mathrm{d}y) &= (u_x - v_y) \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0. \end{aligned}$$

Also sind beide 1-Formen *geschlossen*, und die entsprechenden Integrale über geschlossene nullhomotope Wege sind Null $_{18.16,\, 18.20}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Tatsächlich benötigen wir diesen Satz nicht, da wir gleich ein stärkeres Resultat $_{11}$ direkt beweisen.

- **Das Lemma von Goursat**

Tatsächlich wird im Cauchyschen Integralsatz die Stetigkeit der Ableitung nicht benötigt. Es reicht bereits die komplexe Differenzierbarkeit. Grundlage hierfür ist das

11 **Lemma von Goursat** *Ist $f\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}z = 0$$

für jedes im Definitionsbereich von f enthaltene Dreieck Δ. ⋊

Das *gesamte* Dreieck Δ muss im Definitionsbereich enthalten sein, und das Integral ist über die Verbindungsstrecken $[a,b]$, $[b,c]$, $[c,a]$ der Ecken a, b, c von Δ zu bilden. Eine Änderung der Reihenfolge der drei Punkte ändert lediglich die Orientierung des Randes und damit das Vorzeichen des Integrals. Somit hat dies keinen Einfluss auf die Behauptung des Lemmas.

⟨⟨⟨⟨ Wir zerlegen das Dreieck Δ durch Verbinden seiner Seitenmittelpunkte in vier kongruente Teildreiecke $\Delta^1, .., \Delta^4$ wie in Abbildung 2. Werden alle Dreieckseiten gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, so heben sich die Wegintegrale über die hinzu gekommenen inneren Seiten auf, und es gilt

$$\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}z = \sum_{1 \leqslant i \leqslant 4} \int_{\partial\Delta^i} f \,\mathrm{d}z.$$

Sei Δ_1 dasjenige Teildreieck, oder eines derjenigen Teildreiecke, mit dem betragsmäßig größten Randintegral, also

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f \,\mathrm{d}z \right| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} \left| \int_{\partial\Delta^i} f \,\mathrm{d}z \right|.$$

Dann gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}z \right| \leqslant 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f \,\mathrm{d}z \right|.$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhalten wir eine fallende Folge von Dreiecken $\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset ..$ derart, dass

$$\left| \int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}z \right| \leqslant 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f \,\mathrm{d}z \right|, \qquad n \geqslant 0.$$

Der Durchschnitt all dieser Dreiecke ist ein Punkt $a \in \Delta$. Da f in a komplex differenzierbar ist, gilt

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \varepsilon(z)(z-a)$$

mit einer im Punkt a verschwindenden stetigen Funktion ε. Die Dreiecksintegrale über die affine Funktion $z \mapsto f(a) + f'(a)(z-a)$ verschwinden sämtlich, da

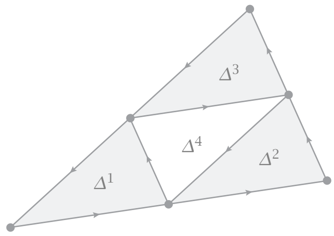


Abb 2

Zerlegung des Dreiecks Δ in vier kongruente Teildreiecke

diese eine Stammfunktion besitzt 8. Es gilt daher

$$\int_{\partial\Delta_n} f\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta_n} \varepsilon(z)(z-a)\,\mathrm{d}z, \qquad n \geqslant 0.$$

Für den Umfang dieser Dreiecke gilt $U(\Delta_n) = 2^{-n}U(\Delta)$, ebenso ist für $z \in \partial\Delta_n$

$$|z-a| \leqslant U(\Delta_n) = 2^{-n}U(\Delta).$$

Also gilt für das n-te Dreieck 9

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta_n} f\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{\partial\Delta_n} \varepsilon(z)(z-a)\,\mathrm{d}z\right| \\ &\leqslant U(\Delta_n)\max_{z\in\Delta_n}|\varepsilon(z)|\,|z-a| \leqslant 4^{-n}U(\Delta)^2\max_{z\in\Delta_n}|\varepsilon(z)|\,.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt damit

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f\,\mathrm{d}z\right| \leqslant U(\Delta)^2\max_{z\in\Delta_n}|\varepsilon(z)|$$

für alle $n \geqslant 0$. Wegen $\max_{z\in\Delta_n}|\varepsilon(z)| \to 0$ für $n \to \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen Null, und wir erhalten die Behauptung. ⟫⟫⟫

12 **Lemma** *Sei Ω sternförmig mit Zentrum a. Ist f stetig auf Ω und*

$$\int_{\partial\Delta} f\,\mathrm{d}z = 0$$

für jedes Dreieck Δ in Ω, so definiert

$$F(z) \coloneqq \int_{[a,z]} f\,\mathrm{d}w$$

eine Stammfunktion F von f auf Ω. ⋊

⟪⟪⟪ Definiere F wie angegeben und betrachte beliebige Punkte $z, z+h \in \Omega$. Das Dreieck Δ mit den Eckpunkten $a, z, z+h$ ist ganz in Ω enthalten, und nach Voraussetzung gilt

$$0 = \int_{\Delta} f\,\mathrm{d}w = \int_{[a,z]} f\,\mathrm{d}w + \int_{[z,z+h]} f\,\mathrm{d}w + \int_{[z+h,a]} f\,\mathrm{d}w.$$

Aufgrund der Definition von F ist daher

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f\,\mathrm{d}w.$$

Andererseits ist

$$f(z)h = \int_{[z,z+h]} f(z)\,\mathrm{d}w,$$

denn $f(z)$ ist im Integral eine Konstante. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z) - f(z)h}{h}\right| = \left|\int_{[z,z+h]} \frac{f(w) - f(z)}{h}\,\mathrm{d}w\right| \leqslant \max_{w\in[z,z+h]} |f(w) - f(z)|.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f verschwindet der letzte Ausdruck für $h \to 0$. Also ist F in z komplex differenzierbar, und es gilt $F'(z) = f(z)$. ⟫⟫

Mit den beiden letzten Lemmata erhalten wir nun den Cauchysche Integralsatzes *ohne* Annahme der Stetigkeit der Ableitung.

13 **Satz von Goursat** *Ist $f\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so gilt*

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = 0$$

für jede im Definitionsbereich von f nullhomotope und stückweise stetig differenzierbare Kurve γ. ⋊

⟪⟪ Aufgrund des letzten Lemmas besitzt eine komplex differenzierbare Funktion f lokal immer eine Stammfunktion F. Also ist $f\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}F$ lokal exakt. Die Behauptung folgt dann mit dem entsprechenden Satz für reelle 1-Formen $_{18.20}$ mit dem gleichen Argument wie im Beweis des Cauchyschen Integralsatzes $_{10}$. ⟫⟫

14 **Satz** *Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.*

(i) *Sind γ_0 und γ_1 in Ω homotope stückweise stetig differenzierbare Kurven, so gilt*

$$\int_{\gamma_0} f\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}z.$$

(ii) *Ist Ω einfach zusammenhängend, so ist das Integral über $f\,\mathrm{d}z$ wegunabhängig, und für jedes $a \in \Omega$ definiert*

$$F(z) := \int_a^z f(w)\,\mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega,$$

eine Stammfunktion F von f. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Es ist $\gamma_1 - \gamma_0$ nullhomotop und deshalb

$$\int_{\gamma_1 - \gamma_0} f \, \mathrm{d}z = 0.$$

(ii) Ist Ω einfach zusammenhängend, so gilt (i) für *beliebige* Wege mit gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt. Also können wir eine Funktion F durch Integration entlang eines beliebigen Weges von a nach z definieren. Lokal unterscheidet sich diese Funktion von derjenigen im Satz von Goursat nur durch eine additive Konstante. Daher ist F eine Stammfunktion von f. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Der Hauptzweig des Logarithmus

Als Beispiel für die Definition einer Stammfunktion mittels Kurvenintegralen definieren wir den Hauptzweig des komplexen Logarithmus. Den *reellen* Logarithmus, den wir zur Unterscheidung hier mit ›ln‹ bezeichnen, erhalten wir als Stammfunktion von t^{-1} durch

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad x > 0.$$

Die Funktion $1/z$ ist aber ebenso auf $\mathbb{C}^*$ erklärt und holomorph. Allerdings ist $\mathbb{C}^*$ nicht einfach zusammenhängend, und wegen 8

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi \mathrm{i}$$

kann $1/z$ dort auch keine Stammfunktion besitzen. Wir beschränken uns deshalb auf die *geschlitzte komplexe Ebene*

$$\mathbb{C}_- \coloneqq \mathbb{C} \setminus \{z : \Im z = 0 \wedge \Re z \leqslant 0\}.$$

Diese ist offensichtlich einfach zusammenhängend, und die Funktion

$$L : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}, \quad L(z) = \int_1^z \frac{\mathrm{d}w}{w}$$

auf ihr wohldefiniert 14. Diese Funktion ist komplex differenzierbar mit Ableitung $L'(z) = 1/z$, und wegen der Stetigkeit der Ableitung auch holomorph. Außerdem ist $L \,|\, (0, \infty) = \ln$. Somit setzt L den reellen Logarithmus holomorph auf $\mathbb{C}_-$ fort.

Diese Funktion ist auf $\mathbb{C}_-$ die Umkehrfunktion der komplexen Exponenzialfunktion. Denn nehmen wir ihre Differenzierbarkeit vorweg, so ist

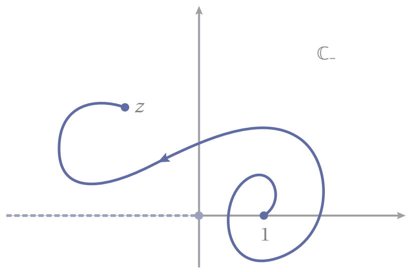
$$(z\mathrm{e}^{-L})' = \mathrm{e}^{-L} + z\mathrm{e}^{-L}(-1/z) = \mathrm{e}^{-L} - \mathrm{e}^{-L} = 0.$$

Also ist $z\mathrm{e}^{-L}$ konstant, und Auswerten bei 1 ergibt $z\mathrm{e}^{-L} \equiv 1$, also $\mathrm{e}^L = z$. Es gilt somit

$$\exp \circ L = id_{\mathbb{C}_-}.$$

Abb 3

Beliebiger Integrationsweg im Logarithmusintegral



Dies rechtfertigt folgende

15 **Definition** *Die holomorphe Funktion*

$$\log : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}, \quad \log z \coloneqq \int_1^z \frac{\mathrm{d}w}{w}$$

heißt Hauptzweig des komplexen Logarithmus. ⋊

Dieses Integral können wir auch berechnen. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}_-$ besitzt eine eindeutige *Polardarstellung* 9.19

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \qquad r = |z|, \quad \varphi = \arg z \in (-\pi, \pi).$$

Integrieren von 1 nach r auf der reellen Achse und von $r = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$ nach $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ auf dem Kreissegment $t \mapsto r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $0 \leqslant t \leqslant \varphi$ wie in Abbildung 4 ergibt

$$\log z = \int_1^r \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \ln r + \int_0^\varphi \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \ln r + \mathrm{i}\varphi.$$

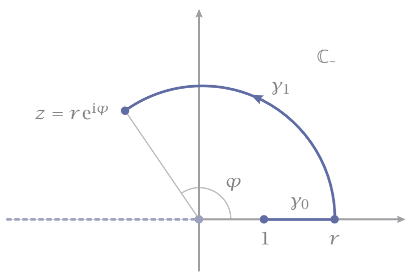
Für den Hauptzweig des komplexen Logarithmus gilt also

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

Insbesondere ist $\log \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{i}\varphi$ für $|\varphi| < \pi$.

Abb 4

Spezieller Integrationsweg im Logarithmusintegral



▪ Berechnung reeller Integrale

Der Cauchysche Integralsatz hilft auch bei der Berechnung mancher reeller Integrale. Als erstes Beispiel betrachten wir

$$\int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t.$$

Dies ist der negative Imaginärteil des *Fresnelintegrals*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t.$$

Wir betrachten dazu das Integral der auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$$

über den Rand des Dreiecks mit den Ecken 0, r und $r + \mathrm{i}r$. Mit den Bezeichnungen in Abbildung 5 gilt dann wegen des Integralsatzes [14]

$$\int_{\gamma_0} f \,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f \,\mathrm{d}z.$$

Für das diagonale Randstück γ_0 gilt mit $\gamma_0(t) = t + \mathrm{i}t$ und $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_0} f \,\mathrm{d}z &= \lim_{r\to\infty} \int_0^r \mathrm{e}^{-(t+\mathrm{i}t)^2} (1+\mathrm{i}) \,\mathrm{d}t \\ &= (1+\mathrm{i}) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2} \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Auf dem vertikalen Randstück γ_2 haben wir mit $z = r + \mathrm{i}t$ die Abschätzung

$$\left| \mathrm{e}^{-(r+\mathrm{i}t)^2} \right| = \mathrm{e}^{-r^2+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-r^2+rt}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant r.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma_2} f \,\mathrm{d}z \right| &\leqslant \int_0^r |f(r+\mathrm{i}t)| \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^r \mathrm{e}^{-r^2+rt} \,\mathrm{d}t = \left.\frac{\mathrm{e}^{-r^2+rt}}{r}\right|_0^r \leqslant \frac{1}{r},\end{aligned}$$

und dieses Integral verschwindet für $r \to \infty$. Für das horizontale Randstück γ_0 gilt schließlich [21.18]

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_1} f \,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

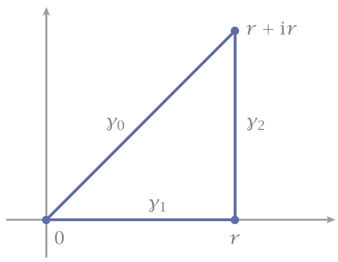
Zusammengefasst erhalten wir

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

28.14

Abb 5

Integrationswege im Fresnelintegral



Daraus folgt

$$\int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t = -\Im \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2} \,\mathrm{d}t = -\Im \frac{1}{1+\mathrm{i}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Viele weitere Beispiele für die Berechnung reeller Integrale ergeben sich später im Zusammenhang mit dem Residuensatz – siehe Abschnitt 9.

28.3
Die Cauchysche Integralformel

Eine direkte Konsequenz des Cauchyschen Integralsatzes ist die Cauchysche Integralformel. Sei dazu

$$D_r(a) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \; |z-a| < r\}$$

die *offene Kreisscheibe* mit Radius $r > 0$ um den Punkt $a \in \mathbb{C}$. Ihren Abschluss und Rand bezeichnen wir mit $\bar{D}_r(a)$ respektive $\partial D_r(a)$. Diesen Rand betrachten wir immer als einfach gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene geschlossene Kurve mit der Parametrisierung $\gamma(t) = a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Somit gilt beispielsweise 8

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D_r(a)} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \tag{4}$$

für alle $r > 0$.

16 **Cauchysche Integralformel** *Sei f komplex differenzierbar. Ist der Abschluss der Kreisscheibe $D_r(a)$ im Definitionsbereich von f enthalten, so gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w, \qquad z \in D_r(a). \quad ⋊$$

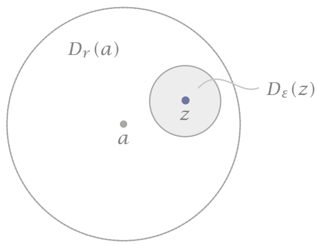


Abb 6

Zum Beweis der Cauchyschen Integralformel

Bemerkungen *a.* Die *abgeschlossene* Kreisscheibe $\bar{D}_r(a)$ muss im Definitionsbereich von f enthalten sein, damit f auf deren Rand stetig und das Kurvenintegral definiert ist.

b. Für $z \in \partial D_r(a)$ ist das Integral nicht definiert.

c. Für $z \notin \bar{D}_r(a)$ ist der Integrand komplex differenzierbar auf einer Umgebung von $\bar{D}_r(a)$. Das Integral *verschwindet* daher aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes [10], und die Formel gilt *nicht mehr.*

Mit $z \in D_r(a)$ ist $D_\varepsilon(z) \subset D_r(a)$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$, und die Randkurven beider Kreisscheiben sind frei homotop in einem Gebiet, auf dem die Funktion $f(w)/(w-z)$ komplex differenzierbar in w ist. Also gilt für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ [14]

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \to 0$ erhalten wir

$$\int_{\partial D_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi\mathrm{i}\, f(z).$$

Das ergibt die Behauptung.

Beispiel Mit $z^2 - 2z = z(z-2)$ erhält man

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D_1(0)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 2z} = \frac{1}{z-2}\bigg|_{z=0} = -\frac{1}{2}$$

und

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D_1(2)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 2z} = \frac{1}{z}\bigg|_{z=2} = \frac{1}{2}.$$

Bemerkenswert an der Cauchyschen Integralformel ist, dass die Funktionswerte von f im Innern einer Kreisscheibe nur von den Werten von f auf deren Rand abhängen. Auf diesem Rand muss f nur stetig sein, damit das Cauchyintegral erklärt ist. Zudem hängt f vom Punkt z allein durch den *Cauchykern* $(w-z)^{-1}$ ab. Daher übertragen sich Regularitätseigenschaften dieses Kerns auf die durch ihn definierte Funktion – ganz so wie bei der Faltungsoperation $_{24.21}$. Deshalb definiert auch *jede stetige Funktion* $\varphi\colon \partial D_r(a) \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) \coloneqq \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D_r(a)} \frac{\varphi(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

eine auf $D_r(a)$ *holomorphe Funktion* f $_{\text{A-21}}$.

Alles Weitere in diesem Abschnitt ist eine Konsequenz der Cauchyschen Integralformel. Schreiben wir insbesondere

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D_r(z)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

und parametrisieren den Rand in der üblichen Weise, so erhalten wir die

17 **Mittelwerteigenschaft** *Sei f komplex differenzierbar. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t,$$

falls die Kreisscheibe $\bar{D}_r(z)$ im Definitionsbereich von f enthalten ist. ⋊

Ist also f komplex differenzierbar, so ist $f(z)$ das *arithmetische Mittel* über den Rand jeder Kreisscheibe mit Mittelpunkt z, auf der f definiert ist. Eine ähnliche Eigenschaft im Reellen werden wir bei den harmonischen Funktionen wiederfinden $_{30}$. Hieraus ergibt sich bereits der

18 **Fundamentalsatz der Algebra** *Jedes nicht-konstante Polynom besitzt eine komplexe Nullstelle.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei p ein nicht-konstantes Polynom. Besitzt p keine Nullstelle, so ist $q = 1/p$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ erklärte, holomorphe Funktion. Für diese gilt aufgrund der Mittelwerteigenschaft $_{17}$

$$q(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\,\mathrm{d}t$$

für alle $r > 0$. Das letzte Integral konvergiert für $r \to \infty$ aber gegen 0, ein Widerspruch zu $q(0) = 1/p(0) \neq 0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Analytizität

Wie bereits bemerkt, besitzt der Cauchykern $(w-z)^{-1}$ eine Potenzreihenentwicklung in z. Dies führt zu einer entsprechenden Potenzreihenentwicklung der durch das Cauchyintegral dargestellten Funktion.

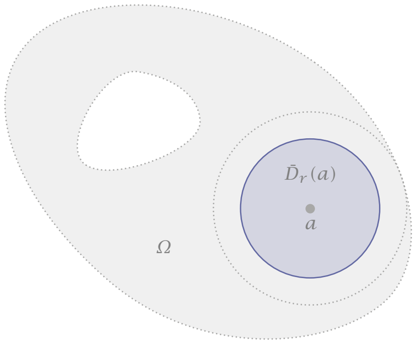


Abb 7
Zur Potenzreihendarstellung

19 **Potenzreihendarstellung** *Ist f komplex differenzierbar, so wird f um jeden Punkt a seines Definitionsbereiches durch eine Potenzreihe dargestellt. Diese Reihe konvergiert mindestens auf der größtmöglichen, ganz im Definitionsbereich von f enthaltenen offenen Kreisscheibe um a.* ⋊

⟪⟪ Sei $\bar D_r(a)$ im Definitionsbereich von f enthalten. Für $z \in D_r(a)$ und $w \in \partial D_r(a)$ ist

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} = q < 1.$$

Für jedes solche z konvergiert daher die geometrische Reihe

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n, \tag{5}$$

gleichmäßig auf $\partial D_r(a)$. In der Cauchyschen Integralformel $_{16}$ können wir somit Integration und Summation vertauschen $_{11.8}$ und erhalten

$$\begin{aligned} 2\pi \mathrm{i}\, f(z) &= \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w \\ &= \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(w)}{w-a} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \mathrm{d}w \\ &= \sum_{n \geqslant 0} (z-a)^n \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, \mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{6}$$

Somit wird f auf $D_r(a)$ durch eine Potenzreihe dargestellt.

Da dies für jede abgeschlossene Kreisscheibe $\bar D_r(a)$ im Definitionsbereich von f gilt, konvergiert diese Reihe auch auf der größten offenen dort enthaltenen Kreisscheibe um a. ⟫⟫

Jede komplex differenzierbare Funktion kann also in eine Potenzreihe entwickelt werden. Die Umkehrung gilt erst recht. Eine komplexe Potenzreihe

$$\phi(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-a)^n$$

mit positivem Konvergenzradius r definiert auf $D_r(a)$ eine unendlich oft komplex differenzierbare Funktion ϕ, deren Ableitungen man durch gliedweises Differenzieren erhält, und deren Taylorreihe im Punkt a die Potenzreihe selbst ist. Dies haben wir im Reellen bewiesen ??, aber der Beweis gilt Wort für Wort auch im Komplexen.

Lokal sind also komplex differenzierbare Funktionen nichts anderes als Funktionen, die durch konvergente Potenzreihen beschrieben werden. Solche Funktionen nennt man *analytisch*.

Definition *Eine Funktion $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ heißt analytisch, wenn um jeden Punkt im Definitionsbereich von f eine Kreisscheibe existiert, auf der f durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt wird.* ⋊

20 **Analytizitätssatz** *Für eine Funktion $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:*
- (i) *f ist komplex differenzierbar.*
- (ii) *f ist holomorph.*
- (iii) *f ist unendlich oft differenzierbar.*
- (iv) *f ist analytisch.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) ⇒ (iv) Dies ist der Satz über die Potenzreihenentwicklung 19.
(iv) ⇒ (iii) Dies ist der Potenzreihensatz ??.
(iii) ⇒ (ii) ⇒ (i) Dies ist offensichtlich. ⟩⟩⟩⟩⟩

Somit ist ›komplex differenzierbar‹ gleichbedeutend mit ›holomorph‹ und ›analytisch‹. Für lediglich reell differenzierbare Funktionen dagegen sind keine zwei dieser Begriffe äquivalent!

Den Zusammenhang mit *stetigen* Funktionen stellt der folgende Satz her.

21 **Satz von Morera** *Für eine Funktion $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:*
- (i) *f ist komplex differenzierbar.*
- (ii) *f ist stetig und*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jedes im Definitionsbereich von f enthaltene Dreieck Δ. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) ⇒ (ii) Das ist das Lemma von Goursat 11.

(ii) ⇒ (i) Aufgrund der Annahme besitzt f lokal eine komplex differenzierbare Stammfunktion F 12. Diese Stammfunktion ist aufgrund des vorangehenden Satzes 20 analytisch. Also ist es auch ihre Ableitung, $F' = f$. ⟩⟩⟩⟩⟩

22 ▷ *Die komplexe Exponenzial-, Sinus- und Cosinusfunktion* sind definiert durch die Reihen

$$\exp(z) \coloneqq \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$$

sowie

$$\sin(z) \coloneqq \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(z) \coloneqq \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Sie konvergieren auf ganz $\mathbb{C}$ – das zeigt man wie im Reellen – und setzen die entsprechenden reellen Funktion holomorph fort. Wie im Reellen gilt auch hier

$$\exp' = \exp, \qquad \sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Ebenso gilt die Eulersche Gleichung auch für komplexe Argumente $_{9.5}$, also

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z). \qquad ◁$$

23 **Satz** *Für die Exponenzialfunktion gilt die Funktionalgleichung*

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

Insbesondere besitzt exp *keine Nullstelle.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für die Hilfsfunktion $\phi(z) = E(z+w)E(-z)$ gilt

$$\phi'(z) = E(z+w)E(-z) - E(z+w)E(z) = 0.$$

Also ist ϕ konstant, und Auswerten bei $z = 0$ ergibt $\phi(z) = E(w)$, also

$$E(z+w)E(-z) = E(w).$$

Mit $w = 0$ erhalten wir $E(z)E(-z) = 1$. Also verschwindet E in keinem Punkt, und es ist $E(-z) = E(z)^{-1}$. Zusammen mit der vorangehenden Gleichung ergibt dies die Funktionalgleichung. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷ Mit $z = x + \mathrm{i}y$ erhalten wir insbesondere eine Darstellung der komplexen Exponenzialfunktion durch reelle Funktionen,

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y). \qquad ◁$$

■ Ableitungen

Die Cauchysche Integralformel stellt eine Funktion f durch ein parameterabhängiges Integral dar. Durch Differenziation unter dem Integral erhalten wir daraus entsprechende Formeln für die Ableitungen von f.

24 **Cauchysche Integralformel für Ableitungen** *Sei f holomorph. Ist der Abschluss von $D_r(a)$ im Definitionsbereich von f enthalten, so gilt für alle $n \geqslant 0$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w, \qquad z \in D_r(a). \quad \rtimes$$

Bemerkungen *a.* Für $n = 0$ ist dies die ursprüngliche Integralformel $_{16}$.
b. Dies sind genau die Koeffizienten, die wir in der Potenzreihenentwicklung (6) erhalten haben. ⊸

⟪⟪ Auf die Cauchysche Integralformel können wir den Satz über das Differenzieren unter dem Integral $_{14.23}$ anwenden, da der Integrand und alle seine z-Ableitungen auf der Randkurve stetig sind. Somit gilt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w$$

für jeden Punkt $z \in D_r(a)$, und weiter

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^3}\,\mathrm{d}w.$$

Alles Weitere folgt mit Induktion. ⟫⟫

Eine unmittelbare Konsequenz sind Abschätzungen der Ableitungen holomorpher Funktionen durch die Funktion selbst.

25 **Cauchysche Ungleichungen** *Sei f holomorph. Ist der Abschluss von $D_r(a)$ im Definitionsbereich von f enthalten, so gilt*

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\partial D_r(a)}, \qquad n \geqslant 0.$$

Ist insbesondere f gleichmäßig auf einem Gebiet Ω beschränkt, so gilt

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{R^n} \|f\|_{\Omega}, \qquad n \geqslant 0,$$

für jedes $a \in \Omega$ mit $R = \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$. $\rtimes$

⟪⟪ Die Länge der Randkurve von $D_r(a)$ ist $2\pi r$. Mit der Standardabschätzung für Kurvenintegrale $_9$ und der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen $_{24}$ folgt daher

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &\leqslant \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \right| \\ &\leqslant \frac{n!}{2\pi} |\partial D_r(a)| \max_{w \in \partial D_r(a)} \left| \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \right| = \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\partial D_r(a)}. \end{aligned}$$

Ist f gleichmäßig auf einem Gebiet Ω beschränkt, so können wir $\|f\|_{\partial D_r(a)}$ durch $\|f\|_\Omega$ abschätzen und erhalten

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{r^n}\,\|f\|_\Omega$$

für alle $r < R$. Der Grenzübergang $r \nearrow R$ ergibt die letzte Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Der Satz von Liouville

Definition *Eine auf ganz $\mathbb{C}$ erklärte und holomorphe Funktion heißt ganze Funktion.* ⋊

Eine ganze Funktion besitzt in jedem Punkt eine Potenzreihenentwicklung, und diese konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$ [19]. Die Vermutung liegt daher nahe, dass eine solche Funktion ähnlich wie ein Polynom entweder konstant oder nicht beschränkt ist. Dies ist genau der

26 **Satz von Liouville** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist f ganz und beschränkt, so ist $\|f\|_{\mathbb{C}} = M < \infty$. Aus der Cauchyschen Ungleichung [25] für $n = 1$ folgt dann

$$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{r}$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $r > 0$. Da wir r beliebig groß wählen können, ist also $f'(z) = 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Also ist f konstant. ⟩⟩⟩⟩⟩

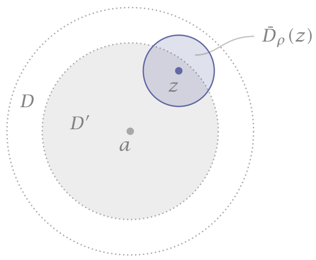
▪ Der Satz von Weierstraß

Zu den grundlegenden Sätzen gehört auch der Satz von Weierstraß über lokal gleichmäßig konvergente Folgen holomorpher Funktionen. Dabei heißt eine Folge (f_n) holomorpher Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich *lokal gleichmäßig konvergent*, wenn jeder Punkt im Definitionsbereich eine Umgebung besitzt, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert.

27 **Satz von Weierstraß** *Sei (f_n) eine lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich Ω. Dann ist auch die Grenzfunktion f holomorph auf Ω. Außerdem konvergiert die Ableitungsfolge (f_n') ebenfalls lokal gleichmäßig gegen f'.* ⋊

Abb 8

Zum Beweis des Satzes von Weierstraß



⟪ Sei f die punktweise Grenzfunktion der Folge (f_n) und $a \in \Omega$. Nach Voraussetzung konvergiert (f_n) gleichmäßig auf einer hinreichend kleinen Kreisscheibe D um a gegen f, es gilt also

$$\|f_n - f\|_D \to 0.$$

Also ist f dort stetig, und für jedes Dreieck Δ in dieser Kreisscheibe gilt

$$\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta} \lim f_n \,\mathrm{d}z = \lim \int_{\partial\Delta} f_n \,\mathrm{d}z = 0.$$

Mit dem Satz von Morera 21 ist also f ebenfalls holomorph auf D. Da jeder Punkt in Ω eine solche Umgebung besitzt, ist f holomorph auf ganz Ω.

Betrachte nun die erste Ableitung auf einer kleineren Kreisscheibe $D' \subset D$. Es existiert ein $\rho > 0$, so dass für jedes $z \in D'$ die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{D}_\rho(z)$ in D enthalten ist. Aufgrund der Cauchyungleichung 25 gilt daher

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leqslant \frac{1}{\rho}\|f_n - f\|_{\partial D_\rho(z)} \leqslant \frac{1}{\rho}\|f_n - f\|_D .$$

Da dies für jedes $z \in D'$ gilt, folgt

$$\|f_n' - f'\|_{D'} \leqslant \frac{1}{\rho}\|f_n - f\|_D .$$

Letzteres konvergiert für $n \to \infty$ gegen Null, was die letzte Behauptung ergibt. ⟫

▪ Harmonische Funktionen

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ und harmonischen Funktionen auf $\mathbb{R}^2$. Dies sind bekanntlich zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u\colon \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\Delta u \coloneqq u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ in der üblichen Weise, so erhalten wir folgenden

28 **Satz** *Ist f holomorph, so sind $\Re f$ und $\Im f$ harmonisch.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Eine holomorphe Funktion ist zweimal stetig differenzierbar. Aus der Cauchy-Riemann-Gleichung 4 $f_y = \mathrm{i} f_x$ und dem Lemma von Schwarz 14.22 folgt daher

$$f_{yy} = \mathrm{i} f_{yx} = \mathrm{i} f_{xy} = \mathrm{i}(\mathrm{i} f_{xx}) = -f_{xx}.$$

Also ist $\Delta f = 0$. Wegen der Linearität von Δ gilt dies dann auch für den Real- und Imaginärteil von f. ⟩⟩⟩⟩⟩

Zu diesem Satz gilt folgende Umkehrung.

29 **Satz** *Sei $u : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Dann existiert auf jeder Kreisscheibe D im Definitionsbereich von f eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit*

$$u = \Re f.$$

Ist der Definitionsbereich Ω von f einfach zusammenhängend, so existiert eine solche holomorphe Funktion auf ganz Ω. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei u auf der Kreisscheibe D harmonisch. Dann ist $\alpha = u_x \, \mathrm{d}y - u_y \, \mathrm{d}x$ geschlossen auf D, denn

$$\mathrm{d}\alpha = u_{xx} \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - u_{yy} \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = (u_{xx} + u_{yy}) \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0.$$

Somit besitzt α eine Stammfunktion $v : D \to \mathbb{R}$, es gilt also

$$\mathrm{d}v = v_x \, \mathrm{d}x + v_y \, \mathrm{d}y = u_x \, \mathrm{d}y - u_y \, \mathrm{d}x.$$

und damit $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Das aber bedeutet, dass die Funktion

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad f = u + \mathrm{i}v$$

auf D die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt. Also ist f komplex differenzierbar und damit auch holomorph. Und offensichtlich gilt $u = \Re f$.

Ist Ω einfach zusammenhängend., so existiert eine solche Stammfunktion v auf ganz Ω. ⟩⟩⟩⟩⟩

30 **Korollar** *Ist $u : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, so ist u unendlich oft differenzierbar. Außerdem besitzt u die Mittelwerteigenschaft*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \, \mathrm{d}t$$

für jedes $r > 0$, für das der Abschluss von $D_r(a)$ im Definitonsbereich von f enthalten ist. ⋊

Sei $a \in \Omega$ und $\bar{D}_r(a) \subset \operatorname{dom}(f)$. Aufgrund des letzten Satzes existiert in einer Umgebung von $\bar{D}_r(a)$ eine holomorphe Funktion f so, dass

$$u = \Re f.$$

Mit f ist auch u unendlich oft differenzierbar. Ferner besitzt f die Mittelwerteigenschaft, es ist also

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t.$$

Der Realteil dieser Gleichung ist genau die Mittelwerteigenschaft von u.

Bemerkung Es gilt auch die Umkehrung. Besitzt $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Mittelwerteigenschaft und ist zweimal stetig differenzierbar, so ist u harmonisch.

28.4 Holomorphe Funktionen

Wir betrachten lokale Eigenschaften holomorpher Funktionen. Sei also f in der Umgebung eines Punktes a holomorph. Ist f nicht konstant, so ist wenigstens eine Ableitung von f im Punkt a nicht Null. Denn andernfalls bestünde die Taylorreihe von f nur aus dem konstanten Term, und damit wäre f konstant [20]. Somit können wir die *Ordnung* eines solchen Punktes wie folgt definieren.

Definition *Sei f in einer Umgebung des Punktes a holomorph. Ist f nicht konstant, so heißt*

$$m \coloneqq \min\{n \geqslant 1 : f^{(n)}(a) \neq 0\}$$

die Ordnung oder Vielfachheit des Punktes a.

Ist f um a konstant, so kann man für den Punkt a die Ordnung $\infty = \inf \varnothing$ vereinbaren. Dann ist f lokal um einen Punkt nicht konstant genau dann, wenn dieser Punkt endliche Ordnung hat.

31 **Faktorisierungslemma** *Sei f in einer Umgebung des Punktes a holomorph und nicht konstant. Dann hat der Punkt a die Ordnung m genau dann, wenn*

$$f(z) = f(a) + (z - a)^m g(z)$$

mit einer um a holomorphen Funktion g ohne Nullstellen.

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Bezeichnet m die Vielfachheit von a, so gilt

$$f(z) - f(a) = \sum_{n \geqslant m} a_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n \geqslant 0} a_{m+n} (z-a)^n$$

auf einer Kreisscheibe um a, wobei $a_m = f^{(m)}(a)/m! \neq 0$. Setzen wir also

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_{m+n} (z-a)^n,$$

so ist g holomorph um a mit $g(a) = a_m \neq 0$. Auf einer hinreichend kleinen Kreisscheibe um a besitzt somit g keine Nullstellen, und wir erhalten die behauptete Darstellung.

$\Leftarrow$ Aus der gegebenen Darstellung folgt

$$f'(a) = .. = f^{(m-1)}(a) = 0, \qquad f^{(m)}(a) = g(a)\, m! \neq 0.$$

Also hat der Punkt a die Ordnung m. ⟩⟩⟩⟩⟩

Aus dem Faktorisierungslemma folgt, dass eine holomorphe Funktion lokal um einen Punkt a mit endlicher Vielfachheit den Wert $f(a)$ kein weiteres Mal annehmen kann. Solche Stellen nennt man *isoliert*. Wir formulieren diesen Begriff der Einfachheit halber für Nullstellen. Die Übertragung auf beliebige Werte ist offensichtlich.

Definition *Ein Punkt a heißt isolierte Nullstelle einer holomorphen Funktion f, wenn f in einer Umgebung von a keine weiteren Nullstellen besitzt.* ⋊

Hat umgekehrt eine holomorphe Funktion f eine nicht-isolierte Nullstelle, so ist f *lokal* um diese Stelle konstant. Dies gilt dann aber auch *global* an jeder anderen Stelle, die mit diesem Punkt durch einen Weg verbunden werden kann, gleichgültig, wie weit entfernt dieser ist. Aus einer lokalen wird damit eine globale Eigenschaft auf einer Zusammenhangskomponente.

32 **Nullstellensatz** *Sei f holomorph auf der offenen und zusammenhängenden Menge Ω. Hat f eine nicht-isolierte Nullstelle in Ω, so ist $f \equiv 0$.* ⋊

Die Menge der Nullstellen von f hat also keinen Häufungspunkt in Ω. Dies schließt natürlich nicht aus, dass sie sich am Rand von Ω häufen.

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei Z die Menge aller *Häufungspunkte* von Nullstellen von f in Ω. Wegen der Stetigkeit von f ist Z abgeschlossen. Z ist aber auch offen. Denn sei $a \in Z$ und betrachte

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-a)^n$$

in einer offenen Kreisscheibe D um a. Dort besitzt diese Potenzreihe unendlich viele Nullstellen mit Häufungspunkt a. Somit ist $f|D \equiv 0$, also $D \subset Z$.

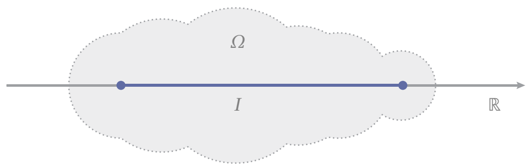


Abb 9
Analytische Fortsetzung von I auf Ω

Da Ω zusammenhängt, ist entweder $Z = \Omega$ oder $Z = \varnothing$. Besitzt also f eine nicht-isolierte Nullstelle, so ist $Z = \Omega$, also $f \equiv 0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

33 **Korollar** *Ist f auf einer offenen und zusammenhängenden Menge Ω holomorph und nicht identisch Null, so ist die Nullstellenmenge von f diskret und abzählbar.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Da die Nullstellenmenge keinen Häufungspunkt in Ω besitzt $_{32}$, ist jeder ihrer Punkt isoliert. Also ist diese Menge diskret. Schöpfen wir also Ω mit irgend einer steigenden Folge kompakter Teilmengen $(K_n)_{n \geqslant 1}$ aus, so liegen in jeder Menge K_n nur endlich viele Nullstellen. Somit ist die Menge aller Nullstellen auch abzählbar. ⟩⟩⟩⟩⟩

Wendet man den Nullstellensatz auf die Differenz zweier holomorpher Funktionen an, erhält man den

34 **Identitätssatz für holomorphe Funktionen** *Sind zwei Funktionen f und g auf einer offenen, zusammenhängenden Menge Ω holomorph und besitzt die Menge*

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

einen Häufungspunkt in Ω, so ist $f = g$. $\rtimes$

Ein wichtiger Spezialfall ist der *Identitätssatz für Potenzreihen*, auf dem das Prinzip des Koeffizientenvergleichs beruht. Sind

$$\phi(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-a)^n, \qquad \psi(z) = \sum_{n \geqslant 0} b_n (z-a)^n$$

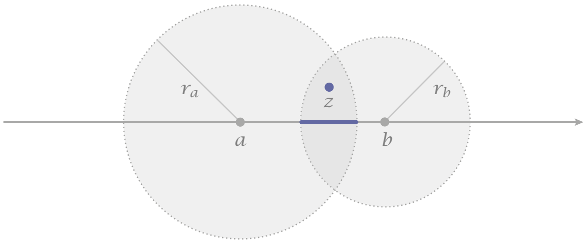
zwei Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius, und ist der Entwicklungspunkt a Häufungspunkt der Menge $\{z : \phi(z) = \psi(z)\}$, so sind die Potenzreihen identisch, also $a_n = b_n$ für alle $n \geqslant 0$.

▪ Holomorphe Fortsetzung

Eine holomorphe Funktion ist somit bereits vollständig durch ihre Werte auf einer Punktmenge bestimmt, die wenigstens einen Häufungspunkt besitzt.

Abb 10

Wohldefiniertheit der analytischen Fortsetzung



Daraus folgt, dass umgekehrt eine auf einem Intervall I definierte Funktion ϕ höchstens eine *holomorphe Fortsetzung* f besitzen kann, also eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $I \subset \Omega$ und $f|I = \phi$.

35 **Analytischer Fortsetzungssatz** *Jede reell analytische Funktion $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ besitzt eine holomorphe Fortsetzung $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ auf eine komplexe Umgebung Ω von I, und diese ist dort eindeutig.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Eine reell analytische Funktion $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ wird lokal um jeden Punkt $a \in I$ durch ihre Taylorreihe dargestellt. Es gilt also

$$\phi(t) = T_a\phi(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(t-a)^n, \qquad |t-a| < r_a,$$

mit den entsprechenden Taydlorkoeffizienten a_n und einem gewissen $r_a > 0$. Dieselbe Reihe definiert durch

$$f_a(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$$

eine holomorphe Funktion f_a auf $D_{r_a}(a)$. Setze nun

$$\Omega \coloneqq \bigcup_{a\in I} D_{r_a}(a).$$

Dies ist offensichtlich eine offene komplexe Umgebung des Intervalls I. Auf dieser definieren wir

$$f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}, \quad f(z) = f_a(z) \quad \text{für} \quad z \in D_{r_a}(a).$$

Diese Funktion ist wohldefiniert. Denn liegt z in zwei Kreisscheiben gleichzeitig, also $z \in D_{r_a}(a) \cap D_{r_b}(b)$, so stimmen f_a und f_b auf dem nichtleeren reellem Intervall in diesem Durchschnitt überein. Aufgrund des Identitätssatzes stimmen sie dann auch überall in diesem Durchschnitt überein, es gilt also

$$f_a(z) = f_b(z), \qquad z \in D_{r_a}(a) \cap D_{r_b}(b).$$

Somit ist f wohldefiniert, holomorph, und setzt φ auf Ω fort. ⟩⟩⟩⟩⟩

⊳ A. Die komplexen Funktionen $\exp$, $\sin$, $\cos$ sind die holomorphen Fortsetzungen ihrer reellen Varianten.

B. Der Hauptzweig des komplexen Logarithmus setzt den reellen Logarithmus auf $(0,\infty)$ holomorph auf die geschlitzte komplexe Ebenes $\mathbb{C}_-$ fort. Insbesondere ist

$$\log(1+z) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}, \qquad |z|<1,$$

die komplexe Fortsetzung der Taylorreihe von $\ln(1+t)$ um Punkt 0. ⊲

Einfache Stellen

An einer *einfachen* Stelle a von f ist $f'(a) \neq 0$. Das lokale Verhalten holomorpher Funktionen entspricht hier dem reeller, stetig differenzierbarer Abbildungen in regulären Punkten.

36 **Lokaler Umkehrsatz** *Ist a eine einfache Stelle von f, so ist f lokal um a biholomorph. Das heißt, f bildet eine Umgebung U von a bijektiv auf eine Umgebung V von $f(a)$ ab, und die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon V \to U$ ist ebenfalls holomorph.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir führen den Satz auf den Umkehrsatz für Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ 19.3 zurück. Dazu schreiben wir $z = x + \mathrm{i}y$ und $f = u + \mathrm{i}v$ und damit die komplexe Abbildung $z \mapsto f(z)$ in der reellen Form

$$(x,y) \mapsto \varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y)).$$

Aufgrund der Cauchy-Riemann-Gleichungen 4 ist

$$D\varphi = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix},$$

die Jacobideterminante somit

$$\det D\varphi = u_x^2 + u_y^2 = |f'|^2.$$

Nach Voraussetzung verschwindet diese nicht im Punkt a. Aufgrund des Umkehrsatzes 19.1 bildet somit φ eine Umgebung U von a diffeomorph auf eine Umgebung V von $\varphi(a)$ ab.

Sei ψ die Umkehrabbildung von φ, geschrieben

$$(\xi,\eta) \mapsto \psi(\xi,\eta) = (a(\xi,\eta), b(\xi,\eta)).$$

Differenziation der Gleichung $\psi \circ \varphi = id$ ergibt $D\psi \circ \varphi \cdot D\varphi = \mathrm{Id}$, oder

$$D\psi \circ \varphi = D\varphi^{-1}.$$

Also gilt

$$\begin{pmatrix} a_\xi & a_\eta \\ b_\xi & b_\eta \end{pmatrix} \circ \varphi = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det D\varphi} \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix},$$

und damit an jeder Stelle im Definitionsbereich

$$a_\xi = b_\eta, \qquad a_\eta = -b_\xi.$$

Somit erfüllt die ψ zugeordnete komplexe Abbildung

$$\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta \mapsto g(\zeta) = a(\xi + \mathrm{i}\eta) + \mathrm{i}b(\xi + \mathrm{i}\eta)$$

ebenfalls die Cauchy-Riemann-Gleichungen $_4$, ist also ebenfalls holomorph und, wie man leicht zeigt, die Umkehrabbildung von f. Damit ist alles gezeigt. ⟩⟩⟩⟩

▪ Mehrfache Stellen

Wir betrachten nun mehrfache Stellen. Der Prototyp einer solchen Stelle ist die m-te Potenz

$$z \mapsto a_0 + (z - a)^m.$$

Wir werden zeigen, dass auch jede andere holomorphe Funktion in der Umgebung einer m-fachen Stelle diese Gestalt annimmt, wenn man sie in geeigneten Koordinaten betrachtet.

Als Hilfsmittel benötigen wir den *komplexen Logarithmus* einer holomorphen Funktion f. Darunter versteht man jede holomorphe Funktion F mit demselben Definitionsbereich wie f, so dass

$$\mathrm{e}^F = f.$$

Diese Funktion F ist nicht eindeutig, da für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{e}^{F+2\pi\mathrm{i}n} = \mathrm{e}^F \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n} = \mathrm{e}^F \cdot 1 = f$$

und damit auch $F + 2\pi\mathrm{i}n$ ein komplexer Logarithmus von f ist. Wichtiger ist aber meist, dass ein Logarithmus überhaupt existiert.

Eine Funktion mit einem komplexen Logarithmus hat *notwendigerweise* keine Nullstellen, da die Exponenzialfunktion nirgends verschwindet $_{23}$. *Lokal* ist diese Eigenschaft auch *hinreichend.*

37 **Lemma** *Auf einer einfach zusammenhängenden Menge besitzt jede nullstellenfreie holomorphe Funktion einen komplexen Logarithmus.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei Ω offen und einfach zusammenhängend und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Dann ist auch f'/f auf Ω holomorph und besitzt aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes dort eine holomorphe Stammfunktion ϕ. Es ist also $\phi' = f'/f$ und damit auch

$$(f\mathrm{e}^{-\phi})' = f'\mathrm{e}^{-\phi} + f\mathrm{e}^{-\phi}(f'/f) = 0.$$

Somit ist $f\mathrm{e}^{-\phi} = c$ eine komplexe Konstante. Es ist auch $c \neq 0$, da f nirgends verschwindet. Also gibt ein $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^{\gamma} = c$ $_{9.19}$, und wir erhalten

$$f = c\mathrm{e}^{\phi} = \mathrm{e}^{\phi+\gamma}.$$

Somit besitzt f den holomorphen Logarithmus $F = \phi + \gamma$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Ist nun F ein beliebiger komplexer Logarithmus von f, so definieren wir eine *n-te Wurzel* von f durch

$$f^{1/n} \coloneqq \mathrm{e}^{F/n}.$$

Diese Wurzel ist natürlich ebenfalls nicht eindeutig. Aber in jedem Fall gilt

$$(f^{1/n})^n = \mathrm{e}^F = f.$$

38 **Satz von der m-fachen Stelle** *Sei a eine m-fache Stelle einer holomorphen Funktion f mit $m \geqslant 2$. Dann existieren eine Umgebung U von a und eine biholomorphe Abbildung h von U auf eine offene Kreisscheibe D um 0 so, dass*

$$f(z) = f(a) + h(z)^m, \qquad z \in U. \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist $_{31}$

$$f(z) = f(a) + (z-a)^m g(z)$$

mit einer um a holomorphen Funktion g ohne Nullstellen. Somit $_{37}$ besitzt g eine m-te Wurzel, also eine holomorphe Funktion q mit $q^m = g$. Die Funktion $h = (z-a)q$ ist dann in einer Umgebung von a holomorph mit

$$h(a) = 0, \qquad h'(a) = q(a) \neq 0.$$

Aufgrund des lokalen Umkehrsatzes $_{36}$ bildet somit h eine Umgebung U um a biholomorph auf eine Kreisscheibe D um 0 auf, und es gilt per Konstruktion

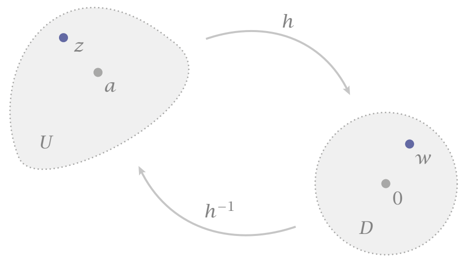
$$h^m = (z-a)^m q^m = (z-a)^m g = f - f(a). \quad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Wir können die biholomorphe Abbildung h^{-1} als neues Koordinatensystem um z auffassen. Dieses ersetzt die Koordinaten z in U durch die Koordinaten

$$w = h(z)$$

Abb 11

Koordinaten um eine m-fache Stelle



in D, in denen f die Gestalt

$$f(z) = f(a) + w^m$$

annimmt. Eine Konsequenz ist, dass die Gleichung $f(z) = c$ für jedes c in einer hinreichend kleinen punktierten Umgebung von $f(a)$ *genau m verschiedene Lösungen* besitzt. Wir formulieren diesen Sachverhalt für Nullstellen.

39 **Korollar** *Besitzt die holomorphe Funktion f im Punkt a eine m-fache Nullstelle, so hat die Gleichung $f(z) = c$ für alle c in einer kleinen punktierten Kreisscheibe um 0 lokal um a genau m verschiedene Lösungen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für jedes $c \neq 0$ hat die Gleichung

$$w^m = c$$

genau m verschiedene Lösungen $w_1, .., w_m$ 9.21. Für c hinreichend nahe bei 0 liegen diese im Wertebereich D der Abbildung h des vorangehenden Satzes. Für die Punkte $z_k = h^{-1}(w_k)$ gilt dann

$$f(z_k) = w_k^m = c, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

wie gefordert. ⟩⟩⟩⟩⟩

Globales Verhalten

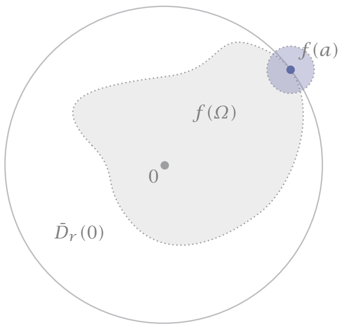
Aus den letzten beiden Sätzen gewinnen wir einige grundlegende Aussagen über das globale Verhalten holomorpher Funktionen.

40 **Satz von der offenen Abbildung** *Ist f auf der offenen Menge Ω holomorph und nicht konstant, so ist auch das Bild $f(\Omega)$ offen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Zu zeigen ist, dass $f(\Omega)$ mit jedem Punkt $f(a)$ auch eine Kreisscheibe um a enthält. Da f nicht konstant ist, hat a eine bestimmte Vielfachheit $m \geqslant 1$. Aufgrund des letzten Korollars gehört dann aber auch eine Kreisscheibe um a zur Bildmenge $f(\Omega)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 12

Zum Beweis des Maximumsprinzips



Holomorphe Bilder offener Mengen bestehen somit entweder aus genau einem Punkt, oder sie sind offen. Im Reellen gilt Entsprechendes nur, wenn zusätzlich die Abbildung in jedem Punkt regulär, und damit lokal diffeomorph ist. Andernfalls ist die Aussage falsch, wie beispielsweise die Sinusfunktion auf $\mathbb{R}$ zeigt.

41 **Satz** *Ist f auf der offenen Menge Ω holomorph und injektiv, so ist f biholomorph auf das offene Bild $\Omega' = f(\Omega)$* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Als injektive Abbildung ist f nicht konstant und damit Ω' offen $_{40}$. Es ist auch $f'(a) \neq 0$ für jedes $a \in \Omega$, denn andernfalls wäre f nicht injektiv $_{38}$. Also ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : \Omega' \to \Omega$ auch holomorph $_{36}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

42 **Maximumsprinzip** *Ist die Funktion f auf der offenen Menge Ω holomorph und nicht konstant, so nimmt ihr Betrag auf Ω kein Maximum an.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Angenommen, es gibt einen Punkt $a \in \Omega$, so dass

$$|f(z)| \leqslant |f(a)|, \qquad z \in \Omega.$$

Mit $r = |f(a)|$ gilt dann

$$f(\Omega) \subset \bar{D}_r(0), \qquad f(a) \in \partial D_r(0).$$

Wegen des Satzes von der offenen Abbildung $_{40}$ enthält $f(\Omega)$ aber auch eine Umgebung von $f(a)$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. ⟩⟩⟩⟩⟩

43 **Maximumsprinzip auf beschränktem Gebiet** *Sei Ω offen und beschränkt. Ist f auf Ω holomorph und auf $\bar{\Omega}$ stetig, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von Ω an.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Menge $\bar{\Omega}$ ist abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt. Also nimmt die stetige Funktion $|f|$ auf $\bar{\Omega}$ ihr Maximum an. Ist $|f|$ nicht konstant, so kann dieses Maximum wegen des letzten Satzes nicht in Ω selbst, sondern muss auf dem Rand von Ω liegen. Ist $|f|$ dagegen konstant, so nimmt $|f|$ in *jedem* Punkt von $\bar{\Omega}$ sein Maximum an. ⟩⟩⟩⟩⟩

44 **Satz vom Minimum** *Ist f auf der offenen Menge Ω holomorph und nicht konstant, und nimmt $|f|$ in einem Punkt $a \in \Omega$ ein lokales Minimum an, so ist $f(a) = 0$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Falls nicht, so wäre die Funktion $1/f$ in einer Umgebung von a holomorph, nicht konstant, und $|1/f|$ nähme in a ein lokales Maximum an. Das aber geht nicht $_{43}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Eine Anwendung dieses Satzes ist ein weiterer, sehr kurzer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Angenommen, dass Polynom p ist nicht konstant. Wegen

$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$$

besitzt $|p|$ auf $\mathbb{C}$ eine absolute Minimalstelle a. Dies muss eine Nullstelle sein. ⊸

Aus dem Maximumprinzip folgt direkt das Lemma von Schwarz, das wir hier allerdings nicht benötigen. Sei dazu $\mathbb{D} = D_1(0)$ die Einheitskreisscheibe.

45 **Schwarzsches Lemma** *Ist $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$, so gilt*

$$|f(z)| \leqslant |z|, \qquad |f'(0)| \leqslant 1.$$

Gilt in einem Punkt Gleichheit, so ist f eine Drehung um 0, also $f(z) = \alpha z$ mit $|\alpha| = 1$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wegen $f(0) = 0$ definiert

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{z}, \qquad z \neq 0,$$

eine holomorphe Funktion ϕ auf $\mathbb{D}$. Für diese gilt

$$\|\phi\|_{\partial D_r(0)} \leqslant \frac{\|f\|_{\mathbb{D}}}{r} \leqslant \frac{1}{r}, \qquad 0 < r < 1,$$

also aufgrund des Maximumprinzips auch $\|\phi\|_{D_r(0)} \leqslant 1/r$. Mit $r \to 1$ folgt $\|\phi\|_{\mathbb{D}} \leqslant 1$, was der ersten Behauptung entspricht. Gilt Gleichheit an einem Punkt, so wird ein Maximum auf einem Randpunkt angenommen, und ϕ ist konstant. ⟩⟩⟩⟩⟩

28.5 Meromorphe Funktionen

Wir betrachten nun Funktionen, die in einzelnen isolierten Punkten nicht holomorph sind.

Definition *Ein Punkt a heißt isolierte Singularität einer holomorphen Funktion f, wenn f in einer punktierten Umgebung von a holomorph ist. Genauer heißt a eine*

(i) *hebbare Singularität, wenn f holomorph in a fortgesetzt werden kann,*

(ii) *Polstelle, wenn $(z-a)^m f$ für ein $m \geqslant 1$ holomorph in a fortgesetzt werden kann, nicht aber f selbst,*

(iii) *wesentliche Singularität, wenn sie weder hebbar noch eine Polstelle ist.* ⋊

Hebbare Singularitäten sind also im Grunde gar keine. Diese Situation beschreibt der folgende Satz.

46 **Riemannscher Hebbarkeitssatz** *Ist f in einer punktierten Umgebung eines Punktes a holomorph und beschränkt, so ist a eine hebbare Singularität.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist f auf $\dot{D}(a)$ holomorph und beschränkt, so ist die Funktion h mit

$$h(a) = 0, \qquad h(z) = (z-a)^2 f(z), \qquad z \neq a,$$

ebenfalls auf $\dot{D}(a)$ holomorph. Im Punkt a ist sie außerdem komplex differenzierbar mit Ableitung 0, denn

$$\lim_{z\to a} \frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} (z-a)f(z) = 0.$$

Somit ist h auf der ganzen Kreisscheibe $D(a)$ holomorph $_{21}$ und besitzt eine Potenzreihenentwicklung

$$h(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n (z-a)^n.$$

Hierbei ist $a_0 = h(0) = 0$ und $a_1 = h'(0) = 0$. Also ist genauer

$$h(z) = \sum_{n\geqslant 2} a_n (z-a)^n = (z-a)^2 \sum_{n\geqslant 0} a_{n+2} (z-a)^n.$$

Die letzte Reihe ist eine Potenzreihendarstellung von f um a. ⟩⟩⟩⟩⟩

47 ▷ A. Der Punkt 0 ist eine hebbare Singularität der Funktionen

$$\frac{z}{\sin z}, \qquad \frac{\log(1+z)}{z}.$$

Denn aufgrund der Regel von l'Hospital existieren deren Grenzwerte im Punkt 0, und somit sind diese Funktionen dort beschränkt.

B. Ist f holomorph in einer Umgebung von a, so ist auch der Differenzenquotient

$$\phi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}, & z \neq a, \\ f'(a), & z = a, \end{cases}$$

holomorph in derselben Umgebung von a.

C. Die Funktionen $1/z^n$ mit $n \geqslant 1$ haben eine Polstelle bei 0.

D. Dagegen hat

$$z \mapsto \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n! z^n}$$

bei 0 eine wesentliche Singularität. ◂

Wir betrachten nun Polstellen.

48 **Definition** *Jede Polstelle a einer holomorphen Funktion f ist von endlicher Ordnung*

$$m = \min\{n \geqslant 1 : (z - a)^n f \text{ ist lokal um } a \text{ beschränkt}\},$$

und man nennt a eine m-fache Polstelle von f. ⋊

In der Definition von m können wir $n = 0$ außer Betracht lassen. Denn wäre f lokal um a beschränkt, so wäre a eine hebbare Singularität und keine Polstelle. Polstellen verhalten sich in vielen Aspekten wie Nullstellen, nur umgekehrt. So gilt ebenfalls ein

49 **Faktorisierungslemma** *Die Funktion f habe im Punkt a eine Polstelle. Dann ist a von der Ordnung m genau dann, wenn*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^m}$$

mit einer um a holomorphen Funktion g ohne Nullstellen. ⋊

⟨⟨⟨⟨ ⇒ Die Funktion g mit

$$g(z) = (z - a)^m f(z)$$

ist holomorph nach a fortsetzbar $_{46}$, wobei wir die Fortsetzung mit demselben Symbol bezeichnen. Es ist dann $g(a) \neq 0$, denn andernfalls wäre der Pol von kleinerer Ordnung $_{31}$. Aus Stetigkeitsgründen ist g auch in einer Umgebung von a nicht Null. Auflösen nach f ergibt die Behauptung. ⇐ Klar. ⟩⟩⟩⟩

Polstellen sind aufgrund dieses Lemmas immer *isoliert* und damit auch *abzählbar*. Besitzt eine holomorphe Funktion f nach Aufhebung aller hebbaren Singularitäten nur Polstellen, so nennt man sie *meromorph*.

Definition *Eine Funktion f heißt meromorph auf Ω, wenn es eine diskrete Teilmenge P in Ω gibt, so dass f auf $\Omega \setminus P$ holomorph ist und P nur aus Polstellen von f besteht. Die Menge P heißt Polstellenmenge von f.*

A. Eine *rationale Funktion* $f = p/q$, also der Quotient zweier Polynome p und q mit $q \not\equiv 0$, ist meromorph auf $\mathbb{C}$ und hat nur endlich viele Nullstellen und Polstellen. Sie ist holomorph genau dann, wenn q Teiler von p ist.

B. Der Tangens

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}$$

ist meromorph auf $\mathbb{C}$, seine Polstellenmenge ist

$$P = \{n\pi + \pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Da die Ableitung des Cosinus in jeder Nullstelle nicht verschwindet, ist jeder Pol einfach. Entsprechendes gilt für den Kotangens, $\cot = \cos/\sin$.

C. Die Funktion $\exp(1/z)$ ist *nicht* meromorph auf $\mathbb{C}^*$.

50 **Satz** *Eine Funktion f ist meromorph auf Ω genau dann, wenn es eine diskrete Menge P in Ω gibt, so dass f auf $\Omega \setminus P$ holomorph ist und zu jedem Punkt a in P eine punktierte Umgebung $\dot{U}$ und holomorphe Funktionen g und h existieren, so dass $f = g/h$ in $\dot{U}$.*

$\Rightarrow$ Sei f meromorph auf Ω und P die Polstellenmenge von f. Diese ist abgeschlossen *in* Ω, da sie diskret ist und keine Häufungspunkte in Ω besitzt. Ferner besitzt f in jedem Punkt $a \in P$ eine lokale Darstellung [49]

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}.$$

Somit gilt die Behauptung mit $h = (z-a)^m$.

$\Leftarrow$ Sei umgekehrt P gegeben, a ein Punkt in P, und $f = g/h$ in einer punktierten Umgebung $\dot{U}$ von a mit holomorphen Funktionen g und h. Ist $h(a) \neq 0$, so ist a gar keine Singularität, und es ist nichts zu tun. Anernfalls hat h in a eine Nullstelle endlicher Ordnung $m \geqslant 1$, da h nicht identisch verschwinden kann. Somit ist $h = (z-a)^m \eta$ mit einer in einer Umgebung von a holomorphen und nirgends verschwindenden Funktion η, und

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m \eta(z)}.$$

Hieraus folgt, dass bei a ein Pol der Ordnung m vorliegt.

28.6 Laurentreihen

Wir betrachten nun eine wesentliche Singularität. Eine erste Aussage über das Verhalten einer holomorphen Funktion an einer solchen Stelle macht der

51 **Satz von Casorati-Weierstraß** *Ist a eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion f, so ist das Bild jeder punktierten Kreisscheibe um a dicht in $\mathbb{C}$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Sei f holomorph auf der Kreisscheibe $\dot{D}_r(a)$. Wäre deren Bild nicht dicht in $\mathbb{C}$, so gäbe es ein $c \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$|f(z) - c| \geqslant \varepsilon, \qquad z \in \dot{D}_r(a).$$

Dann aber ist die Funktion g mit

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$$

auf $\dot{D}_r(a)$ dem Betrag nach durch $1/\varepsilon$ beschränkt und somit in den Punkt a zu einer holomorphen Funktion φ fortsetzbar 46. Dabei ist $\varphi(a) = 0$, denn andernfalls wäre f wegen

$$f(z) = c + \frac{1}{g(z)} = c + \frac{1}{\varphi(z)}$$

in a holomorph fortsetzbar. Da φ nicht identisch verschwindet, ist 31 $\varphi = (z-a)^m \eta$ mit einem gewissen $m \geqslant 1$ und einer um a holomorphen Funktion η ohne Nullstellen. Also ist

$$f(z) = c + \frac{1}{(z-a)^m \eta(z)}.$$

Das aber bedeutet, dass f in a einen Pol besitzt – ein Widerspruch. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Tatsächlich kann der Satz von Casorati-Weierstraß noch wesentlich verschärft werden. Der *Große Satz von Picard* sagt aus, dass in jeder punktierten Kreisscheibe um eine wesentliche Singularität eine holomorphe Funktion höchstens einen Wert *nicht* annimmt. Zum Beispiel nimmt die Funktion $\exp(1/z)$ in jeder Umgebung von 0 nur den Wert 0 *nicht an*. ⊸

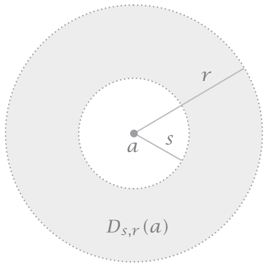
Lokal um eine Polstelle der Ordnung m besitzt eine meromorphe Funktion f die Gestalt 48

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \frac{a_0}{(z-a)^m} + .. + \frac{a_{m-1}}{z-a} + \sum_{n \geqslant 0} a_{m+n}(z-a)^n$$

mit $a_0 \neq 0$, wenn wir g in eine Potenzreihe $g(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-a)^n$ entwickeln. Betrachtet man eine wesentliche Singularität als *Pol unendlicher Ordnung*, so

Abb 13

Der Kreisring $D_{s,r}(a)$



sollte sich die Darstellung über *alle* negativen Potenzen von $z - a$ erstrecken. Solche Reihen heißen *Laurentreihen*.

Definition *Eine Laurentreihe um den Punkt a ist eine Reihe*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$$

mit komplexen Koeffizienten a_n. Sie konvergiert absolut auf einem Geibet in $\mathbb{C}$, wenn sowohl ihr Hauptteil f_{H} als auch ihr Nebenteil f_{N}, definiert als

$$f_{\mathrm{H}}(z) \coloneqq \sum_{n<0} a_n (z-a)^n, \qquad f_{\mathrm{N}}(z) \coloneqq \sum_{n\geqslant 0} a_n (z-a)^n,$$

dort absolut konvergieren. Der Wert der Laurentreihe ist dann die Summe aus ihrem Haupt- und Nebenteil. ⋊

▷ A. Die Laurentreihe

$$\sum_{n\leqslant 0} z^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1-1/z} = \frac{z}{z-1}$$

konvergiert absolut für $|z| > 1$ und divergiert für $|z| \leqslant 1$.

B. Die Laurentreihe

$$\sum_{n\leqslant 0} \frac{z^n}{(-n)!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = \mathrm{e}^{1/z}$$

konvergiert absolut für alle $z \neq 0$. ◁

Der Nebenteil einer Laurentreihe ist eine ›übliche‹ Potenzreihe in $z - a$. Ihr Hauptteil ist dagegen eine Potenzreihe in $(z-a)^{-1}$. Es gibt somit ein eindeutiges $\sigma \in [0, \infty]$, so dass sie für alle z mit

$$\left|\frac{1}{z-a}\right| < \sigma$$

konvergiert. Somit existiert auch ein eindeutiges $s \in [0, \infty]$, so dass sie für $|z-a| > s$ konvergiert und für $|z-a| < s$ divergiert.

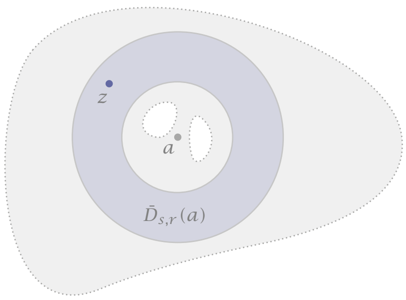


Abb 14

Zur Integralformel für Kreisringe

Insgesamt konvergieren Laurentreihen also auf *Kreisringen*

$$D_{s,r}(a) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : s < |z-a| < r\}$$

um a mit *innerem Radius* s und *äußerem Radius* r. Insbesondere ist

$$D_{0,r}(a) = \dot{D}_r(a), \qquad D_{0,\infty}(0) = \mathbb{C}^*,$$

und $D_{s,r}(a) = \varnothing$ für $s \geqslant r$. Eine punktierte Kreisscheibe ist also ein Spezialfall eines Kreisringes.

52 **Satz** *Konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ in wenigstens zwei Punkten mit unterschiedlichem Abstand zu a, so konvergiert sie auf einem eindeutig bestimmten, maximalen nichtleeren Kreisring $D_{s,r}(a)$ und divergiert auf dem Komplement seines Abschlusses. Außerdem konvergiert sie absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge dieses Kreisringes.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Nebenteil besitzt einen eindeutig bestimmten maximalen inneren Konvergenzkreis $\{|z-a| < r\}$ und der Hauptteil einen eindeutig bestimmten maximalen äußeren Konvergenzkreis $\{|z-a| > s\}$??. Aus der Voraussetzung folgt, dass $s < r$. Der Durchschnitt dieser beiden Mengen ist daher ein nichtleerer Kreisring $D_{s,r}(a)$. Die zweite Behauptung folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von Potenzreihen. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Laurentscher Entwicklungssatz

Konvergiert eine Laurentreihe auf einem offenen Kreisring $D_{s,r}(a)$, so stellt sie dort eine holomorphe Funktion dar. da die Reihe auf jeder kompakten Teilmenge des Kreisringes $D_{s,r}(a)$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Die Frage ist, ob sich umgekehrt auch jede auf einem Kreisring holomorphe Funktion in eine Laurentreihe entwickeln lässt. Der Vorbereitung der Antwort dient die

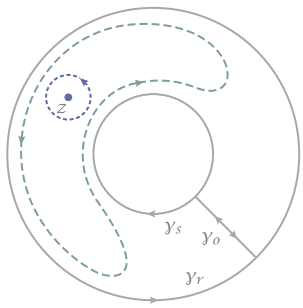


Abb 15

Drei homotope Kurven um den Punkt z

53 **Cauchysche Integralformel für Kreisringe** *Ist f in einer Umgebung des Abschlusses des Kreisringes $D_{s,r}(a)$ holomorph, so gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_s(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w$$

für alle $z \in D_{s,r}(a)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Differenzenquotient ϕ mit

$$\phi(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \qquad w \neq z,$$

ist holomorph auf dem Definitionsbereich von f 47. Da die Randkurven von $D_{s,r}(a)$ innerhalb dieses Definitionsbereiches frei homotop sind, gilt 14

$$\int_{\partial D_r(a)} \phi(w) \, \mathrm{d}w = \int_{\partial D_s(a)} \phi(w) \, \mathrm{d}w.$$

Dies ist äquivalent mit

$$\int_{\partial D_r(a) - \partial D_s(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w = f(z) \int_{\partial D_r(a) - \partial D_s(a)} \frac{1}{w - z} \, \mathrm{d}w.$$

Für $z \in D_{s,r}(a)$ verschwindet das letzte Integral über den inneren Kreis und ergibt $2\pi\mathrm{i}$ über den äußeren Kreis. Das ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkungen *a.* Ist f *holomorph* auf $D_r(a)$, so verschwindet das zweite Integral, und wir erhalten die klassische Cauchyformel 16.

b. Man kann die beiden Randintegrale in der Cauchyschen Integralformel als *ein* Integral über den Rand des Kreisringes auffassen, wobei der Rand so durchlaufen wird, dass das Innere des Kreisringes immer auf der linken Seite liegt:

$$\int_{\partial D_{s,r}(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w = \int_{\partial D_r(a) - \partial D_s(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w.$$

c. Dieses Randintegral ist identisch mit dem Integral entlang der Kurve $\gamma = \gamma_r + \gamma_o - \gamma_s - \gamma_o$ in Abbildung 15, da die Integrale über das Verbindungsstück γ_o sich aufheben. Die Kurve γ wiederum ist in $\bar{D}_{s,r}(a)$ homotop zu einem hinreichend kleinen Kreis um z. Die Cauchysche Integralformel für Kreisringe folgt damit direkt aus der allgemeinen Cauchyschen Integralformel [57].

54 **Laurentscher Entwicklungssatz** *Jede auf einem nichtleeren Kreisring $D_{s,r}(a)$ holomorphe Funktion f besitzt eine Laurententwicklung*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n, \qquad z \in D_{s,r}(a)$$

mit den eindeutig bestimmten Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_\tau(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

wobei $s < \tau < r$ beliebig ist.

Bemerkung Ist f holomorph auf der ganzen Kreisscheibe $D_r(a)$, so ist der Integrand für alle $n < 0$ dort ebenfalls holomorph, und alle Koeffizienten a_n mit $n < 0$ verschwinden [10]. Die Laurentreihe reduziert sich in diesem Fall auf eine klassische Potenzreihe [19].

Jeder Punkt $z \in D_{s,r}(a)$ ist auch in einem etwas kleineren Kreisring $D_{\sigma,\rho}(a)$ mit $s < \sigma < \rho < r$ enthalten, und es gilt [53]

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_{\sigma,\rho}(a)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w. \tag{7}$$

Den Cauchykern $(w-z)^{-1}$ entwickeln wir nun auf zwei verschiedene Weisen in eine Potenzreihe. Für w auf dem äußeren Rand schreiben wir wie in (5)

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Für w auf dem inneren Rand vertauschen wir z und w und erhalten

$$\frac{1}{z-w} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}. = \sum_{n<0} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Diese Reihen konvergieren gleichmäßig entlang der jeweiligen Integrationswege. Daher dürfen wir Summation und Integration vertauschen und erhalten

$$\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w = \sum_{n \geqslant 0} (z-a)^n \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w$$

und

$$-\int_{\partial D_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w = \sum_{n<0} (z-a)^n \int_{\partial D_\sigma(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w.$$

Da die rechts stehenden Integrale wegen der Holomorphie des Integranden auf ganz $D_{s,r}(a)$ unabhängig vom Radius innerhalb des Intervall (s,r) sind [14], ergeben die letzten Formeln zusammen mit (7) die Laurententwicklung von f mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_\tau(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

wobei $s < \tau < r$ beliebig gewählt werden kann.

Bleibt noch die Eindeutigkeit der Entwicklung zu zeigen. Besitzt f eine Laurentreihen-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n,$$

so folgt für beliebiges $s < \tau < r$

$$\int_{\partial D_\tau(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{m+1}}\,\mathrm{d}w = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\partial D_\tau(a)} \frac{c_n}{(w-a)^{m-n+1}}\,\mathrm{d}w = 2\pi \mathrm{i}\, c_m,$$

da alle Integrale mit $m \neq n$ verschwinden [4]. Also sind die Koeffizienten c_m genau die im Satz behaupteten, und die Laurentreihe ist eindeutig. ⟫⟫⟫

Bei der Bestimmung von Laurententwicklungen kann man oft, wie in den folgenden Beispielen, spezielle Eigenschaften der darzustellenden Funktion ausnutzen und damit die Integralformel vermeiden.

▷ A. Es ist

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1/z}{1-1/z} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{z^n} = \sum_{n<0} z^n, \qquad |z| > 1.$$

Somit gilt

$$\frac{1}{1-z} = \begin{cases} \sum_{n \geqslant 0} z^n & \text{auf } D_1(0), \\ -\sum_{n<0} z^n & \text{auf } D_{1,\infty}(0). \end{cases}$$

B. Die Funktion f mit

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1,2\}$. Schreiben wir

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z/2},$$

so erhalten wir mit dem vorangehenden Beispiel

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{n\geqslant 0}(1-2^{-n})z^n & \text{auf } D_1(0), \\ -\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}z^n - \sum_{n<0} z^n & \text{auf } D_{1,2}(0), \\ -\sum_{n<0}(1-2^{-n})z^n & \text{auf } D_{2,\infty}(0). \end{cases}$$

Diese drei Entwicklungen sind verschieden, da sie auf verschiedenen Kreisringen gelten. Dies widerspricht also nicht der Eindeutigkeit der Laurententwicklung.

c. Die Funktion $f : z \mapsto \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{1/z}$ hat im Punkt 0 die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n\leqslant 0} \frac{z^n}{(-n)!} = 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z^n}{|n|!}. \quad \triangleleft$$

Als wichtigen Spezialfall notieren wir noch die Laurententwicklung auf einer punktierten Kreisscheibe.

55 **Korollar** *Jede auf einer punktierten Kreisscheibe $\dot{D}_r(a)$ holomorphe Funktion f besitzt eine Laurententwicklung*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n, \qquad z \in \dot{D}_r(a)$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

wobei $0 < \rho < r$ beliebig ist. Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\dot{D}_r(a)$. $\rtimes$

Der Typ einer isolierten Singularität a erschließt sich damit aus den Koeffizienten a_n seiner Laurentreihe. Ist f holomorph auf $\dot{D}_r(a)$ und

$$m = \inf\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\},$$

so handelt sich um eine

— *hebbare Singularität*, falls $m \geqslant 0$,
— *Polstelle* der Ordnung $|m|$, falls $0 > m > -\infty$,
— *wesentliche Singularität*, falls $m = -\infty$.

28.7 Die Windungszahl

In den verschiedenen Varianten der Cauchyschen Integralformel haben wir uns bisher auf kreisförmige Integrationswege beschränkt. Um auch andere geschlossene Integrationswege zu betrachten, müssen wir die Frage klären, wann überhaupt eine solche Kurve um einen gegebenen Punkt ›herumläuft‹, und wenn ja, wie oft und und in welcher Richtung. Alle diese Fragen beantwortet die *Windungszahl*.

Im Folgenden seien alle Kurven γ stückweise stetig differenzierbar. Außerdem schreiben wir γ der Kürze halber auch für die *Spur* der Kurve.

Definition *Die Windungszahl einer geschlossenen Kurve γ in $\mathbb{C}$ bezüglich eines Punktes $z \notin \gamma$ ist*

$$\operatorname{ind}(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z}.$$

Andere Bezeichnungen hierfür sind Umlaufzahl oder Index. ⋊

▹ A. Für eine Punktkurve γ gilt

$$\operatorname{ind}(\gamma, z) = 0, \qquad z \neq \gamma.$$

B. Für die vereinbarungsgemäß einmal im positivem Sinne durchlaufene Randkurve einer Kreisscheibe gilt

$$\operatorname{ind}(\partial D_r(a), z) = \begin{cases} 1, & z \in D_r(a), \\ 0, & z \notin \bar{D}_r(a). \end{cases}$$

C. Bezeichnet γ^m die m-mal durchlaufene Randkurve von $D_r(a)$, und zwar im positiven Sinn für $m \geqslant 1$ und im negativen Sinn für $m < 0$, so ist

$$\operatorname{ind}(\gamma^m, z) = \begin{cases} m, & z \in D_r(a), \\ 0, & z \notin \bar{D}_r(a). \end{cases}$$

Dies gilt auch für $m = 0$, wenn man γ^0 als Punktkurve vereinbart.

D. Sind γ_0 und γ_1 in einem Gebiet Ω frei homotope geschlossene Kurven, so ist

$$\operatorname{ind}(\gamma_0, z) = \operatorname{ind}(\gamma_1, z), \qquad z \notin \Omega.$$

E. Ist Ω einfach zusammenhängend und $\gamma \subset \Omega$, so ist

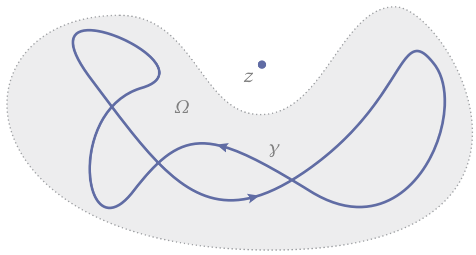
$$\operatorname{ind}(\gamma, z) = 0, \qquad z \notin \Omega.$$

Denn γ ist in Ω frei homotop zu einer Punktkurve. ◃

56 **Satz** *Für eine geschlossene Kurve γ ist die Windungszahl auf $\mathbb{C} \setminus \gamma$ stetig und ganzzahlig.* ⋊

Abb 16

Nullhomotope Kurve γ in Ω und Punkt $z \notin \Omega$ mit $\operatorname{ind}(\gamma, z) = 0$



⟨⟨⟨⟨⟨ Sei zunächst $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Für $z \notin \gamma$ ist dann

$$2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{ind}(\gamma, z) = \int_a^b \frac{\dot\gamma(s)}{\gamma(s) - z}\,\mathrm{d}s.$$

Dies ist ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\mathrm{i}$ genau dann, wenn das Exponenzial hiervon 1 ist. Dazu zeigen wir, dass die Funktion ω mit

$$\omega(t) := \exp\left(\int_a^t \frac{\dot\gamma(s)}{\gamma(s) - z}\,\mathrm{d}s\right), \qquad a \leqslant t \leqslant b, \tag{8}$$

bei $t = b$ den Wert 1 annimmt. — Nun ist

$$\frac{\dot\omega}{\omega} = \frac{\dot\gamma}{\gamma - z}, \qquad \left(\frac{\omega}{\gamma - z}\right)^{\cdot} = \frac{\dot\omega(\gamma - z) - \omega\dot\gamma}{(\gamma - z)^2} = 0.$$

Somit ist $\omega/(\gamma - z)$ auf $[a,b]$ konstant, und wir erhalten

$$\frac{\omega(b)}{\gamma(b) - z} = \frac{\omega(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{1}{\gamma(a) - z}.$$

Mit $\gamma(b) = \gamma(a)$ folgt hieraus $\omega(b) = 1$.

Ist γ nur stückweise stetig differenzierbar, so zeigt dieselbe Rechnung, dass $\omega/(\gamma - z)$ auf jedem Zerlegungsintervall von $[a,b]$ konstant ist, auf dem diese Funktion C^1 ist. Ein Stetigkeitsargument liefert dann wieder die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Geometrische Interpretation Wegen $z \notin \gamma$ können wir die Kurve γ lokal immer in der Form

$$\gamma(t) = z + r(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}, \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen r und φ schreiben. Dann ist

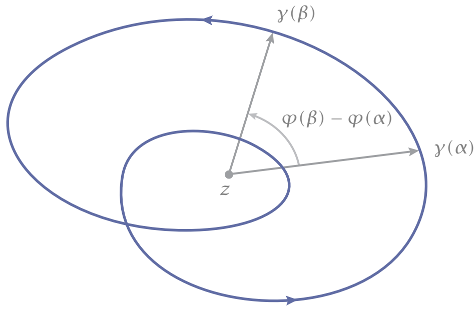
$$\frac{\dot\gamma}{\gamma - z} = \frac{\dot r}{r} + \mathrm{i}\dot\varphi$$

und

$$\Im \int_\alpha^\beta \frac{\dot\gamma(s)}{\gamma(s) - z}\,\mathrm{d}s = \varphi\Big|_\alpha^\beta.$$

Abb 17

Zur geometrischen Interpretation der Windungszahl



Dieser Wert misst also die Veränderung des Arguments φ und damit des Winkels des Vektors von z zum Kurvenpunkt $\gamma(t)$ über dem Intervall $[\alpha,\beta]$.

Setzen wir diese lokale Darstellung über das Parameterintervall $[a,b]$ stetig fort, so misst der Imaginärteil des Integrals in (8), wie viele Umläufe der Vektor von z zum Kurvenpunkt $\gamma(t)$ vollendet, wenn t das Intervall von a nach b durchläuft. Daher ist auch der Name *Windungszahl* berechtigt. — Der Beitrag des Realteils dieses Integrals ist übrigens Null. ⊸

Die Windungszahl definiert somit eine *stetige Abbildung*

$$\operatorname{ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma \to \mathbb{Z}, \quad z \mapsto \operatorname{ind}(\gamma, z).$$

Da sie nur ganzzahlige Werte annehmen kann, ist sie *konstant* auf jeder wegzusammenhängenden Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \gamma$, also auf jeder *Zusammenhangskomponente* von $\mathbb{C} \setminus \gamma$ A-37. Insbesondere ist $\operatorname{ind}_\gamma | \Omega \equiv 0$ auf der *unbeschränkten* zusammenhängenden Komponente Ω von $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

57 **Cauchysche Integralformel für nullhomotope Kurven** *Ist f auf Ω holomorph, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}z = f(z) \operatorname{ind}(\gamma, z)$$

für jede in Ω nullhomotope Kurve γ und jeden Punkt $z \in \Omega \setminus \gamma$. ⋊

Abb 18

Windungszahlen verschiedener Zusammenhangskomponenten

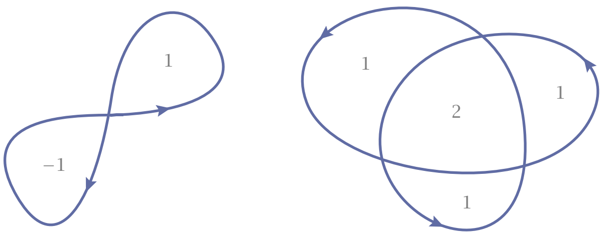
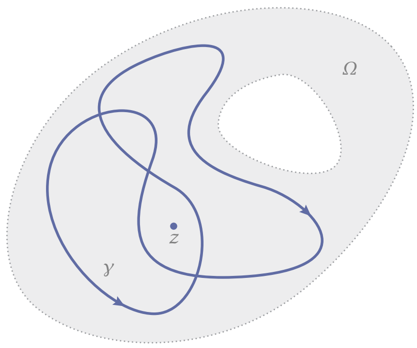


Abb 19

Zur allgemeinen Cauchyschen Integralformel



⟨⟨⟨⟨⟨ Die Funktion ϕ mit

$$\phi(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \qquad w \neq z$$

ist auf Ω holomorph $_{47}$. Also gilt mit dem Cauchyschen Integralsatz $_{10}$

$$\int_\gamma \phi(w)\,\mathrm{d}w = 0.$$

Einsetzen ergibt

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(z)}{w - z}\,\mathrm{d}w = 2\pi\mathrm{i}\, f(z)\, \mathrm{ind}(\gamma, z).$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkungen *a.* Die klassische Cauchysche Integralformel $_{16}$ ist natürlich ein Spezialfall hiervon, da ja

$$\mathrm{ind}(\partial D_r(a), z) = \begin{cases} 1, & z \in D_r(a), \\ 0, & z \notin \bar{D}_r(a). \end{cases}$$

b. Die Kurve γ muss nullhomotop im Holomorphiegebiet Ω von f sein, damit sie keine Singularitäten von f einschließt. Andernfalls wäre die Formel auch nicht korrekt – dann gilt vielmehr der Residuensatz. ⊸

28.8 Residuensatz und Satz von Rouché

Ist die Funktion f in einer punktierten Umgebung $\dot{D}_r(a)$ holomorph, so hängt der Wert des Integrals von f über den Rand einer hinreichend kleinen Kreisscheibe um a nicht von derem Radius ab. Daher ist folgende Definition sinnvoll.

28.48

Definition *Ist f in einer punktierten Umgebung von a holomorph, so heißt*

$$\operatorname{Res}(f,a) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D_\varepsilon(a)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

das Residuum von f an der Stelle a. ⋊

Das Residuum ist offensichtlich linear im ersten Argument,

$$\operatorname{Res}(\lambda f + \mu g, a) = \lambda \operatorname{Res}(f,a) + \mu \operatorname{Res}(g,a),$$

und lässt sich wie folgt charakterisieren.

58 **Lemma** *Ist f in einer punktierten Umgebung des Punktes a holomorph, so ist $\operatorname{Res}(f,a)$ diejenige eindeutig bestimmte komplexe Zahl R, mit der*

$$\phi(z) = f(z) - \frac{R}{z-a}$$

lokal um a eine Stammfunktion besitzt. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Besitzt ϕ eine Stammfunktion, so ist für alle $\varepsilon > 0$ hinreichend klein

$$0 = \int_{\partial D_\varepsilon(a)} \phi(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D_\varepsilon(a)} f(z)\,\mathrm{d}z - 2\pi\mathrm{i}\,R.$$

Also ist $R = \operatorname{Res}(f,a)$. Umgekehrt gilt mit $R = \operatorname{Res}(f,a)$, dass

$$\int_{\partial D_\varepsilon(a)} \phi(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Damit zeigt man in der üblichen Weise, dass ϕ lokal um a eine Stammfunktion besitzt. ⟩⟩⟩⟩⟩

59 ⊳ A. Ist f im Punkt a holomorph, so ist

$$\operatorname{Res}(f,a) = 0.$$

Dasselbe gilt, wenn f in a eine hebbare Singularität hat.

B. Ist f im Punkt a holomorph, so gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{z-a}, a\right) = f(a).$$

C. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

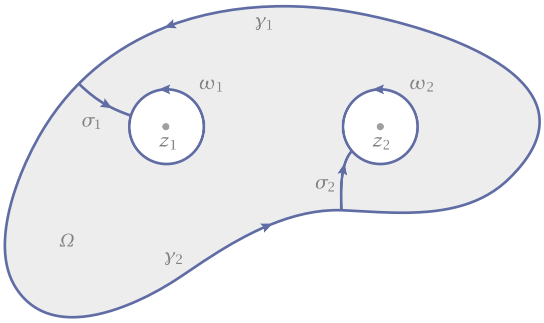
$$\operatorname{Res}((z-a)^n, a) = \begin{cases} 1, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}$$

D. Für $f = (z-a)^m \varphi$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und einer holomorphen Funktion φ ohne Nullstellen in einer Umgebung von a gilt

$$\operatorname{Res}(f'/f, a) = m$$

Abb 20

Beispiel zum Residuensatz



Denn

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Der zweite Summand ist holomorph um a und trägt zum Residuum nichts bei, und das Residuum des ersten ist m.

E. In einer m-fachen Nullstelle von f ist das Residuum somit m [31], und in einer m-fachen Polstelle ist es $-m$ [49].

F. Gilt in a die Laurentreihendarstellung $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$, so ist

$$\operatorname{Res}(f, a) = a_{-1}.$$

Denn die Reihe konvergiert auf einem hinreichend kleinen Kreisring um a gleichmäßig, so dass

$$\operatorname{Res}(f, a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \operatorname{Res}((z-a)^n, a) = a_{-1}.$$

So ist beispielsweise

$$\operatorname{Res}(\mathrm{e}^{1/z}, 0) = 1.$$

Der Residuensatz

Das Residuum ist – salopp gesagt – das, was von einer Funktion f mit Singularität im Punkt a übrig bleibt, wenn man sie um a herum integriert. Daher auch der Name. Die Idee ist nun, das Integral von f über eine beliebige geschlossene Kurve durch Integrale nur um die Singularitäten von f zu ersetzen und damit das gesamte Integral auf die Summe der Residuen von f in ihren Singularitäten zu reduzieren, die die Kurve umläuft. Dazu zunächst ein

Beispiel Die Funktion f sei holomorph bis auf die beiden Polstellen z_1 und z_2 wie in Abbildung 20. Die Kurve

$$\gamma = \gamma_1 + \sigma_1 - \omega_1 - \sigma_1 + \gamma_2 + \sigma_2 - \omega_2 - \sigma_2$$

berandet das schattierte Holomorphiegebiet von f im positiven Sinn. Aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes $_{10}$ gilt also

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Daraus folgt

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\omega_1+\omega_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Da wir die Kreiskurven ω_1 und ω_2 beliebig klein wählen können, folgt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \operatorname{Res}(f,z_1) + \operatorname{Res}(f,z_2).$$

Der *Residuensatz* verallgemeinert diese Idee.

60 **Residuensatz** *Sei f holomorph auf der offenen Menge Ω mit Ausnahme einer Menge S von isolierten Singularitäten. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in S} \operatorname{Res}(f,a)\operatorname{ind}(\gamma,a)$$

für jede in Ω nullhomotope Kurve γ, die S nicht trifft. Die rechts stehende Summe ist hierbei endlich.

Bemerkungen *a.* Verlangt wird, dass die Kurve γ nullhomotop in Ω ist, *einschließlich* der Menge S. Die Homotopie darf sich also über die singulären Punkte hinwegziehen.

b. Ist S leer, so ist die Summe als 0 zu interpretieren. Dies ist gerade der klassische Cauchysche Integralsatz $_{10}$: Ist f holomorph auf Ω, so ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jede nullhomotope Kurve γ in Ω.

⟨⟨⟨⟨ Ist $\gamma\colon I \to \Omega$ nullhomotop in Ω, so existiert eine stetige Abbildung

$$h:\ I\times[0,1] \to \Omega, \quad (t,s) \mapsto h_s(t)$$

so dass $h_0 = \gamma$ und h_1 eine Punktkurve. Da $I\times[0,1]$ kompakt ist, ist auch die Bildmenge

$$K = h(I\times[0,1]) \subset \Omega$$

kompakt ${}_{10.14}$. Ferner gilt

$$\operatorname{ind}(\gamma, a) = 0, \qquad a \notin K,$$

denn keine der Kurven h_s in der Homotopie trifft a, die Windungszahl ist somit konstant in s, und sie ist Null für die Punktkurve h_1.

Innerhalb dieser kompakten Menge K können höchstens endlich viele Punkte von S liegen, da jede Singularität isoliert ist. Es ist also $K \cap S$ leer oder endlich. Aus demselben Grund können sich die singulären Punkte außerhalb von K nicht am Rand von K häufen. Daher existiert auch eine offene Menge $\tilde{\Omega}$ so, dass

$$K \subset \tilde{\Omega} \subset \Omega, \qquad \tilde{\Omega} \cap S = K \cap S.$$

Ist nun $K \cap S = \varnothing$, so reduziert sich die Behauptung auf den Cauchyschen Integralsatz. Sei also $K \cap S = \{a_1, .., a_n\}$ nicht leer. Setzen wir $R_k = \operatorname{Res}(f, a_k)$ und

$$\phi(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{z - a_k},$$

so besitzt ϕ in jedem Punkt von $\tilde{\Omega}$ eine lokale Stammfunktion. Somit ist $\phi(z)\,\mathrm{d}z$ lokal exakt, und es gilt

$$\int_\gamma \phi(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Das aber bedeutet, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} R_k \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a_k} = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} R_k \operatorname{ind}(\gamma, a_k).$$

Da $\operatorname{ind}(\gamma, a) = 0$ für alle $a \in S \setminus \{a_1, .., a_n\}$, gilt damit auch

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in S} \operatorname{Res}(f, a) \operatorname{ind}(\gamma, a)$$

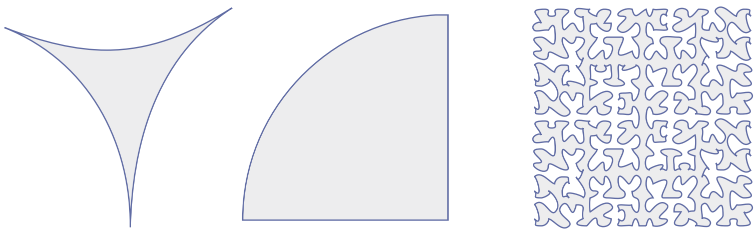
wie behauptet. ⟫⟫⟫

▹ Die Cauchysche Integralformel ${}_{10}$ ist ein Spezialfall des Residuensatzes. Denn $\operatorname{ind}(\partial D_r(a), a) = 1$ und deshalb

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(z)}{z - a}\,\mathrm{d}z = \operatorname{Res}\left(\frac{f}{z - a}, a\right) = f(a). \quad ◃$$

Typischerweise tritt die nullhomotope Integrationskurve als Rand eines geeigneten Gebietes auf. Dafür vereinbaren wir folgende Redeweise.

Abb 21 Regulär berandete Gebiete



Bezeichnung *Ein Gebiet G in $\mathbb{C}$ heißt regulär berandet, wenn es eine reguläre Jordankurve γ gibt, so dass* $\operatorname{ind}(\gamma, a) = 1$ *genau dann, wenn $a \in G$. Mit anderen Worten, G ist das Innengebiet von γ.* ⋊

Man kann zeigen, dass die Randkurve eines regulär berandeten Gebietes nullhomotop *innerhalb* des Abschlusses von G ist. Für die im Folgenden betrachteten Gebiete ist dies offensichtlich. Deshalb beweisen wir den allgemeinen Fall hier nicht.

Im Folgenden bedeutet $G \Subset \Omega$, dass auch $\partial G \subset \Omega$.

61 **Spezialfall des Residuensatz** *Sei f holomorph auf Ω mit Ausnahme einer Menge S von isolierten Singularitäten. Für jedes regulär berandete Gebiet $G \Subset \Omega$, dessen Rand S nicht trifft, gilt dann*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in G \cap S} \operatorname{Res}(f, a).$$

Ist insbesondere $G \cap S = \varnothing$, so ist das Integral Null. ⋊

⟪⟪ Da $S \cap \partial G = \varnothing$ nach Voraussetzung, gilt

$$\operatorname{ind}(\partial G, a) = \begin{cases} 1, & a \in S \cap G, \\ 0, & a \in S \setminus G. \end{cases}$$

Die Summe im Residuensatz 60 reduziert sich daher auf die Summe aller nichttrivialen Residuen, die innerhalb von G liegen. ⟫⟫

▪ Der Satz von Rouché

Mithilfe des Residuensatzes lassen sich zum Beispiel die Null- und Polstellen einer meromorphen Funktion zählen. Ist f meromorph auf Ω und $G \subset \Omega$, so bezeichne $N_G(f)$ und $P_G(f)$ die Anzahl der Null- respektive Polstellen von f in G, jeweils gezählt mit ihren Vielfachheiten.

▷ Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und jede Umgebung G von 0 gilt

$$N_G(z^n) = \max(n,0), \qquad P_G(z^n) = -\min(n,0),$$

und damit

$$N_G(z^n) - P_G(z^n) = n. \qquad ◁$$

62 **Formel von Rouché** *Sei f auf Ω meromorph und nicht konstant. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = N_G(f) - P_G(f)$$

für jedes regulär berandete Gebiet $G \Subset \Omega$, dessen Rand keine Null- oder Polstelle von f trifft. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ In einer m-fachen Nullstelle a gilt [59] $\operatorname{Res}(f'/f, a) = m$, und in einer m-fachen Polstelle $\operatorname{Res}(f'/f, a) = -m$. An allen anderen Stellen verschwindet dieses Residuum. Also addiert das Integral im Satz die Vielfachheiten aller Nullstellen und subtrahiert die Vielfachheiten aller Polstellen in G. Das ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Ist f holomorph auf Ω, so zählt die Formel von Rouché die Nullstellen von f in G mit ihren Vielfachheiten. Das Integral ändert sich aber nicht unter Deformationen von f, solange auf dem Rand ∂G keine Nullstellen auftreten. Dies führt zum

63 **Satz von Rouché** *Seien f und g holomorph auf Ω. Ist $G \Subset \Omega$ ein regulär berandetes Gebiet und gilt*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \qquad z \in \partial G,$$

so haben f und g die gleiche Anzahl Nullstellen in G, gezählt mit ihren Vielfachheiten. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Definiere eine Homotopie zwischen f und g durch

$$\phi_t(z) = f(z) + t(g(z) - f(z)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Dann ist $\phi_0 = f$ und $\phi_1 = g$. Für alle $z \in \partial G$ gilt außerdem

$$|\phi_t(z)| \geqslant |f(z)| - t\,|g(z) - f(z)| > 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Also hat ϕ_t für alle $0 \leqslant t \leqslant 1$ keine Nullstellen auf dem Rand von G. Somit ist

$$N_G(\phi_t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial G} \frac{\phi_t'(z)}{\phi_t(z)} \, \mathrm{d}z, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

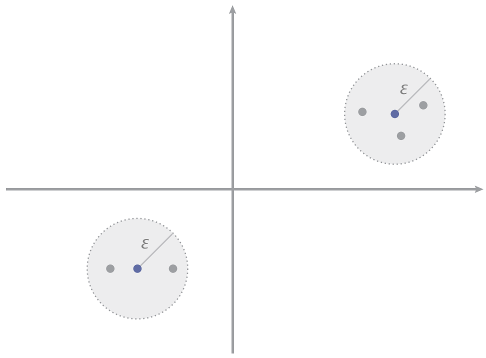


Abb 22

Stetige Abhängigkeit der Nullstellen eines Polynom

wohldefiniert und stetig in t. Da diese Funktion aber nur ganzzahlige Werte annehmen kann, ist sie konstant, und damit

$$N_G(f) = N_G(\phi_0) = N_G(\phi_1) = N_G(g).$$

Das ist die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Anwendungen des Satzes von Rouché

Noch ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra Das Polynom z^n hat eine einzige Nullstelle auf $\mathbb{C}$ mit Vielfachheit n, nämlich 0. Ist φ ein beliebiges Polynom vom Grad kleiner als n, so gibt es ein $r_0 > 0$ so, dass

$$|\varphi(z)| < |z^n|, \qquad |z| \geqslant r \geqslant r_0.$$

Mit dem Satz von Rouché folgt, dass das Polynom $z^n + \varphi$ ebenfalls n Nullstellen in $D_r(0)$ besitzt, gezählt mit ihren Vielfachheiten, und keine weiteren Nullstellen außerhalb von $D_r(0)$.

Stetige Abhängigkeit der Nullstellen eines Polynoms von seinen Koeffizienten Sei a eine Nullstelle eines Polynoms p der Vielfachheit m. Dann besitzt p für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ in der abgeschlossenen Kreisscheibe $\bar{D}_\varepsilon(a)$ keine weiteren Nullstellen, und es ist

$$\min_{z \in \partial D_\varepsilon(a)} |p(z)| = \delta > 0.$$

Jedes Polynom q mit $\|q - p\|_{\partial D_\varepsilon(a)} < \delta$ besitzt dann ebenfalls genau m Nullstellen in $D_\varepsilon(a)$.

Damit kann man auch zeigen, dass die *Menge aller Nullstellen* eines Polynoms stetig von seinen Koeffizienten im folgenden Sinn abhängt. Der Abstand zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{C}$ sei

$$d_s(A,B) \coloneqq \max_{a\in A} \operatorname{dist}(a,B) + \max_{b\in B} \operatorname{dist}(b,A).$$

Der Abstand zweier normierter Polynome $p = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + .. + a_0$ und $q = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + .. + b_0$ vom selben Grad n sei

$$d_c(p,q) \coloneqq \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} |a_i - b_i| .$$

Sei nun $N(p)$ die Nullstellenmenge des Polynoms p in $\mathbb{C}$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jedes normierte Polynom q vom Grad n gilt:

$$d_c(q,p) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_s(N(q), N(p)) < \varepsilon.$$

Die Details sind als Übung überlassen.

Stetige Abhängigkeit des Spektrums einer Matrix von deren Koeffizienten Aus der letzten Beobachtung ergibt sich auch die stetige Abhängigkeit des Spektrums einer $n \times n$-Matrix M von deren Koeffizienten. Denn das Spektrum ist gerade die Nullstellenmenge des charakteristischen Polynoms

$$\chi_M = \det(\lambda I - M)$$

von M, und dieses hängt offensichtlich stetig von den Koeffizienten von M ab.

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Rouché ist die

64 **Summationsformel** *Seien f und g holomorph auf Ω und f nicht konstant. Bezeichnet $m(a,f)$ die Vielfachheit einer Nullstelle a von f, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) \,\mathrm{d}z = \sum_{a\in G\cap N(f)} m(a,f) g(a)$$

für jedes regulär berandete Gebiet $G \Subset \Omega$, dessen Rand die Nullstellenmenge $N(f)$ von f nicht trifft. ⋊

Mit $g \equiv 1$ ist dies die Formel von Rouché für holomorphe Funktionen.

⟪⟪ In der Umgebung einer m-fachen Nullstelle a ist $f = (z-a)^m \varphi(z)$ mit einer nichtverschwindenden holomorpghen Funktion φ. Also ist

$$\frac{f'g}{f} = \frac{mg}{z-a} + \frac{\varphi' g}{\varphi},$$

und damit

$$\operatorname{Res}(f'g/f, a) = \operatorname{Res}(mg/(z-a), a) = mg(a).$$

Mit dem Residuensatz folgt daraus die Behauptung. ⟫⟫

A. Mit $g(z) = z^p$ und $p \geqslant 0$ erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} z^p \, \mathrm{d}z = \sum_{a \in N_G(f)} m(a, f) a^p .$$

B. Besitzt f eine einzige einfache w-Stelle in G, so liefert das vorangehende Beispiel mit $p = 1$ und $f - w$ anstelle von f genau den Punkt in G, an dem f den Wert w annimmt. Ist also $w = f(a)$, so gilt in diesem Fall

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z) - w} z \, \mathrm{d}z = a = f^{-1}(w).$$

C. Auf diese Weise kann man die Umkehrabbildung einer biholomorphen Abbildung darstellen. Ist $f : \Omega \to \Omega'$ biholomorph und G ein einfach zusammenhängendes, regulär berandetes Gebiet in Ω, so wird f^{-1} auf $G' = f(G)$ dargestellt durch

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z) - w} z \, \mathrm{d}z, \qquad w \in G'.$$

28.9
Berechnung von Integralen

Mit Hilfe des Residuensatzes lassen sich reelle Integrale bestimmen. Dazu formulieren wir noch zwei einfache Regeln zur Bestimmung von Residuen, die für das Weitere ausreichen.

65 **Regel 1** *Sei $f = g/h$ der Quotient zweier lokal um a holomorpher Funktionen. Besitzt h in a eine einfache Nullstelle, so ist*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Es ist $h(z) = (z - a)\varphi(z)$ mit einer holomorphen Funktion φ ohne Nullstellen bei a. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist dann mit der Cauchyschen Integralformel

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_\varepsilon(a)} \frac{g(z)/\varphi(z)}{z - a} \, \mathrm{d}z = \frac{g(a)}{\varphi(a)}.$$

Mit $\varphi(a) = h'(a)$ folgt die Behauptung.

66 **Regel 2** *Sei $f = g/(z - a)^{m+1}$ mit $m \geqslant 0$ und einer holomorphen Funktion g ohne Nullstellen um a. Dann ist*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{g^{(m)}(a)}{m!}.$$

⟪ Der Koeffizient a_{-1} in der Laurentreihe von f ist gerade der m-te Koeffizient b_m in der Taylorreihe von g, jeweils an der Stelle a. Das ergibt die Behauptung. ⟫

▪ Uneigentliche Integrale

Als erste Anwendung betrachten wir uneigentliche Integrale wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}.$$

Wir können den Integranden als rationale Funktion auf $\mathbb{C}$ auffassen. Um den Residuensatz anwenden zu können, muss der Nennergrad wenigstens um 2 größer sein als der Zählergrad. Gilt für eine rationale Funktion $f = p/q$ genauer

$$\operatorname{grad} q = \operatorname{grad} p + m, \qquad m \geqslant 1,$$

so spricht man von einer *m-fachen Nullstelle im Unendlichen*.

67 **Satz** *Die rationale Funktion f besitze auf $\mathbb{R}$ keine Polstellen und eine mindestens zweifache Nullstelle im Unendlichen. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in\mathbb{H}^+} \operatorname{Res}(f,a),$$

wobei $\mathbb{H}^+$ die obere komplexe Halbebene bezeichnet. ⋊

Bemerkung Die rationale Funktion f besitzt in der oberen Halbebene nur endlich viele Punkte – nämlich Pole – an denen ihr Residuum nicht verschwindet. Die Summe ist also als Summe über diese endlich vielen Pole gemeint. ⊸

⟪ Da f eine mindestens zweifache Nullstelle im Unendlichen besitzt, gibt es eine Konstante $M > 0$ so, dass $|f(z)| \leqslant M/|z|^2$ für $|z|$ hinreichend groß. Da f nach Voraussetzung keine Pole auf der reellen Achse besitzt, ist das uneigentliche Integral absolut konvergent.

Sei K_r die obere Halbkreisscheibe vom Radius r mit Mittelpunkt 0 wie in Abbildung 23. Für alle hinreichend großen r gilt aufgrund des Residuensatzes

$$\int_{\partial K_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_0+\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in\mathbb{H}^+} \operatorname{Res}(f,a).$$

Hierbei ist

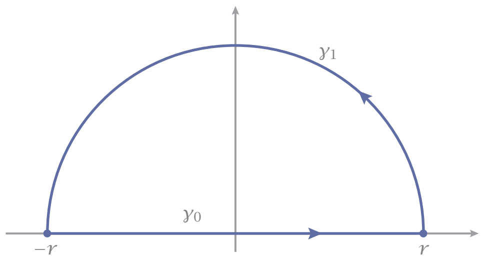
$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-r}^{r} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

während

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant L(\gamma_1)\,\|f\|_{\gamma_1} \leqslant \pi r\,\frac{M}{r^2} = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Abb 23

Der obere Halbkreis K_r



Dieser Term verschwindet also für $r \to \infty$, und die anderen beiden Gleichungen ergeben die Behauptung. ⟫⟫⟫

▹▸ *Beispiele* A. Betrachte $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$. Die rationale Funktion

$$f : z \mapsto \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+\mathrm{i})^2(z-\mathrm{i})^2}$$

hat keinen Pol auf der reellen Achse und eine vierfache Nullstelle in ∞. Darüber hinaus hat sie je eine zweifache Polstelle bei i und $-\mathrm{i}$. Mit Regel 2 für die Funktion $g = (z+\mathrm{i})^{-2}$ und $m = 1$ ist

$$\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}) = \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}\right)'\bigg|_{z=\mathrm{i}} = -\frac{2}{(2\mathrm{i})^3} = \frac{1}{4\mathrm{i}}.$$

Damit wird

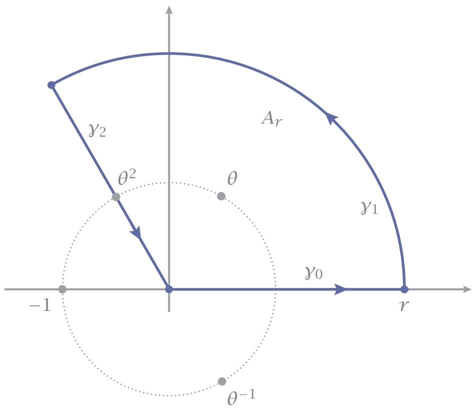
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}.$$

B. Mit $f = 1/(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$ folgt ebenso

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}) = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \pi. \quad ◂◃$$

Abb 24

Der Kreissektor A_r und die drei Pole von $(1+z^3)^{-1}$



■ **Integrale über $[0, \infty)$**

▹ Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$$

ist absolut konvergent, erstreckt sich aber nur über die positive reelle Achse. Wegen der z^3-Symmetrie können wir aber den Residuensatz anwenden, indem wir über Drittel- statt Halbkreise integrieren.

Die Funktion

$$f : z \mapsto \frac{1}{1+z^3}$$

besitzt einfache Pole auf dem Einheitskreis bei -1, $\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ und $\theta^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$. Integrieren wir über den Rand des Drittelkreissektors A_r mit $r > 1$ wie in Abbildung 24, so enthält dieser nur den Pol bei θ. Mit Regel 1 und $\theta^3 = -1$ erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial A_r} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^3} = \operatorname{Res}(f, \theta) = \frac{1}{3\theta^2} = -\frac{\theta}{3}.$$

Mit der Parametrisierung $z = \theta^2 t$ und $(\theta^2 t)^3 = t^3$ ist

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_0^r f(t)\theta^2\,\mathrm{d}t = -\theta^2 \int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

während das Integral über γ_1 für $r \to \infty$ mit den üblichen Abschätzungen verschwindet.

Also gilt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\partial A_r} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^3} = \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^3} = (1-\theta^2) \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}.$$

28.60

Insgesamt erhalten wir damit

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\,\frac{\theta}{\theta^2-1}.$$

Nun ist noch

$$\frac{\theta^2-1}{\theta} = \theta - \theta^{-1} = 2\mathrm{i}\Im\theta = 2\mathrm{i}\sin\pi/3 = \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Also erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

◂

▪ **Cauchyscher Hauptwert**

Besitzt die rationale Funktion f eine mindestens zweifache Nullstelle im Unendlichen, aber Pole $x_1,..,x_n$ auf der reellen Achse, so kann man das Integral über $\mathbb{R}$ im Sinne des *Cauchyschen Hauptwerts* verstehen. Dieser ist definiert als

$$\mathrm{H}\!\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{[-r,r]\setminus I_\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

wobei

$$I_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{n}(x_k-\varepsilon, x_k+\varepsilon).$$

▹ Es ist

$$\mathrm{H}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right) = 0,$$

aber

$$\mathrm{H}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = \infty.$$

◂

68 **Satz** *Die rationale Funktion f besitze auf der reellen Geraden einfache Polstellen $x_1,..,x_n$ und eine mindestens zweifache Nullstelle im Unendlichen. Dann gilt für den Cauchyschen Hauptwert*

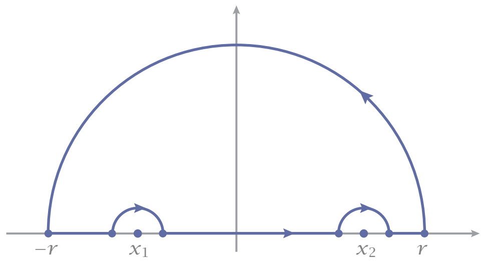
$$\mathrm{H}\!\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\sum_{a\in\mathbb{H}^+}\mathrm{Res}(f,a) + \pi\mathrm{i}\sum_{a\in\mathbb{R}}\mathrm{Res}(f,a).$$

⋊

⟪⟪ Im letzten Beweis ist das Integral über $[-r,r]$ für alle r hinreichend groß zu ersetzen durch ein Wegintegral, wo um jeden reellen Pol ein Halbkreis vom Radius ε in der oberen komplexen Halbebene verfolgt wird – siehe Abbildung 25. Da jeder Pol *einfach* ist, trägt im Limes $\varepsilon\to 0$ das Halbkreisintegral um x_k die *Hälfte* des jeweiligen Residuums zum Gesamtintegral bei. Das ergibt die Behauptung. ⟫⟫

Abb 25

Zum Cauchyschen Hauptwert



Die Funktion

$$f: \; z \mapsto \frac{1}{z(z^2+1)}$$

hat einfache Pole in $0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$, mit $\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}) = -1/2$ und $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$. Also ist

$$2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}(f, \mathrm{i}) + \pi\mathrm{i} \operatorname{Res}(f, 0) = 0$$

und damit – wie es auch sein soll –

$$\mathrm{H}\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+t} = 0.$$

Fourierintegrale

Die Fouriertransformierte einer L^1-Funktion f,

$$\hat{f}: \quad \omega \mapsto \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

hatten wir bereits in Kapitel 26 studiert. Für analytische f können wir sie mithilfe des Residuenkalküls im Prinzip berechnen.

69 **Satz** *Sei f analytisch auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme einer endlichen Menge S von nicht reellen Singularitäten. Gilt $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$, so ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} \displaystyle\sum_{a\in S\cap\mathbb{H}^+} \operatorname{Res}(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}, a), & \omega < 0, \\ -2\pi\mathrm{i} \displaystyle\sum_{a\in S\cap\mathbb{H}^-} \operatorname{Res}(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}, a), & \omega > 0. \end{cases}$$

Sei $\omega < 0$ und $\phi = f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}$. Betrachten wir hinreichend große Quadrate

$$Q_{s,r} = (-s, r) \times (0, r+s) \subset \mathbb{H}^+,$$

so ist mit den Bezeichnungen von Abbildung 26

$$\int_{\partial Q_{s,r}} \phi(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1+\ldots+\gamma_4} \phi(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in S\cap\mathbb{H}^+} \operatorname{Res}(\phi, a).$$

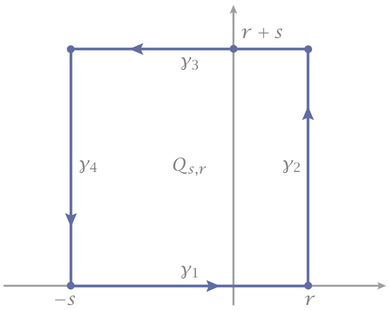


Abb 26
Das Quadrat $Q_{s,r}$

Für γ_2 ist mit $0 \leqslant t \leqslant r+s$ und $z = r + \mathrm{i}t$

$$\left| \int_{\gamma_2} \phi(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \int_0^{r+s} |f(r+\mathrm{i}t)|\,\mathrm{e}^{\omega t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r+\mathrm{i}t)| \int_0^\infty \mathrm{e}^{\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Das letzte Integral ist endlich wegen $\omega < 0$, und das Supremum verschwindet für $r \to \infty$, da wir $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$ annehmen. Entsprechendes gilt für das Integral über γ_4.

Entlang γ_3 haben wir $z = r + \mathrm{i}u - t$ mit $0 \leqslant t \leqslant u \coloneqq r+s$, also

$$\left| \int_{\gamma_3} \phi(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \int_0^{u} |f(r-t+\mathrm{i}u)|\,\mathrm{e}^{\omega u}\,\mathrm{d}t \leqslant u\mathrm{e}^{\omega u} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\mathrm{i}u)|\,.$$

Auch hier konvergiert der letzte Ausdruck gegen Null für $u = r+s \to \infty$ wegen $\omega < 0$. Damit erhalten wir insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \lim_{s,r\to\infty} \int_{\gamma_1} \phi(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in S\cap\mathbb{H}^+} \operatorname{Res}(\phi, a).$$

Ist $\omega > 0$, so argumentiert man analog mit einem entsprechenden Quadrat in der unteren komplexen Halbebene $\mathbb{H}^-$. ⟫⟫⟫

Bemerkung Ersetzt man das von den zwei Parametern s und r abhängende Quadrat Q durch den oberen Halbkreisrand mit Radius r und Mittelpunkt 0, so erhält man nur die Existenz des *Hauptwertes*

$$\mathsf{H}\!\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \coloneqq \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Der Hauptwert kann existieren, ohne dass die Integrale über $(-\infty, 0]$ und $[0,\infty)$ existieren, wie das Beispiel der Sinusfunktion – oder jeder anderen ungeraden Funktion – zeigt. ⊸

⊳ Betrachte die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + c^2}, \qquad c > 0.$$

Die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{z^2 + c^2} = \frac{1}{(z - \mathrm{i}c)(z + \mathrm{i}c)}$$

ist rational, hat keine reellen Polstellen und eine zweifache Nullstelle im Unendlichen. Sie hat je einen einfachen Pol bei $\mathrm{i}c$ und $-\mathrm{i}c$, mit

$$\operatorname{Res}(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}, \mathrm{i}c) = \left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}}{z + \mathrm{i}c}\right|_{z=\mathrm{i}c} = \frac{\mathrm{e}^{\omega c}}{2\mathrm{i}c}$$

sowie

$$\operatorname{Res}(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}, -\mathrm{i}c) = \left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}}{z - \mathrm{i}c}\right|_{z=-\mathrm{i}c} = -\frac{\mathrm{e}^{-\omega c}}{2\mathrm{i}c}.$$

Die erste Identität benötigen wir für $\omega < 0$, die zweite für $\omega > 0$, und erhalten

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{t^2 + c^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{c}\mathrm{e}^{-|\omega| c}.$$

Dies gilt dann für *alle* $\omega \in \mathbb{R}$. ⊲

Integrale über $[0, 2\pi]$

Ein Integral wie

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{c + \cos t}, \qquad c > 1, \tag{9}$$

können wir als Integral über den Rand des Einheitskreises auffassen, indem wir

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},$$

schreiben. Verfahren wir entsprechend mit $\sin t$, so erhalten wir folgendes allgemeines Ergebnis, wobei $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

70 **Satz** *Es sei F eine rationale Funktion in den zwei reellen Variablen x und y ohne Pole auf dem Einheitskreis. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{a \in \mathbb{D}} \operatorname{Res}(f, a)$$

mit

$$f(z) = \frac{1}{z} F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right). \qquad \rtimes$$

⟪⟪ Mit der Standardparametrisierung des Einheitskreises, $t \mapsto z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, und der Definition von f wird

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{i}\int_0^{2\pi} F(\Re\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \Im\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Mit dem Residuensatz folgt daher

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}}\int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\sum_{a\in\mathbb{D}} \operatorname{Res}(f, a).$$ ⟫⟫

▷ *Beispiel* Im Integral (9) ist

$$F(x) = \frac{1}{c+x}$$

und damit

$$f(z) = \frac{1}{z}F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \frac{1}{z\left(c+\dfrac{z+z^{-1}}{2}\right)} = \frac{2}{z^2+2cz+1}.$$

Das quadratische Polynom $z^2+2cz+1$ hat für $c>1$ genau zwei reelle Nullstellen, je eine innerhalb und außerhalb des Einheitskreises. Somit hat f in $\mathbb{D}$ genau einen einfachen Pol bei

$$a = -c + \sqrt{c^2-1},$$

und mit Regel 1 ist

$$\operatorname{Res}(f, a) = \left.\frac{2}{2z+2c}\right|_{z=a} = \frac{1}{a+c} = \frac{1}{\sqrt{c^2-1}}.$$

Also erhalten wir

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{c+\cos t} = 2\pi\operatorname{Res}(f, a) = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2-1}}.$$ ◁

▪ Eulers Formel

Hierbei handelt es sich um die Identität

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Betrachte dazu die meromorphe Funktion

$$f\colon\ z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z,$$

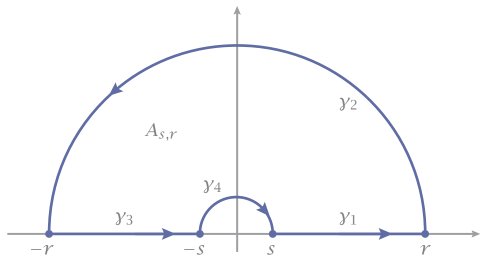


Abb 27

Der halbe Kreisring $A_{s,r}$

die einen einzigen einfachen Pol in 0 besitzt. Integrieren wir f über den oberen halben Kreisring $A_{s,r}$ wie in Abbildung 27 so ist

$$\int_{\partial A_{s,r}} f\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1+\ldots+\gamma_4} f\,\mathrm{d}z = 0.$$

Für die einzelnen Kurvenintegrale gilt mit den üblichen Parametrisierungen

$$\int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-r(\sin t - \mathrm{i}\cos t)}\,\mathrm{d}t \to 0, \qquad r \to \infty,$$

$$\int_{\gamma_4} f\,\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-s(\sin t - \mathrm{i}\cos t)}\,\mathrm{d}t \to -\mathrm{i}\pi, \qquad s \to 0,$$

sowie

$$\int_{\gamma_1+\gamma_3} f\,\mathrm{d}z = \int_s^r \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{-r}^{-s} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_s^r \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}\int_s^r \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Das letzte Integral konvergiert für $s \to 0$ und $r \to \infty$, und wir erhalten

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\mathrm{i}}(-\mathrm{i}\pi) = \frac{\pi}{2},$$

wie behauptet.

Mit diesem Integral erhalten wir auch eine sehr elegante und kompakte Darstellung der Signumfunktion:

Notiz *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t. \qquad \rtimes$$