PD. Dr. P.H. Lesky

Universität Stuttgart

Wintersemester 2014/15

Analysis I

Warnung: Dies ist kein vollständiger Vorlesungsaufschrieb. Dieses Skript ist zur Erleichterung beim Mitschreiben gedacht, Ergänzungen sollen nachgetragen werden.

1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik und Beweise

1.1 Aussage: Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist (w/f).

1.2 Verknüpfung von Aussagen p, q:

Operation	in Worten
$\neg p$	nicht p, Negation von p
$p \vee q$	p oder q, logisches Oder
$p \wedge q$	p und q, logisches Und
$p \to q$	wenn p dann q, Subjunktion
$p \leftrightarrow q$	genau dann p wenn q, Bijunktion

Definition durch Wahrheitstabelle

p	$\neg p$
w	f
f	w

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

1.3 Beispiele: 1) Wir sind in Baden-Württemberg:

$$\text{Wenn } \underbrace{\text{es Mitternacht ist}}_{p}, \text{ dann } \underbrace{\text{ist die Sonne nicht zu sehen}}_{q}.$$

2) Wenn $x < 3$, dann $x < 5$.

1.4 Definition: Die **Implikation** $p \Rightarrow q$ bedeutet: Aus p folgt q, die Aussage $p \to q$ ist wahr.
Also: Wenn p wahr ist, dann ist auch q wahr. Wenn p falsch ist, wird über q keine Aussage gemacht.
Man sagt: p ist **hinreichend** für q,
q ist **notwendig** für p.

1.5 Beispiel: $|x-4|<1 \;\Rightarrow\; x<5$.
Wenn $|x-4|<1$ erfüllt ist, ist das hinreichend für $x<5$.
$x<5$ muss notwendig erfüllt sein, damit $|x-4|<1$ wahr sein kann.

1.6 Definition: Die **Äquivalenz** $p \Leftrightarrow q$ bedeutet, dass die Aussage $p \leftrightarrow q$ wahr ist.
Also: Entweder sind beide Aussagen wahr oder beide falsch.

1.7 Beispiele: **1)**

$$\begin{aligned} (x-4)^2<1 &\Leftrightarrow |x-4|<1 \\ &\Leftrightarrow -1<x-4<1 \quad \Big| +4 \\ &\Leftrightarrow 3<x<5 \end{aligned}$$

2) $(p \to q) \;\Leftrightarrow\; (\neg q \to \neg p)$. Beweis durch Wahrheitstabelle:

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Die Bijunktion ist immer wahr $\Rightarrow$ Äquivalenz ist bewiesen.

3) De Morgansche Gesetze (Beweis in Übungen):

$$\begin{aligned} \neg(p \vee q) &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \\ \neg(p \wedge q) &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \end{aligned}$$

1.8 Beweisprinzipien: 1) Direkter Beweis: Zeigt $p \Rightarrow q$, indem aus der Gültigkeit von p durch Umformungen oder Folgerungen die Gültigkeit von q bewiesen wird.

2) Kontraposition: Zeigt $p \Rightarrow q$ durch Nachweis von $\neg q \Rightarrow \neg p$ (vgl. letztes Beispiel 2)).

3) Widerspruchsbeweis: Zeigt $p \Rightarrow q$ durch Nachweis von $p \wedge q \Rightarrow f$ (geschrieben $\lightning$, Widerspruch).

2) und 3) heißen **indirekte Beweise**.

1.9 Beispiel: Beweise $\underbrace{|x-4|<1}_{p} \Rightarrow \underbrace{x<5}_{q}$.

1) Direkt: Gehe davon aus, dass $|x-4|<1$ wahr ist. Fall a) $x-4\geq 0$

$$\Rightarrow\ x-4=|x-4|<1 \quad \Big| +4$$
$$\Rightarrow\ x<5 \ \Leftrightarrow\ q$$

Fall b) $x-4<0 \quad \Big| +4$

$$\Leftrightarrow\ x<4$$
$$\overset{4\leq 5}{\Rightarrow}\ x<5\ \Leftrightarrow\ q$$

2) Kontraposition: Beweise $\underbrace{x\geq 5}_{\neg q}\ \Rightarrow\ \underbrace{|x-4|\geq 1}_{\neg p}$.

$$x\geq 5 \overset{x-4\geq 0}{\Rightarrow} |x-4|=x-4\geq 5-4=1\ \Rightarrow\ |x-4|\geq 1\ \Leftrightarrow\ \neg p.$$

3) Widerspruchsbeweis: Annahme $|x-4|<1\ \wedge\ x\geq 5$.

$$x\geq 5 \overset{\text{wie bei 2)}}{\Rightarrow} |x-4|\geq 1 \overset{\text{Ann}}{\Rightarrow} 1\leq |x-4|<1\ \Rightarrow\ 1<1\ \lightning$$

1.2 Mengen

1.10 Definition (naiv): Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen **Elemente** der Menge. Schreibe $m\in M$, falls das Objekt m Element der Menge M ist, $m\notin M$ andernfalls. Zwei Mengen A,B heißen **gleich** ($A=B$), wenn sie dieselben Elemente besitzen, d.h. wenn

$$x\in A\ \Leftrightarrow\ x\in B.$$

1.11 Definition von Mengen:

- Explizit: $M=\{1,2,3\}$, $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.
- Durch Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft:

$$P\ :=\ \{n\in\mathbb{N} : n \text{ ist Primzahl}\}=\{n\in\mathbb{N}\mid n \text{ ist Primzahl}\}$$

- $\emptyset$ oder $\{\}$: Leere Menge, enthält kein Element.

1.12 Bemerkungen: **1)** Ein Element kann nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein:

$$\{m,a,t,h,e,m,a,t,i,k\}\ =\ \{m,a,t,h,e,i,k\}.$$

2) Es kommt nicht auf die Reihenfolge an:

$$\{1,2,3\}\ =\ \{1,3,2\}.$$

1.13 Definition: Die Menge A heißt **Teilmenge** der Menge B ($A \subseteq B$), falls

$$x \in A \;\Rightarrow\; x \in B.$$

Falls $A \subseteq B \;\wedge\; A \neq B$, heißt A **echte Teilmenge** von B ($A \subsetneqq B$).

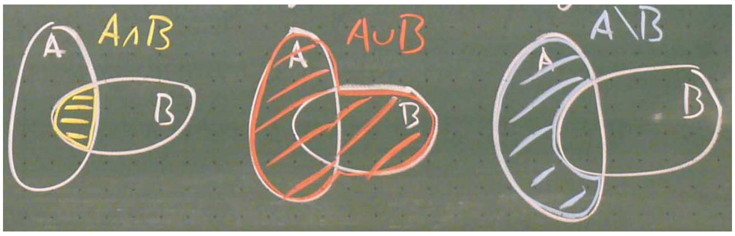
1.14 Satz: Für jede Menge A gilt $\emptyset \subseteq A$.

Beweis: $x \in \emptyset$ ist falsch, also ist $x \in \emptyset \;\rightarrow\; x \in A$ immer wahr. $\square$

1.15 Verknüpfungen von Mengen A, B:

Schnittmenge:	$A \cap B := \{x : x \in A \;\wedge\; x \in B\}$,
Vereinigungsmenge:	$A \cup B := \{x : x \in A \;\vee\; x \in B\}$,
Differenzmenge:	$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$.

Veranschaulichung im Venn-Diagramm.



1.16 Definition: Zwei Mengen A, B heißen **disjunkt**, falls $A \cap B = \emptyset$.

1.17 Rechenregeln für Mengen A, B:

Idempotenz:	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Assoziativgesetz:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Distributivgesetze:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
De Morgansche Gesetze:	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	
	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	

Beweis: (des letzten Gesetzes). Wir benötigen

$$p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad \text{(Distributivgesetz)}$$

für Aussagen p, q, r.

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cap C) \quad & \Leftrightarrow \quad x \in A \;\wedge\; \neg(x \in B \cap C) \\
& \Leftrightarrow \quad x \in A \;\wedge\; \underbrace{\neg(x \in B \;\wedge\; x \in C)}_{\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)} \\
& \overset{\text{De Morgan}}{\underset{\text{Aussagenlogik}}{\Leftrightarrow}} \quad x \in A \;\wedge\; \big(\neg(x \in B) \;\vee \neg(x \in C)\big) \\
& \overset{\text{Distributivgesetz}}{\underset{\text{Aussagenlogik}}{\Leftrightarrow}} \quad \big(x \in A \;\wedge\; \neg(x \in B)\big) \;\vee\; \big(x \in A \;\wedge\; \neg(x \in C)\big) \\
& \Leftrightarrow \quad \big(x \in (A \setminus B)\big) \;\vee\; \big(x \in (A \setminus C)\big) \\
& \Leftrightarrow \quad x \in (A \setminus B \cup A \setminus C)
\end{aligned}$$

□

1.18 Definition: Sei A Menge. dann heißt

$$\mathcal{P}(A) \;:=\; \{B : B \text{ ist Menge } \wedge\; B \subseteq A\}$$

Potenzmenge von A.

1.19 Beispiele: **1)** $A = \{1, 2, 3\} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$.

2) $A = \big\{1, \{2\}\big\} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \big\{\{2\}\big\}, \big\{1, \{2\}\big\}\Big\}$.

3) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

1.20 Definition: Seien $A, B \neq \emptyset$ Mengen. Dann heißt

$$A \times B \;:=\; \Big\{\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} : a \in A \;\wedge\; b \in B\Big\}$$

Kreuzprodukt von A und B. Man schreibt

$$\begin{aligned}
(a, b) \;&:=\; \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} \\
A \times B \;&:=\; \big\{(a, b) : a \in A \;\wedge\; b \in B\big\}
\end{aligned}$$

und nennt (a, b) **geordnetes Paar**.

1.21 Beispiel: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \big\{(m, n) : m \in \mathbb{N} \;\wedge\; n \in \mathbb{N}\big\}$ (Menge der Gitterpunkte).

1.22 Satz: Für $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$ gilt

$$(a,b) = (a',b') \;\Leftrightarrow\; a = a' \;\wedge\; b = b'.$$

Beweis: **1)** "$\Rightarrow$": Sei $(a,b) = (a',b') \;\Leftrightarrow\; \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\}$

Fall a) $a \neq b$: $\{a\}$ hat 1 Element

$\{a,b\}$ hat 2 Elemente

$\{a'\}$ hat 1 Element

$\Rightarrow$ $\{a',b'\}$ hat 2 Elemente, insbesondere $a' \neq b'$

$\Rightarrow$ $\{a\} = \{a'\} \;\wedge\; \{a,b\} = \{a',b'\}$

$\Rightarrow$ $a = a' \;\wedge\; b = b'$.

Fall b) $a = b \;\Rightarrow\; \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\}\}$

$\Rightarrow$ $\{\{a'\},\{a',b'\}\}$ hat nur 1 Element

$\Rightarrow$ $a' = b' \;\wedge\; \{\{a\}\} = \{\{a'\}\}$

$\Rightarrow$ $a = a' \;\wedge\; b = a = a' = b'$

2) "$\Leftarrow$": $a = a' \;\wedge\; b = b' \;\Rightarrow\; \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\} \;\Leftrightarrow\; (a,b) = (a',b')$. □

Also: Es kommt auf die Reihenfolge an: Für $a \neq b$ gilt $(a,b) \neq (b,a)$.

1.23 Russelsche Antinomie: Die naive Mengenlehre ist nicht widerspruchsfrei. Betrachte

$$M \;:=\; \{A : A \text{ ist Menge} \;\wedge\; A \notin A\}.$$

Dann ist weder $M \notin M$ noch $M \in M$ wahr.

1.3 Quantoren

Motivation: Der Satz „n ist eine gerade Zahl“ ergibt für verschiedene $n \in \mathbb{N}$ eine wahre oder eine falsche Aussage.

1.24 Definition:: Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge.

1) Ein sprachliches Gebilde $H(m)$, das durch Einsetzen beliebiger $m \in M$ eine Aussage ergibt, heißt **Aussageform** auf M.

2) Sei H eine Aussageform auf M. Die Aussage

(i) $\forall x \in M : H(x)$ (ii) $\exists x \in M : H(x)$ (iii) $\exists! x \in M : H(x)$

ist genau dann wahr, wenn $H(x)$ durch Einsetzen

(i) aller $x \in M$ (ii) mindestens eines $x \in M$ (iii) genau eines $x \in M$

eine wahre Aussage ergibt

1.25 Negation von Aussagen mit Quantoren:

$$\neg\big(\forall x \in M : H(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in M : \neg H(x)$$
$$\neg\big(\exists x \in M : H(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in M : \neg H(x)$$

1.26 Beispiel: Lösbarkeit von Gleichungen: $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : a \cdot x = b$.
Negation: $\exists a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : a \cdot x \neq b$.

1.27 Definition: Sei $M \neq \emptyset$ Menge. Für jedes Element $m \in M$ sei eine Menge A_m definiert (M heißt **Indexmenge**). Dann:

$$\bigcap_{m \in M} \quad := \quad \{x \mid \forall m \in M : x \in A_m\}$$
$$\bigcup_{m \in M} \quad := \quad \{x \mid \exists m \in M : x \in A_m\}$$

1.28 Beispiele: **1)** $M = \{1, 2, 3\},\ A_1 = \mathbb{N},\ A_2 = \{-1, 0, 1\},\ A_3 = \{-2\}$:
$\bigcup\limits_{m \in M} A_m = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},\ \bigcap\limits_{m \in M} A_m = \emptyset$.

2) $M = \mathbb{R},\ A_m = [1, m[$ für $m \in \mathbb{R}$:
$\bigcup\limits_{m \in \mathbb{R}} A_m = [1, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\},\ \bigcap\limits_{m \in \mathbb{R}} A_m = \emptyset,\ \bigcap\limits_{m \geq 1} A_m = \{1\}$.

1.4 Relationen

1.29 Definition: Seien $A, B \neq \emptyset$ Mengen. Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt **Relation**. Für $(a, b) \in R$ schreibe aRb: a steht in Relation zu b. Falls $A = B$, also $R \subseteq A \times A$, heißt R **Relation auf A**.

1.30 Beispiele: **1)** $\leq := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \leq n\}$ ist Relation auf $\mathbb{N}$.

2) GU $:= \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m - n$ ist durch 2 teilbar$\}$ ist Relation auf $\mathbb{Z}$.

1.31 Wichtige Eigenschaften: Eine Relation auf A heißt

- **reflexiv**, falls $\forall a \in A : (a, a) \in R$,
- **symmetrisch**, falls $\forall a, b \in A : \big((a, b) \in R \ \Rightarrow\ (b, a) \in R\big)$,

- **antisymmetrisch**, falls $\forall a,b \in A : \big((a,b) \in R \ \wedge (b,a) \in R \ \Rightarrow \ a = b\big)$,
- **transitiv**, falls $\forall a,b,c \in A : \big((a,b) \in R \ \wedge \ (b,c) \in R \ \Rightarrow \ (a,c) \in R\big)$.

1.32 Beispiel: GU ist

1) reflexiv: $m - m = 0$ ist durch 2 teilbar $\Rightarrow \ (m,m) \in$ GU.

2) symmetrisch: $m - n$ gerade $\Rightarrow \ n - m$ gerade.

3) transitiv: Sei $(m,n) \in$ GU $\ \wedge \ (n,k) \in$ GU. Zeige: $(m.k) \in$ GU.

$$m - k \ = \ \underbrace{m - n}_{\text{gerade}} + \underbrace{n - k}_{\text{gerade}} \text{ ist gerade } \ \Rightarrow \ (m,k) \in \text{GU}.$$

1.33 Definition: Eine Relation R auf A heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Schreibe $a \sim b, \ a \sim_R b$ statt aRb. Zu $a \in A$ heißt

$$[a] \ = \ [a]_R \ := \ \{b \in A : (a,b) \in R\}$$

Äquivalenzklasse zu a.

1.34 Beispiel: $[1]_{\text{GU}} \ = \ \{m \in \mathbb{Z} : m \text{ ist ungerade}\} \ = \ [3]_{\text{GU}} \ = \ [5]_{\text{GU}} \ = \ \dots$
$[0]_{\text{GU}} \ = \ \{m \in \mathbb{Z} : m \text{ ist gerade}\}$.
Durch GU wird $\mathbb{Z}$ in zwei disjunkte Mengen zerlegt.

1.35 Definition: Sei $A \neq \emptyset$ Menge und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ mit

1) $\displaystyle\bigcup_{M \in \mathcal{K}} M \ = \ A$ und

2) $\forall M, N \in \mathcal{K} : (M \cap N \neq \emptyset \ \Rightarrow \ M = N)$.

Dann heißt $\mathcal{K}$ **Klasseneinteilung** von A.

1.36 Satz: **1)** Ist $\mathcal{K}$ eine Klasseneinteilung von A, so definiert

$$R \ := \ \big((a,b) \in A \times A \ \big| \ \exists M \in \mathcal{K} : a \in M \ \wedge \ b \in M\big\}$$

eine Äquivalenzrelation auf A, und es gilt $\mathcal{K} = \{[a]_R : a \in A\}$.

2) Ist $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation, so definiert

$$\mathcal{K} \ := \ \{[a]_R : a \in A\}$$

eine Klasseneinteilung von A.

Beweis: **1)** R ist

a) reflexiv, denn: Zu jedem $a \in A$ existiert ein $M_a \in \mathcal{K}$ mit $a \in M_a$ da $\bigcup\limits_{M \in \mathcal{K}} M = A$.

$$\Rightarrow \ \exists M_a \in \mathcal{K} : a \in M_a \ \wedge \ a \in M_a \ \Rightarrow \ (a,a) \in R.$$

b) symmetrisch:

$$(a,b) \in R \overset{\text{Def. } R}{\Leftrightarrow} \exists M \in \mathcal{K} : \underbrace{a \in M \ \wedge \ b \in M}_{\Leftrightarrow \ b \in M \ \wedge \ a \in M} \Leftrightarrow \ (b,a) \in R.$$

c) transitiv: Sei $(a,b) \in R \ \wedge \ (b,c) \in R$.

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Def. } R}{\Leftrightarrow} && \exists M, M' \in \mathcal{K} : a \in M \ \wedge \ b \in M \ \wedge \ b \in M' \ \wedge \ c \in M' \\
&\Rightarrow && b \in M \cap M', \text{ also } M \cap M' \neq \emptyset \\
&\overset{\mathcal{K} \text{ Klasseneinteilung}}{\Rightarrow} && M = M' \\
&\Rightarrow && a \in M \ \wedge \ c \in M \\
&\Rightarrow && (a,c) \in R.
\end{aligned}$$

Es gilt $\mathcal{K} \subseteq \{[a]_R : a \in A\}$: Sei $M \in \mathcal{K}, \ a \in M$

$$\Rightarrow [a]_R = M, \text{ denn } c \in [a] \ \Leftrightarrow \ (a,c) \in R \underset{M \text{ mit } a \in M}{\overset{\text{es gibt nur ein}}{\Leftrightarrow}} c \in M.$$

Es gilt $\{[a] : R : a \in A\} \subseteq \mathcal{K}$: Es existiert ein $M \in \mathcal{K}$ mit $a \in M$

$$\Rightarrow \ [a]_R = M, \text{ denn } c \in [a]_R \ \Leftrightarrow \ (a,c) \in R \underset{M \text{ mit } a \in M}{\overset{\text{es gibt nur ein}}{\Leftrightarrow}} c \in M.$$

2) R sei Äquivalenzrelation, $\mathcal{K}$ sei definiert durch $\mathcal{K} := \{[a] : a \in A\}$.
Beweise: $\mathcal{K}$ ist Klasseneinteilung.

a) Für jedes $a \in A$ gilt $[a] \subseteq A \ \Rightarrow \ \bigcup\limits_{a \in A} [a] \subseteq A$

Für jedes $a \in A$ gilt $a \in [a]$, da R reflexiv $\Rightarrow \ a \in \bigcup\limits_{a \in A} [a] \ \Rightarrow \ A \subseteq \bigcup\limits_{a \in A} [a]$

$\Rightarrow \ A = \bigcup\limits_{a \in A} [a]$.

b) Vorüberlegung: Zeige $(a,b) \in R \;\Rightarrow\; [a] = [b]$:

$[a] \subseteq [b]$: Sei $c \in [a] \overset{\text{Def. } [a]}{\Rightarrow} (a,c) \in R \overset{\text{Symmetrie}}{\Rightarrow} (c,a) \in R$

$$(c,a) \in R \;\wedge\; (a,b) \in R \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} (c,b) \in R$$

$$\overset{\text{Symmetrie}}{\Rightarrow} (b,c) \in R \;\Leftrightarrow\; c \in [b]$$

$[b] \subseteq [a]$: Sei $c \in [b]$, d.h. $(b,c) \in R$.

$$(a,b) \in R \;\wedge\; (b,c) \in R \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} (a,c) \in R \;\Rightarrow\; c \in [a].$$

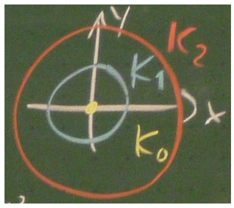
Also $[a] = [b]$ nachgewiesen.

Sei nun $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

$$\Rightarrow\; \exists c \in [a] \cap [b] \;\Rightarrow\; (a,c) \in R \;\wedge\; (b,c) \in R \overset{\text{Vorüberlegung}}{\Rightarrow} [a] = [c] = [b].$$

$\square$

1.37 Beispiel: Klasseneinteilung des $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch Kreise:



$$K_r := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = r^2\}, \quad \mathcal{K} \;:=\; \{K_r : r \geq 0\}.$$

Zugehörige Äquivalenzrelation:

$$(x,y) \sim_R (x',y') \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

$$\Leftrightarrow\; (x,y), (x',y') \text{ liegen auf derselben Kreislinie.}$$

1.38 Definition: Ist $A \neq \emptyset$ eine Menge und R eine Äquivalenzrelation auf A, so heißt

$$A/R \;:=\; \{[a]_R : a \in A\}$$

Quotient oder **Quotientenmenge** von A nach R.

1.39 Beispiele: **1)** $\mathbb{N}/\mathsf{GU} = \{[1],[2]\}$.

2) Klasseneinteilung letztes Beispiel: $\mathbb{R}^2/R = \{K_r : r \geq 0\}$.

1.40 Definition: Eine Relation R auf $A \neq \emptyset$ heißt **Ordnungsrelation**, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Schreibe $a \preceq b$ für $(a,b) \in R$. Dann

1) $\forall a \in A : a \preceq a$,

2) $\forall a,b \in A : (a \preceq b \;\wedge b \preceq a \;\Rightarrow\; a = b)$,

3) $\forall a,b,c \in A : (a \preceq b \;\wedge b \preceq c \;\Rightarrow\; a \preceq c)$.

$(A, \preceq)$ heißt **teilweise geordnete Menge**.

Gilt zusätzlich

$$\forall a, b \in A : a \preceq b \ \vee \ b \preceq a,$$

so heißt die Relation **vollständige Ordnungsrelation**, $(A, \preceq)$ heißt **geordnete Menge**.

1.41 Beispiele: **1)** $(\mathbb{N}, \leq)$ ist geordnete Menge.

2) $\preceq \ := \ \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m$ ist Teiler von $n\}$ ist Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$, aber nicht vollständig: $n = 3, \ m = 5$ sind nicht vergleichbar, es gilt weder $n \preceq m$ noch $m \preceq n$.

1.5 Abbildungen und Funktionen

Schulwissen: Zu einer Funktion f, defniert auf $\mathbb{R}$, gehört der Graph

$$G \ = \ \big\{(x, f(x) : x \in \mathbb{R}\big\} \ \subseteq \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

1.42 Definition:: Seien $A, B \neq \emptyset$ Mengen. Eine **Abbildung** oder **Funktion** ist eine Relation $G \subseteq A \times B$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in A \ \exists! y \in B : (x, y) \in G.$$

Für $(x, y) \in G$ schreibe $f(x) := y$. Schreibe kurz $f : A \to B : x \mapsto f(x)$.

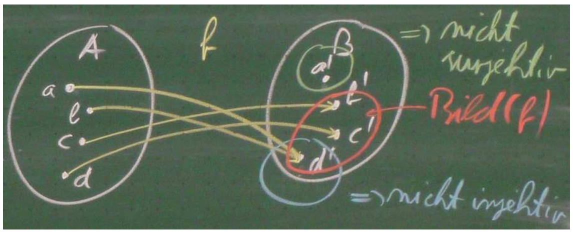
- A heißt **Definitionsmenge**,
- B heißt **Bildmenge**,
- $f(x)$ heißt **Bild** von x,
- x heißt **Urbild** von $f(x)$,
- $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ heißt **Bild** von f.
- Zwei Abbildungen $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ und $g : C \to D : x \mapsto g(x)$ heißen **gleich**, wenn $A = C \ \wedge \ B = D \ \wedge \ \forall x \in A = C : f(x) = g(x)$.

1.43 Bemerkung: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bedeutet: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Deshalb schreibe z.B.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto \frac{1}{x}\,.$$

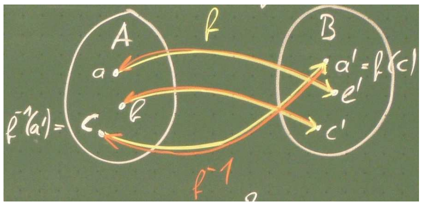
1.44 Definition: Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

- **surjektiv**, falls $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$,
- **injektiv**, falls $\forall x, x' \in A : \big(x \neq x' \ \Rightarrow\ f(x) \neq f(x')\big)$
  oder äquivalent $\forall x, x' \in A : \big(f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ x = x'\big)$,
- **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv.



1.45 Satz: Ist $f : A \to B$ bijektiv, so definiert

$$f^{-1} : B \to A : f(x) \mapsto x$$



eine Abbildung, die **inverse Abbildung** oder **Umkehrabbildung**.
Also: $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ für $x \in A$.
Außerdem gilt $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ für $y \in B$.

Beweis: **1)** Zu $f(x) \in B$ gehört genau ein $x \in A$, da f injektiv ist. Also ist $f(x) \mapsto x$ definiert.

2) Zu jedem $y \in B$ existiert ein $x_y \in A$ mit $f(x_y) = y$, da f surjektiv ist.

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1} \text{ ist auf ganz } B \text{ definiert,} \\ f\big(f^{-1}(y)\big) \overset{\text{Def } f^{-1}}{=} f(x_y) = y. \end{cases}$$

$\square$

1.46 Mengenabbildung: Sei $f : A \to B$.

1) Für $M \subseteq A$ ist $f(M) := \{f(x) : x \in M\}$ das **Bild** von M.

2) Für $M' \subseteq B$ ist

$$f^{-1}(M') \ := \ \{x \in A : f(x) \in M'\}$$

das **Urbild** von M'. Hierfür muss f nicht als bijektiv vorausgesetzt werden.

1.47 Beispiele: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$: $\mathsf{Bild}(f) = [0, \infty[$.

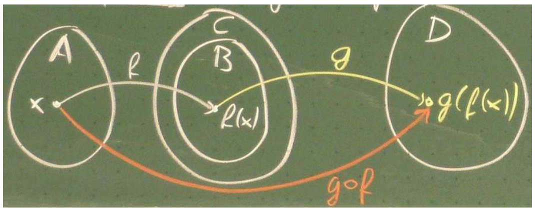
f ist nicht surjektiv, denn $-1 \notin \mathsf{Bild}(f)$,
f ist nicht injektiv, denn $f(-1) = f(1)$.
$f([-2,2]) = [0,4]$,
$f^{-1}([-2,2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ obwohl f nicht bijektiv ist.
$f\big(f^{-1}([-2,2])\big) = [0,2]$, $f^{-1}(\{2\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

2) $g : [0, \infty[\to [0, \infty[: x \mapsto x^2$ ist bijektiv, $g^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[: x \mapsto \sqrt{x}$.

1.48 Definition: Seien $f : A \to B$, $g : c \to D$, $B \subseteq C$. Dann heißt

$$g \circ f : A \to D : x \mapsto g\big(f(x)\big)$$

Hintereinanderausführung oder **Verknüpfung** von g und f.



1.49 Satz: Seien $f : A \to B \subseteq C$, $g : C \to D \subseteq E$, $h : E \to F$. Dann

$$h \circ (g \circ f) \;=\; (h \circ g) \circ f \quad \text{(Assoziativgesetz)}.$$

Beweis: $h \circ g : C \to F \;\wedge\; B \subseteq C \;\Rightarrow\; (h \circ g) \circ f : A \to F$ definiert
$g \circ f : A \to D \subseteq E \;\Rightarrow\; h \circ (g \circ f) : A \to F$ definiert

Für $x \in A$:

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) &\overset{\text{Def} \circ}{=} h\big(g \circ f(x)\big) \overset{\text{Def} \circ}{=} h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \\ (h \circ g) \circ f(x) &\overset{\text{Def} \circ}{=} h \circ g\big(f(x)\big) \overset{\text{Def} \circ}{=} h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h \circ (g \circ f)(x) \end{aligned}$$

$\square$

1.50 Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^3$:

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y &\mapsto \frac{1}{1+y^6} = f(g(y)) = f(y^3), \\ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x &\mapsto \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3 = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{1+x^2}\right). \end{aligned}$$

2 Zahlen und Körper

2.1 Die natürlichen Zahlen

2.1 Definition (Peano): Die **natürlichen Zahlen** sind eine Menge $\mathbb{N}$, auf der eine Abbildung

$$\mathsf{NF} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \text{(Nachfolgerabbildung)}$$

definiert ist mit folgenden Eigenschaften:

(N1) $\exists! x_0 \in \mathbb{N} : x_0 \notin \mathsf{NF}(\mathbb{N})$. Bezeichnung $x_0 =: 1$.
Es existiert genau eine natürliche Zahl, die nicht Nachfolger einer anderen ist.

(N2) NF ist injektiv.

(N3) Induktionsaxiom: Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften

- $1 \in M$,
- $\forall n \in \mathbb{N} : \big(n \in M \;\Rightarrow\; \mathsf{NF}(n) \in M\big)$,

dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Bezeichnungen: $\mathsf{NF}(1) =: 2$, $\mathsf{NF}(2) =: 3, \;\ldots,\; \mathsf{NF}(n) =: n+1$.

2.2 Vollständige Induktion: Sei H eine Aussageform auf $\mathbb{N}$. Beweise:

1) Induktionsanfang (IA): $H(1)$ ist wahr,

2) Induktionsschritt (IS): $\forall n \in \mathbb{N} : H(n) \;\Rightarrow\; H(n+1)$.

Dann folgt $\forall n \in \mathbb{N} : H(n)$.

2.3 Bemerkung: Vollständige Induktion funktioniert auch ab $n = 0$ oder z.B. ab $n = 5$.

Beweis: $M := \{n \in \mathbb{N} : H(n)\} \subseteq \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \in M & \text{(IA)} \\ \forall n \in \mathbb{N} : n \in M \;\Rightarrow\; \underbrace{n+1}_{=\mathsf{NF}(n)} \in M & \text{(IS)} \end{cases}$$

$$\overset{\text{(N3)}}{\Rightarrow} \quad M = \mathbb{N}.$$

□

2.4 Rekursive Definition: Setze $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1) Fakultät $n!$ ist definiert durch

$$0! := 1, \quad (n+1)! := (n+1) \cdot n! \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Nach (N3) ist $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert, z.B. $3! = 3\cdot 2! = 3\cdot 2\cdot 1! = 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0! = 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 6$.

2) Rechenoperationen auf $\mathbb{N}$: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann

$$\begin{aligned} n+1 &:= \mathsf{NF}(n) \\ \underbrace{n + \mathsf{NF}(m)}_{n+(m+1)} &:= \underbrace{\mathsf{NF}(n+m)}_{(n+m)+1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n \cdot 1 &:= n \\ n \cdot \mathsf{NF}(n) &:= n \cdot m + n \end{aligned}$$

2.5 Satz: Für $+, \cdot$ gelten das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} (n+m)+k &= n+(m+k) \\ n+m &= m+n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (n\cdot m)\cdot k &= n\cdot(m\cdot k) \\ n\cdot m &= m\cdot n \end{aligned}$$

(Ohne Beweis)

2.6 Satz: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} : n + k \neq n$.

Beweis: Vollständige Induktion nach n bei festem k.

IA: $n = 1$: $1 + k \overset{\mathsf{KG}}{=} k + 1 = \mathsf{NF}(k) \overset{(\mathsf{N1})}{\neq} 1$

IS: **Induktionsvoraussetzung** IV: $n + k \neq n$
Induktionsbehauptung IB: $n + 1 + k \neq n + 1$

$$n + k \neq n \overset{\text{NF ist injektiv}}{\Rightarrow} \underbrace{\mathsf{NF}(n+k)}_{=(n+k)+1 \overset{\mathsf{KG,\,AG}}{=} (n+1)+k} \neq \underbrace{\mathsf{NF}(n)}_{=n+1} \Rightarrow n + 1 + k \neq n + 1 \text{ (IB).}$$

□

2.7 Kürzungsregel: $\forall n, n', k \in \mathbb{N} : (n + k = n' + k \ \Rightarrow\ n = n')$.

Beweis: Induktion nach k:

IA $k = 1$: $n + 1 = n' + 1 \ \Rightarrow\ \mathsf{NF}(n) = \mathsf{NF}(n') \overset{\text{NF injektiv}}{\Rightarrow} n = n'$.

IS IV: $n+k = n'+k \;\Rightarrow n = n'$,

IB: $n+(k+1) = n'+(k+1) \;\Rightarrow n = n'$

$$n+(k+1) \overset{\mathsf{AG}}{=} (n+k)+1 = \mathsf{NF}(n+k) = \mathsf{NF}(n'+k) \overset{\mathsf{NF\ injektiv}}{\Rightarrow} n+k = n'+k \overset{\mathsf{IV}}{\Rightarrow} n = n'.$$

□

2.8 Ordnung in $\mathbb{N}$: $\leq := \left\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;\middle|\; n = m \;\vee\; \exists k \in \mathbb{N} : n = m+k\right\}$
Schreibe $m \leq n$ falls $(m,n) \in \leq$.

2.9 Satz: $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine geordnete Menge.

(ohne Beweis)

2.10 Definition:
$$\begin{aligned} m \geq n \quad &:\Leftrightarrow \quad n \leq m, \\ m < n \quad &:\Leftrightarrow \quad m \leq n \;\wedge\; m \neq n, \\ m > n \quad &:\Leftrightarrow \quad m \geq n \;\wedge\; m \neq n. \end{aligned}$$

2.11 Folgerung: Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ ist genau eine der drei Aussagen wahr:

$$m < n, \qquad m = n, \qquad m > n.$$

Beweis: Da $\leq$ vollständig: $M := \{n \in \mathbb{N} : n \leq m \;\vee\; m \leq n\} = \mathbb{N}$

Fall 1: $n \leq m \;\wedge\; m \leq n \;\Rightarrow\; m = n$

Fall 2: $n \leq m \;\wedge\; \neg(m \leq n) \;\Rightarrow\; n < m$

Fall 3: $\neg(n \leq m) \;\wedge\; m \leq n \;\Rightarrow\; m < n$

□

2.2 Die ganzen Zahlen

Anschauung: Ganze Zahlen als Differenz natürlicher Zahlen:

$$m - n \;=\; m' - n' \;\Leftrightarrow\; m + n' \;=\; m' + n.$$

2.12 Definition: Die Relation $\sim_{\mathbb{Z}}$ auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ist definiert durch

$$\sim_{\mathbb{Z}} := \Big\{\big((m,n),(m',n')\big) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N})^2 : m+n' = m'+n\Big\}.$$

2.13 Satz: $\sim_{\mathbb{Z}}$ ist Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Beweis: 1) reflexiv: Zeige: $\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m,n)$.

$(m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m,n) \;\Leftrightarrow\; m+n = m+n$. ✓

2) symmetrisch: Zeige $(m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m',n') \;\Rightarrow\; (m',n') \sim_{\mathbb{Z}} (m,n)$.

$(m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m',n') \;\Leftrightarrow\; m+n' = m'+n \;\Leftrightarrow\; m'+n = m+n' \;\Leftrightarrow\; (m',n') \sim_{\mathbb{Z}} (m,n)$.

3) transitiv: Zeige $(m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m',n') \;\wedge\; (m',n') \sim_{\mathbb{Z}} (m'',n'') \;\Rightarrow\; (m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m'',n'')$.

$$
\begin{aligned}
&(m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m',n') \;\wedge\; (m',n') \sim_{\mathbb{Z}} (m'',n'') \\
\Leftrightarrow \quad & m+n' = m'+n \;\wedge\; m'+n'' = m''+n' \\
\Rightarrow \quad & (m+n')+n'' = (m'+n)+n'' \overset{\text{KG}}{=} n''+(m'+n) \overset{\text{AG}}{=} (n''+m')+n \\
& \overset{\text{KG}}{=} (m'+n'')+n = (m''+n')+n \\
\Rightarrow \quad & (m+n')+n'' = (m''+n')+n \\
\overset{\text{AG,KG}}{\Rightarrow} \quad & (m+n'')+n' = (m''+n)+n' \\
\overset{\text{Kürzungsregel}}{\Rightarrow} \quad & m+n'' = m''+n \\
\Leftrightarrow \quad & (m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m'',n'')
\end{aligned}
$$

□

2.14 Definition: 1) $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_{\sim_{\mathbb{Z}}} = \big\{[(m,n)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} : m,n \in \mathbb{N}\big\}$.

2) $[(m,n)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} +_{\mathbb{Z}} [(m',n')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} := [(m+m', n+n')]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

2.15 Satz: Die Addition $+_{\mathbb{Z}}$ ist sinnvoll definiert, d.h.

$$
\left.\begin{array}{r}
[(m,n)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = [(k,l)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \\
[(m',n')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = [(k',l')]_{\sim_{\mathbb{Z}}}
\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; [(m,n)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} +_{\mathbb{Z}} [(m',n')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = [(m+m', n+n')]_{\sim_{\mathbb{Z}}}
$$

$$
= [(k+k', l+l')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = [(k,l)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} +_{\mathbb{Z}} [(k',l')]_{\sim_{\mathbb{Z}}}
$$

(Ohne Beweis)

2.16 Satz: $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}})$ ist eine **kommutative Gruppe**, d.h. es gelten

(AG) $\forall x,y,z \in \mathbb{Z} : (x +_{\mathbb{Z}} y) +_{\mathbb{Z}} z = x +_{\mathbb{Z}} (y +_{\mathbb{Z}} z)$,

(NE) $\exists 0 \in \mathbb{Z}\; \forall x \in \mathbb{Z} : x +_{\mathbb{Z}} 0 = x = 0 +_{\mathbb{Z}} x$,

(IE) $\forall x \in \mathbb{Z}\; \exists (-x) \in \mathbb{Z} : x +_{\mathbb{Z}} (-x) = 0 = (-x) +_{\mathbb{Z}} x$,

(KG) $\forall x,y \in \mathbb{Z} : x +_{\mathbb{Z}} y = y +_{\mathbb{Z}} x$.

Beweis: (NE): $0 = [(1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}}$, denn

$$[(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}} +_\mathbb{Z} [(1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;=\; [(m+1,n+1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;=\; [(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}}.$$

(IE) zu $[(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}}$ ist $[(n,m)]_{\sim_\mathbb{Z}}$, denn

$$[(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}} +_\mathbb{Z} [(n,m)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;=\; [(m+n,n+m)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;=\; [(1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}}.$$

□

2.17 Satz: Für eine beliebige Äquivalenzklasse aus $\mathbb{Z}$ gilt

$$[(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;=\; \begin{cases} [(1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}} & \text{falls } m = n, \\ [(m',1)]_{\sim_\mathbb{Z}} & \text{falls } m > n, \\ [(1,n')]_{\sim_\mathbb{Z}} & \text{falls } m < n. \end{cases}$$

Beweis: Fall $m > n$: $\exists k \in \mathbb{N} : m = n + k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\;\; (m,n) \;&=\; (n+k,n) \;\sim_\mathbb{Z}\; (n+k+1,n+1) \;\sim_\mathbb{Z}\; (k+1,1) \\ \Rightarrow\;\; [(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;&=\; [(k+1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

□

2.18 Bezeichnung:

$$\begin{array}{rclrclrcl} 0 & := & [(1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}}, & 1 & = & [(2,1)]_{\sim_\mathbb{Z}}, \;\ldots & n & = & [(n+1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}}, \\ -1 & = & [(1,2)]_{\sim_\mathbb{Z}}, & -2 & = & [(1,3)]_{\sim_\mathbb{Z}}, \;\ldots & -n & = & [(1,n+1)]_{\sim_\mathbb{Z}}. \end{array}$$

2.19 Addition in $\mathbb{Z}$ und in $\mathbb{N}$ stimmen überein:

$$\begin{aligned} m +_\mathbb{Z} n \;&=\; [(m+1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}} +_\mathbb{Z} [(n+1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \\ &=\; [(m+1+n+1,1+1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \\ &=\; [(\underbrace{m+1+n}_{=m+n+1},1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \\ &=\; m+n \end{aligned}$$

2.3 Die rationalen Zahlen

Aus der Schule: $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \;\wedge\; n \in \mathbb{N}\right\}$, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'} \;\Leftrightarrow\; m \cdot n' = m' \cdot n$.

2.20 Definition: 1) Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$:

$$\sim_\mathbb{Q} \;:=\; \left\{\big((m,n),(m',n')\big) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{N})^2 : m \cdot n' = m' \cdot n\right\}.$$

$\sim_\mathbb{Q}$ ist Äquivalenzrelation (Übungen).

2) $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/_{\sim_\mathbb{Q}}$. Definiere dann $+, \cdot, \leq$.

2.21 Bezeichnung: Für $m \in \mathbb{Z}$ schreibe $m := [(m,1)]_{\sim_\mathbb{Q}}$.

2.4 Geordnete Körper

2.22 Definition: Eine Menge $\mathbb{K}$ mit mindestens zwei Elementen bildet einen **Körper**, wenn für alle $x, y, \in \mathbb{K}$ eindeutig definiert ist:

Die Summe $x + y \in \mathbb{K}$,
Das Produkt $x \cdot y \in \mathbb{K}$,

so dass gelten:

(AG+) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : (x + y) + z = x + (y + z)$,

(KG+) $\forall x, y \in \mathbb{K} : x + y = y + x$,

(NE+) $\exists 0 \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbb{K} : x + 0 = x$,

(IE+) $\forall x \in \mathbb{K}\ \exists (-x) \in \mathbb{K} : x + (-x) = 0$,

(AG·) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(KG·) $\forall x, y \in \mathbb{K} : x \cdot y = y \cdot x$,

(NE·) $\exists 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \forall x \in \mathbb{K} : x \cdot 1 = x$,

(IE·) $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{K} : x \cdot x^{-1} = 1$,

(DG) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

2.23 Bemerkung:: Äquivalent und viel kürzer: $(\mathbb{K}, +)$, $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind kommutative Gruppen und es gilt (DG).

2.24 Beispiele:
1) $\mathbb{N}$ ist kein Körper
2) $\mathbb{Z}$ ist kein Körper
3) $\mathbb{Q}$ ist ein Körper
4) Der kleinste Körper $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ mit

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	0	1

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

2.25 Satz: **1)** $\forall x, y \in \mathbb{K}\ \exists! z \in \mathbb{K} : x + z = y$.
Die Lösung: $z = y + (-x)$. Schreibe $y + (-x) =: y - x$.

2) $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \forall y \in \mathbb{K}\ \exists! z \in \mathbb{K} : x \cdot z = y$.
Die Lösung: $z = y \cdot x^{-1}$. Schreibe $y \cdot x^{-1} =: \dfrac{y}{x}$.

Beweis: **1)** $z = y + (-x)$ ist Lösung: Einsetzen liefert

$$x + z \;=\; x + \big(y + (-x)\big) \overset{\text{KG+}}{=} \big(y + (-x)\big) + x \overset{\text{AG+}}{=} y + \big(\underbrace{(-x) + x}_{=x+(-x)=0}\big) \;=\; y + 0 \;=\; y.$$

Die Lösung ist eindeutig: Sei z' eine Lösung: $x + z' = y \;\Rightarrow\; (x + z') + (-x) \;=\; y + (-x)$.
Es gilt

$$(x+z')+(-x) \overset{\text{KG}}{=} -x+(x+z') \overset{\text{AG+}}{=} (-x+x)+z' \overset{\text{KG+}}{=} \big(x+(-x)\big)+z' \;=\; 0+z' \;=\; z'$$

$\Rightarrow\; z' = y + (-x) \;\Rightarrow\; z' = z.$ □

2.26 Satz: Seien $x, y \in \mathbb{K}$. Dann gelten:

1) $x \cdot 0 = 0$,

2) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$,

3) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$,

4) $x \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\vee\; y = 0$.

Beweis: **1)** $x \cdot 0 \overset{\text{NE+}}{=} x \cdot (0 + 0) \overset{\text{DG}}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0$.

$$\Rightarrow\; \underbrace{-x \cdot 0 + x \cdot 0}_{=0} \;=\; \underbrace{(x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x \cdot 0)}_{=x\cdot 0+\big(x\cdot 0+(-x\cdot 0)\big)=x\cdot 0+0=x\cdot 0}$$

$\Rightarrow\; 0 = x \cdot 0.$

2) Letzter Satz: Die Gleichung

$$x \cdot y + z = \; 0$$

hat genau eine Lösung, nämlich $z = 0 + \big(-(x \cdot y)\big) \overset{\text{NE+}}{=} -(x \cdot y)$.
Für $z = (-x) \cdot y$ gilt

$$x \cdot y + (-x) \cdot y \overset{\text{KG}\cdot}{=} y \cdot x + y \cdot (-x) \overset{\text{DG}}{=} y \cdot \big(x + (-x)\big) \overset{\text{IE+}}{=} y \cdot 0 \overset{1)}{=} 0.$$

Die Lösung ist eindeutig $\Rightarrow\; -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$.

3) Vorüberlegung: $-(-z) = z$, denn

$$\begin{aligned} -z + (-(-z)) &\overset{\text{IE+}}{=} 0, \\ -z + z &\overset{\text{KG+}}{=} z + (-z) = 0, \end{aligned}$$

also sind z und $-(-z)$ beides Lösung von

$$-z + y = 0 \qquad (y \text{ gesucht}).$$

Nach letztem Satz ist die Lösung eindeutig.

$\Rightarrow \ (-x)\cdot(-y) \overset{2)}{=} -\Big(x \cdot (-y)\Big) \overset{\text{KG}\,\cdot}{=} -\big((-y)\cdot x\big) \overset{2)}{=} -\big(-(y \cdot x)\big) \overset{\text{Vorüberlegung}}{=} y \cdot x \overset{\text{KG}\cdot}{=} x \cdot y.$

4) Sei $x \cdot y = 0$.
Fall $x = 0$: $\Rightarrow \ x = 0 \ \vee \ y = 0$ ist wahr.
Fall $x \neq 0$: $\exists x^{-1} \in \mathbb{K}$

$$0 = x \cdot y \ \Rightarrow \ 0 = x^{-1} \cdot 0 = x^{-1} \cdot (x \cdot y) \overset{\text{AG}\cdot}{=} (x^{-1} \cdot x) \cdot y \overset{\text{KG}\cdot}{=} (x \cdot x^{-1}) \cdot y \overset{\text{IE}\cdot}{=} 1 \cdot y \overset{\text{NE}\cdot}{=} y$$

$\Rightarrow \ y = 0$, also $x = 0 \ \vee \ y = 0$ wahr. $\square$

2.27 Definition: Seien $a, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{K}$. Dann

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} s_k := 0, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Also $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots a_n.$

2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{0} s_k := 1, \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Also $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$

3) Für $n \in \mathbb{N}_0 : n \cdot a := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a \overset{\text{DG}}{=} a \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right).$

4) Für $n \in \mathbb{N}_0 : a^n := \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a$, insbesondere $a^0 = 1$.

5) Für $n \in \mathbb{N} : \dfrac{a}{n} := \dfrac{a}{n \cdot 1}, (-n) \cdot a := -(n \cdot a).$

2.28 Binomialkoeffizienten: Für $m, n \in \mathbb{N}_0, \ n \leq m$:

$$\binom{m}{n} := \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots\ (m-n+1)\ (m-n)!}{\underbrace{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots\ (n-n+1)}_{\text{im Zähler und Nenner gleich viele Faktoren}}\ (m-n)!}$$

2.29 Eigenschaften: 1) $\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!\,m!} = 1,\ \binom{m}{m} = 1.$

2) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}.$

3) $\binom{m}{n+1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n+1}$

2.30 Beispiele: $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10,\ \binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} = 4950$

2.31 Satz: Seien $a, b \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N}$. Dann gilt die **binomische Formel**

$$(a+b)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Beweis: Induktion nach n.

IA $n = 1$: l.S.: $(a+b)^1 = a + b$

r.S.: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k\, b^{1-k} = \underbrace{\binom{1}{0}}_{=1} a^0\, b^1 + \underbrace{\binom{1}{1}}_{=1} a^1\, b^0 = b + a.$

$\Rightarrow$ l.S.=r.S. ✓

IS: $(a+b)^{n+1} \ = \ (a+b)(a+b)^n$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{IV}}{=} && (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \\
&\overset{\text{DG}}{=} && a \cdot \sum \ldots + b \cdot \sum \ldots \\
&\overset{\text{DG}}{=} && \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1}\, b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0\, b^{n+1} \\
&\underset{k=k'-1}{\overset{k':=k+1}{=}} && \sum_{k'=1}^{n} \binom{n}{k'-1} a^{k'}\, b^{n+1-k'} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} a^{n+1}\, b^0 + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^0\, b^{n+1} \\
&\overset{k'=:k}{=} && \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k\, b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} a^{n+1}\, b^0 + \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1} a^0\, b^{n+1} \\
&\overset{\text{2.29, 3)}}{=} && \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1}\, b^0 + \binom{n+1}{0} a^0\, b^{n+1} \\
&= && \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ IB, d.h. binomische Formel mit $n+1$ statt n. $\square$

2.32 Satz: Für $q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \quad \textbf{(geometrische Summe)}.$$

Beweis: Übungen

2.33 Definition: Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt **geordnet**, wenn eine vollständige Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{K}$ definiert ist, so dass

(O1) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,

(O2) $\forall x, y \in \mathbb{K} : 0 \leq x \ \wedge \ 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Man definiert:
$$\begin{aligned} x < y \quad &:\Leftrightarrow \quad x \leq y \ \wedge \ x \neq y \\ x \geq y \quad &:\Leftrightarrow \quad y \leq x \\ x > y \quad &:\Leftrightarrow \quad y < x \end{aligned}$$

2.34 Folgerung: In einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt für jedes Paar $x, y \in \mathbb{K}$ genau eine der Beziehungen $x < y,\ x = y,\ x > y$.

2.35 Satz: Ist $(\mathbb{K}, \leq)$ ein geordneter Körper, so gelten für $x, y, z \in \mathbb{K}$:

1) $x < y \ \wedge \ y < z \ \Rightarrow \ x < z$ (Transitivität),

2) $x < y \ \Rightarrow \ x + z < y + z$,

3) $x < y \ \wedge \ z > 0 \ \Rightarrow \ x \cdot z < y \cdot z$,

4) $x > 0 \ \Leftrightarrow \ -x < 0$,

5) $x < 0 \ \wedge \ y < 0 \ \Rightarrow \ x \cdot y > 0$,

6) $x \neq 0 \ \Rightarrow \ x^2 > 0$,

7) $x > 0 \ \Leftrightarrow \ x^{-1} > 0$.

Beweis: 1)
$$\begin{aligned} & x < y \ \wedge \ y < z \\ & \Rightarrow \ x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ (*) \\ & \overset{\text{Transitivität} \leq}{\Rightarrow} \ x \leq z. \end{aligned}$$

Annahme: $x = z \overset{(*)}{\Rightarrow} x \leq y \ \wedge \ y \leq x \overset{\leq \text{ antisymmetrisch}}{\Longrightarrow} x = y \ \lightning \ (x < y)$

2) Wie 1)

3) $x < y \ \wedge \ z > 0$

$$\overset{2)}{\Rightarrow} \quad \underbrace{x + (-x)}_{=0} < \underbrace{y + (-x)}_{=y-x}$$

$$\overset{(O2)}{\Rightarrow} \quad 0 \leq z \cdot (y - x) \overset{DG}{=} z \cdot y - z \cdot x$$

$$\overset{(O1)}{\Rightarrow} \quad 0 + z \cdot x \leq z \cdot y - z \cdot x + z \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \quad z \cdot x \leq z \cdot y.$$

Annahme: $z \cdot x = z \cdot y$.

$z > 0 \ \Rightarrow \ z \neq 0 \ \Rightarrow \ \exists z^{-1} \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \ z^{-1} \cdot (z \cdot x) = z^{-1} \cdot (z \cdot y)$

$\Leftrightarrow \ x = y \ \lightning$

4) "$\Rightarrow$": $x > 0 \overset{\text{Def} >}{\Rightarrow} 0 \leq x \overset{(O1)}{\Rightarrow} 0 + (-x) \leq x + (-x) \ \Leftrightarrow \ -x \leq 0.$

Annahme: $-x = 0 \ \Rightarrow \ x + (-x) = x + 0 \ \Rightarrow \ 0 = x \ \lightning \ (x > 0).$

"$\Leftarrow$": $-x < 0 \overset{\text{Def} <}{\Rightarrow} -x \leq 0 \overset{(O1)}{\Rightarrow} x + (-x) \leq x + 0 \ \Rightarrow \ 0 \leq x.$

Annahme $x = 0 \ \Rightarrow \ x + (-x) = 0 + (-x) \ \Rightarrow \ 0 = -x \ \lightning$

5) $x < 0 \ \wedge \ y < 0 \overset{4)}{\Rightarrow} -x > 0 \ \wedge \ y < 0 \overset{3)}{\Rightarrow} \underbrace{y \cdot (-x)}_{=-x \cdot y} < \underbrace{0 \cdot (-x)}_{=0} \ \Leftrightarrow \ -x \cdot y < 0 \overset{4)}{\Leftrightarrow} x \cdot y > 0.$ $\square$

2.36 Satz: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper. Dann gilt: $\forall x < y \ \exists z \in \mathbb{K} : x < z < y$.

2.37 Folgerung: Jeder geordnete Körper hat unendlich viele Elemente.

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Beweis: } x < y \overset{2.35,\ 1)}{\Rightarrow} \underbrace{x + x}_{=x(1+1)=2x} < y + x \ \wedge \ y + x < \underbrace{y + y}_{=2y}. \\ \text{Zwischenüberlegung: 2.35, 6): } 1 > 0 \ \Rightarrow \ 1 + 1 > 0 + 1 = 1 > 0 \\ \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} \ 2 = 1 + 1 > 0 \overset{2.35,\ 7)}{\Rightarrow} \dfrac{1}{2} = 2^{-1} > 0 \end{array}\right\} \overset{2.35,\ 3)}{\Rightarrow} x < \underbrace{\frac{1}{2}(y + x)}_{=:z} < y.$$

$\square$

2.38 Definition: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper, $a, b \in \mathbb{K}$.

1)

$[a, b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\}$	**abgeschlossenes Intervall**
$]a, b[$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : a < x < b\}$	**offenes Intervall**
$[a, b[$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : a \leq x < b\}$	**(rechts) halboffenes Intervall**
$]a, b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : a < x \leq b\}$	**(links) halboffenes Intervall**
$]-\infty, b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : x \leq b\}$	
$]-\infty, b[$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : x < b\}$	
$]a, \infty[$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : x > a\}$	
$[a, \infty[$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : x \geq a\}$	

2) $|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$ (Betrag $|.| : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$).

2.39 Satz: Für $x \in \mathbb{K}$ gelten

$$|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|.$$

Beweis: Fall $x = 0$: Dann $|x| = 0, |-x| = |0| = 0 \;\Rightarrow$ Behauptung.

Fall $x > 0$: Dann $|x| = x > 0,\ |-x| = -(-x) = x > 0$ und
$-x < 0 < x = |x| \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} -x < |x|$.

Fall $x < 0$: Dann $|x| = -x > 0,\ |-x| = -x > 0$ und
$x < 0 \leq |x| \;\Rightarrow\; x \leq |x|,\ -x = |x| \;\Rightarrow\; -x \leq |x|$. □

2.40 Satz: $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper, $a \in \mathbb{K}$, $a \geq 0$. Dann:

$$|x| < a \;\Leftrightarrow\; x \in \,]-a, a[\; .$$

Beweis: Übungen

2.41 Satz: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper. Dann

(B1) $\forall x \in \mathbb{K} : \big(|x| \geq 0 \;\wedge\; (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)\big)$,

(B2) $\forall x, y \in \mathbb{K} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

(B3) $\forall x, y \in \mathbb{K} : |x + y| \leq |x| + |y|$ (**Dreiecksungleichung, $\triangle$-Ungl.**).

D.h. $(\mathbb{K}, |.|)$ ist ein bewerteter Körper.

Beweis: (B1),(B2) klar

(B3): Fall 1: $x + y \geq 0$

$$\Rightarrow |x + y| = \underbrace{x}_{\leq |x|} + \underbrace{y}_{\leq |y|} \leq |x| + |y|.$$

Fall 2: $x + y < 0$

$$\Rightarrow |x + y| = -(x + y) = \underbrace{(-x)}_{\leq |x|} + \underbrace{(-y)}_{\leq |y|} \leq |x| + |y|.$$

□

2.42 Dreiecksungleichung nach unten: Für $x, y \in \mathbb{K}$ gilt

$$|x - y| \;\geq\; \big||x| - |y|\big|.$$

(Es folgt $|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|$.)

Beweis:

$$\begin{aligned} |x| &= \big|(x-y)+y\big| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} |x-y| + |y| \;\Rightarrow\; |x-y| \geq |x| - |y| \\ |y| &= \big|(y-x)+x\big| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} |y-x| + |x| \;\Rightarrow\; |x-y| = |y-x| \geq |y| - |x| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; |x-y| \;\geq\; \begin{cases} |x| - |y| & \text{falls } |x| \geq |y| \\ |y| - |x| & \text{falls } |x| < |y| \end{cases} \;=\; \big||x| - |y|\big|$$

□

2.43 Definition: Ein geordneter Körper heißt **archimedisch**, falls

$$\forall x, y > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot x \geq y.$$

2.44 Satz: $(\mathbb{Q}, \leq)$ ist ein archimedischer Körper.

Beweis: $x = \dfrac{p}{q},\ y = \dfrac{p'}{q'};\ p, p', q, q' \in \mathbb{N}$.

Hauptnenner: $x = \dfrac{p \cdot q'}{q \cdot q'},\ y = \dfrac{p' \cdot q}{q \cdot q'}$.

Wähle $n := p' \cdot q \;\Rightarrow\; n \cdot x = \dfrac{p' \cdot q \cdot p \cdot q'}{q \cdot q'} \overset{(*)}{\geq} \dfrac{p' \cdot q}{q \cdot q'} = y$.

Zu $(*)$: $p \cdot q' \geq 1 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq p \cdot q' \underset{p' \cdot q \geq 0}{\overset{2.35\ 3)}{\Rightarrow}} p' \cdot q \leq p \cdot q' \cdot p' \cdot q \;\Rightarrow\; (*)$ mit $\dfrac{1}{q \cdot q'} > 0$, da $q \cdot q' > 0$. □

3 Folgen und Reihen in geordneten Körpern

3.1 Konvergenz

3.1 Definition: Eine Abbildung $a_. : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ heißt **Folge**. Schreibe

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ oder } (a_n) \text{ oder } a_1, a_2, a_3, \ldots .$$

Es gibt auch Folgen, die als erstes Folgenglied a_m, $m \in \mathbb{Z}$ haben:

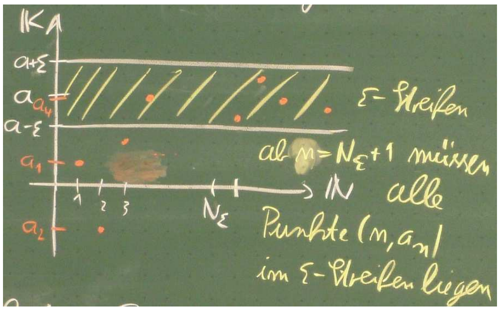
$$(a_n)_{n\geq m} \text{ oder } a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$$

3.2 Definition: Eine Folge heißt **konvergent** zum **Grenzwert** $a \in \mathbb{K}$, falls

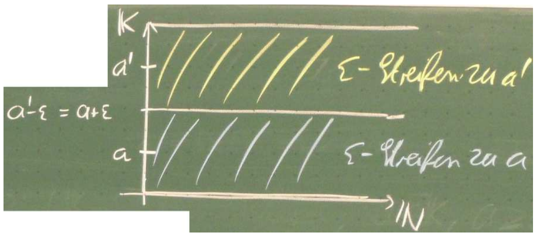
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n - < | < \varepsilon.$$

Schreibe $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Eine nicht konvergente Folge heißt **divergent**.

Veranschaulichung:



3.3 Satz: Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.



Beweis: Annahme: $a_n \to a \ \wedge\ a_n \to a' \ \wedge\ a \neq a'$.
Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}|a' - a|$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ 2\varepsilon &= |a'-a| = \big|(a'-a_n) + (a_n - a)\big| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \underbrace{|a'-a_n|}_{<\varepsilon \text{ für } n>N_\varepsilon} + \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon \text{ für } n>N'_\varepsilon} \\
&< 2\varepsilon \text{ für } n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\} \\
\Rightarrow\ 2\varepsilon &< 2\varepsilon \ \lightning
\end{aligned}$$

$\square$

3.4 Definition: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper. Eine Mnge $M \subseteq \mathbb{K}$ besitzt ein **Maximum** (**Minimum**), falls M ein größtes (kleinstes) Element m besitzt:

$$\exists m \in M \; \forall m' \in M : m' \leq m \quad (m' \geq m).$$

Schreibweise: $\max(M) := m$ (bzw. $\min(M)$).

3.5 Beispiele: **1)** $M = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$: M hat kein Maximum, $\min(M) = 1$.

2) $\max\big([0,2]\big) = 2$.

3) $[0,2[$ hat kein Maximum.

3.6 Satz: **1)** Besitzt $M \subseteq \mathbb{K}$ ein größtes Element m, so ist m eindeutig.

2) Jede endliczhe Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}$ besitzt ein Maximum.

Beweis: **1)** Sind m, m' größte Elemente, so folgt $m' \leq m \;\wedge\; m \leq m'$
$\Rightarrow \; m = m'$.

2) Beweise durch Induktion: Jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}$ mit n Elementen besitzt ein größtes Element.
IA: $n = 1$: $M = \{m_1\} \;\Rightarrow\; m_1$ ist größtes Element.
IS: Sei $M = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\} \subseteq \mathbb{K}$ mit $n+1$ Elementen.
IV $\Rightarrow$ $M' = \{m_1, \ldots, m_n\}$ hat größtes Element m_k.
Fall 1: $m_{n+1} > m_k \;\Rightarrow\; m_{n+1}$ ist größtes Element von M.
Fall 2: $m_{n+1} \leq m_k$ ($m_{n+1} = m_k$ kann eigentlich nicht sein)
$\Rightarrow \; m_k$ ist größtes Element von M. $\square$

3.7 Definition: Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, falls

$$\exists S \in \mathbb{K} \; \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq S.$$

Also: Eine Folge (a_n) ist nicht beschränkt, falls

$$\forall S \in \mathbb{K} \; \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| > S.$$

3.8 Satz: Ist (a_n) konvergent, so ist (a_n) beschränkt.
Also: (a_n) nicht beschränkt $\;\Rightarrow\;$ (a_n) nicht konvergent.

Beweis: Wähle $\varepsilon := 1$

$a_n \to a \;\Rightarrow\; \forall n > N_1$ gilt

$$|a_n| \;=\; \big|(a_n - a) + a\big| \;\le\; |a_n - a| + |a| \;\le\; |a| + 1.$$

Definiere $S := \max\big\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_1}|, |a| + 1\big\}$

$\Rightarrow\; \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \le S.$ $\square$

3.9 Satz: $(a_n),\ (b_n)$ beschränkt $\;\Rightarrow\;$ $(a_n \pm b_n),\ (a_n \cdot b_n)$ sind beschränkt.

Beweis: $|a_n| \le S,\ |b_n| \le S'$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a_n \pm b_n| & \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\le} & |a_n| + |b_n| & \le & S + S' \\ |a_n \cdot b_n| & = & |a_n| \cdot |b_n| & \le & S \cdot S' \end{cases}$$

$\square$

3.10 Bemerkung: $a_n = 1,\ b_n = \dfrac{1}{n}$ $\;\Rightarrow\;$ $(a_n), (b_n)$ beschränkt, aber $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ nicht beschränkt.

3.11 Satz: Wenn $a_n \to a,\ b_n \to b$, dann

1) $a_n \pm b_n \to a \pm b$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$,

3) Falls $b \neq 0$ und

$$c_n \;:=\; \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_n} & \text{falls } b_n \neq 0 \\ 0 & \text{falls } b_n = 0 \end{cases}$$

dann $c_n \to \dfrac{a}{b}$.

Beweis: **1)** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

$$\begin{aligned} a_n \to a \;&\Rightarrow\; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n > N_\varepsilon \\ b_n \to b \;&\Rightarrow\; |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n > N'_\varepsilon \end{aligned}$$

Für $n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ folgt

$$\big|(a_n + b_n) - (a + b)\big| = \big|(a_n - a) + (b_n - b)\big| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\le} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = \big|(a_n - a)b_n + a(b_n - b)\big| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \underbrace{|a_n - a|\,|b_n|}_{\text{soll sein } <\varepsilon/2} + \underbrace{|a|\,|b_n - b|}_{\text{soll sein } <\varepsilon/2}$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

(b_n) konvergent $\Rightarrow$ (b_n) beschränkt $\Rightarrow$ $|b_n| < S$

o.B.d.A.: $S > 0$.

$a_n \to a \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2S}$ für $n > N_\varepsilon$.

Für $|a| \neq 0$:

$b_n \to b \;\Rightarrow\; |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2|a|}$ für $n > N'_\varepsilon$.

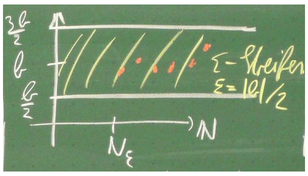
Für $|a| \neq 0$ und $n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ folgt

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \;<\; \frac{\varepsilon}{2S}S + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} \;=\; \varepsilon.$$

Für $|a| = 0$ und $n > N_\varepsilon$ folgt

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \;<\; \frac{\varepsilon}{2S}S + 0 \cdot |b_n - b| \;=\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon.$$

3) Vorüberlegung: Wenn $b_n \to b \neq 0$, dann existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n| > \dfrac{|b|}{2}$ für $n > N_1$, denn:



Wähle $\varepsilon := \dfrac{|b|}{2}$. Für $n > N_\varepsilon$ folgt

$$|b_n| \;=\; \big|(b_n - b) + b\big| \;=\; \big|b + (b_n - b)\big| \;\underset{\text{nach unten}}{\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\geq}}\; |b| - \underbrace{|b_n - b|}_{<\varepsilon = |b|/2} \;>\; |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

Für $n > N_1$ gilt

$$\begin{aligned}
\left|c_n - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n \cdot b - a \cdot b_n}{b_n \cdot b}\right| = \frac{1}{|b_n \cdot b|}\big|(a_n - a)b + a(b - b_n)\big| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \frac{1}{|b_n| \cdot |b|}|a_n - a| \cdot |b| + \frac{|a|}{|b_n| \cdot |b|}|b - b_n| \\
&\overset{|b_n| > |b|/2}{<} \frac{1}{|b|}\underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon \cdot |b|/4 \text{ für } n > N_\varepsilon} + \frac{2|a|}{|b|^2}\underbrace{|b - b_n|}_{<\varepsilon |b|^2/4|a| \text{ für } n > N'_\varepsilon}
\end{aligned}$$

Für $n > \max\{N_1, N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ folgt

$$\left|c_n - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

3.12 Einschließungskriterium: Seien (a_n), (b_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und (c_n) mit $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n \leq c_n \leq b_n$. Dann ist (c_n) konvergent, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Beweis: Übungen

3.13 Definition: Eine Folge (a_n) heißt **Nullfolge**, falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3.14 Satz: (a_n) beschränkt und (b_n) Nullfolge $\Rightarrow$ $(a_n\, b_n)$ ist Nullfolge.

Beweis: Übungen

3.15 Definition: Eine Folge (a_n) heißt

monoton wachsend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$,

streng monoton wachsend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$,

monoton fallend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$,

streng monoton fallend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$.

3.16 Definition: Ist (a_n) eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** von (a_n).

3.17 Beispiele: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n},\ n_k = 2k \ \Rightarrow\ a_{n_k} = \dfrac{(-1)^{2k}}{2k} = \dfrac{1}{2k}$

$n_k = k + 100 \ \Rightarrow\ a_{n_k} = a_{101}, a_{102}, a_{103}, \ldots$

3.18 Satz: $a_n \to a \ \wedge\ (a_{n_k})$ Teilfolge von (a_n) $\Rightarrow$ $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$.

3.19 Folgerung: Hat (a_n) zwei Teilfolgen mit verschiedenen Grenwerten, so ist (a_n) divergent.

Beweis: Vorüberlegung: (n_k) streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $n_k \geq k$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

$a_n \to a \ \Rightarrow\ |a_n - a| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$

$\Rightarrow\ |a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für $k > N_\varepsilon$ (dann $n_k > N_\varepsilon$). □

3.20 Definition: **1)** Ist (a_n) Folge in $\mathbb{K}$, so heißt die Folge (s_n) mit $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ (unendliche) **Reihe** in $\mathbb{K}$. Schreibweise:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \ :=\ (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

s_n heißt n-te **Teilsumme** der Reihe.

2) Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **konvergent** zum Grenzwert s, falls $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Schreibweise:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \ :=\ \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Eine nicht konvergente Reihe heißt **divergent**.

Achtung: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ hat je nach Kontext verschiedene Bedeutungen.

3.2 Beispiele in $\mathbb{Q}$

1) $a_n = c$ (konstante Folge):

$$|a_n - c| \;=\; |c-c| \;=\; 0 \;<\; \varepsilon \text{ für jedes } \varepsilon > 0 \text{ und alle } n \in .\mathbb{N}.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c.$

2) Für festes $k \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$: Sei $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{1}{n^k} - 0\right| \;=\; \left|\frac{1}{n^k}\right| \;=\; \frac{1}{n^k} \;\leq\; \frac{1}{n} \;\stackrel{!}{<}\; \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Also: Wähle $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Dies ist möglich, da $\mathbb{Q}$ archimedisch ist.

3) $a_n = 4 + \frac{3}{n^2} = 4 + 3 \cdot \frac{1}{n^2} \underset{\text{konvergente Folgen}}{\overset{\text{Satz über}}{\longrightarrow}} 4 + 3 \cdot 0 = 4.$

4) $a_n = \frac{5n^2 + 3n}{1 + 2n^2} = \frac{n^2(5 + \frac{3}{n})}{n^2(\frac{1}{n^2} + 2)} = \frac{5 + \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2} + 2} \underset{\text{konvergente Folgen}}{\overset{\text{Satz über}}{\longrightarrow}} \frac{5 + 3 \cdot 0}{0 + 2} = \frac{5}{2}.$

3.21 Satz: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper, $x \in \mathbb{K}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$(1+x)^n \;\geq\; 1 + nx \quad \text{(Bernoulli-Ungleichung).}$$

Beweis: Übungen

5) $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{Q}$ fest.

Fall $|q| < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$:

$$|q^n - 0| \;=\; |q^n| \;=\; |q|^n \;\stackrel{!}{<}\; \varepsilon.$$

Schreibe $|q| = \frac{1}{1+\delta}$ mit $\delta = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

$$(1+\delta)^n \;\stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq}\; 1 + n\delta \;>\; n\delta \;\Rightarrow\; |q|^n \;=\; \frac{1}{(1+\delta)^n} \;<\; \frac{1}{n\delta} \;<\; \varepsilon \text{ falls } n > \frac{1}{\delta\varepsilon}$$

(hierbei verwendet: $0 < a < b \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$). Wähle $N_\varepsilon \geq \frac{1}{\delta\varepsilon}$.

Fall $q = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.

Fall $q = -1$: $q^n = (-1)^n$ ist divergent:

Teilfolge mit $n_k = 2k$: $\quad (-1)^{2k} = 1 \to 1$

Teilfolge mit $n_k = 2k+1$: $\quad (-1)^{2k+1} = -1 \to -1$

Zwei Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten $\Rightarrow$ Divergenz.

Fall $|q| > 1$: (q^n) ist divergent, weil nicht beschränkt: Zeige

$$\forall S \in \mathbb{K}\ \exists n \in \mathbb{N} : |q^n| > S.$$

Schreibe $|q| = 1 + \delta$ mit $\delta = |q| - 1 > 0$.

$$\Rightarrow\ |q|^n = (1+\delta)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n\delta > n\delta \overset{!}{>} S \Leftrightarrow n > \frac{S}{\delta}.$$

6) **Geometrische Reihe**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ für } |q| < 1$$

(bedeutet $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \to \frac{1}{1-q}$). Denn:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} q^k \overset{\text{geometrische Summe}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} q^n \underset{\text{konvergente Folgen}}{\overset{\text{Satz über}}{\longrightarrow}} \frac{1}{1-q} + 0\,\frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$

7) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, denn die Teilsummenfolge ist nicht beschränkt (siehe Aufgabe 3.1).

3.22 Definition: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Köper. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt **bestimmt divergent**, falls

$$\forall S \in \mathbb{K}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n > S,$$

Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, oder falls

$$\forall S \in \mathbb{K}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n < S,$$

Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

3.23 Beispiele: 1) $\lim_{n\to\infty} n^k = \infty$ ($k \in \mathbb{N}$ fest).

2) $\left((-1)^n \cdot n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht bestimmt divergent.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} k^n = \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ ($\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty$)

3.3 Cauchy-Folgen in geordneten Körpern

3.24 Definition: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

((a_n) heißt auch C-Folge, Fundamentalfolge).

3.25 Satz: (a_n) C-Folge $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt.

Beweis: Wähle $\varepsilon := 1$. Dann $\forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < 1$.
Wähle festes $m := N_\varepsilon + 1$. Für $n > N_\varepsilon$ folgt

$$|a_n| \;=\; \big|(a_n - a_m) + a_m\big| \;\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq}\; |a_n - a_m| + |a_m| \;<\; 1 + |a_m|.$$

Für $S := \max\big\{|a_1, |a_2|, \ldots, |a_{N_\varepsilon}|, |a_{N_\varepsilon+1}| + 1\big\}$ gilt $|a_n| \leq S$ für $n \in \mathbb{N}$. $\square$

3.26 Satz: (a_n), (b_n) C-Folgen. Dann:

1) $(a_n \pm b_n)$ ist C-Folge.

2) $(a_n \cdot b_n)$ ist C-Folge.

3) Es gelte zusätzlich: $\exists \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : |b_n| \geq \delta$. Dann ist (c_n) mit

$$c_n \;:=\; \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_n} & \text{falls } b_n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine C-Folge.

Beweis: Selber, vgl. Satz über konvergente Folgen.

3.27 Satz: (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist C-Folge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ fest.
$a_n \to a \;\Rightarrow\; \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Für $n, m > N_\varepsilon$ folgt

$$|a_n - a_m| \;=\; \big|a_n - a - (a_n - a)\big| \;\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq}\; |a_n - a| + |a_m - a| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

$\square$

3.28 Beispiel: Nicht jede C-Folge ist konvergent:
Sei (a_n) in $\mathbb{Q}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1,\ a_{n+1} := \frac{1}{2}\,a_n + \frac{1}{a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Übungen: (a_n) ist C-Folge und falls $a_n \to a \;\Rightarrow\; a^2 = 2$
Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2 \;\Rightarrow\; (a_n)$ nicht konvergent.

3.29 Satz: (a_n) C-Folge und (a_{n_k}) konvergente Teilfolge $\Rightarrow$ (a_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} =: a$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ fest. Dann;

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n, m > N_\varepsilon, \quad |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } k > K_\varepsilon.$$

Für $n > N_\varepsilon$ und fest gewähltem $m = n_k$ mit $k > \max\{K_\varepsilon, N_\varepsilon\}$ folgt

$$|a_n - a| \;\le\; |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

$\square$

3.30 Definition: Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt **vollständig**, falls jede C-Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert.

3.4 Konstruktion der reellen Zahlen aus $\mathbb{Q}$

3.31 Reelle Zahlen als Folgen: $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ bedeutet:
$\sqrt{2} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, wobei $a_1 = 1;\ a_2 = 1,4;\ a_3 = 1,41;\ a_4 = 1,414;\ldots$
Aber $\sqrt{2}$ gibt's ja noch gar nicht.
Idee: Definiere $\sqrt{2} := (a_n)$, wobei (a_n) die obige C-Folge bezeichnet.
Also: Jede C-Folge definiert eine reelle Zahl.
Problem: $b_n := a_n + \dfrac{1}{n}$. Dann hat (b_n) denselben Grenzwert wie (a_n), sollte also dieselbe reelle Zahl darstellen.

3.32 Definition: **1)** $\mathsf{CF}(\mathbb{Q}) := \big\{(a_n) : (a_n) \text{ ist C-Folge in } \mathbb{Q}\big\}$.

2) Definiere die Relation $\sim$ auf $\mathsf{CF}(\mathbb{Q})$:

$$(a_n) \sim (b_n) \;:\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

3.33 Satz: $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf CF($\mathbb{Q}$).

Beweis: **1)** reflexiv: $a_n - a_n \to 0$.

2) symmetrisch: $0 = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

3) transitiv: $(a_n) \sim (b_n) \;\wedge\; (b_n) \sim (c_n) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0 \;\wedge\; \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - c_n) = 0$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n + b_n - c_n) \\ &\overset{\text{Satz über}}{\underset{\text{konv. Folgen}}{=}} \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a_n) \sim (c_n).$$

□

3.34 Definition: **1)** $\mathbb{R} := \mathrm{CF}(\mathbb{Q})/_\sim = \big\{[(a_n)] : (a_n) \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})\big\}$,

2) $[(a_n)] + [(b_n)] := [(a_n + b_n)]$,

3) $[(a_n)] \cdot [(b_n)] := [(a_n \cdot b_n)]$.

3.35 Satz: Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ sind wohldefiniert.

Beweis: **1)** $(a_n), (b_n)$ sind C-Folgen $\Rightarrow$ $(a_n + b_n)$ ist C-Folge $\Rightarrow$ $[(a_n + b_n)]$ ist definiert.

2) Zeige: $\left.\begin{aligned}[(a_n)] &= [(a'_n)] \\ [(b_n)] &= [(b'_n)]\end{aligned}\right\} \Rightarrow [(a_n + b_n)] = [(a'_n + b'_n)]$:

$a_n - a'_n \to 0 \;\wedge\; b_n - b'_n \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\big((a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)\big) = \lim_{n\to\infty}(a_n - a'_n + b_n - b'_n) \overset{\text{Satz über}}{\underset{\text{konv. Folgen}}{=}} 0 + 0 = 0.$$

□

3.36 Satz: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beweis: **(KG+):** $[(a_n)] + [(b_n)] \overset{\text{Def }+}{=} [(a_n + b_n)] \overset{\text{KG+ in }\mathbb{Q}}{=} [(b_n + a_n)] \overset{\text{Def }+}{=} [(b_n)] + [(a_n)]$.

(AG+): Genauso

(NE+): $[(\frac{1}{n})] = [(0)] =: 0 \;\Rightarrow\; [(a_n)] + 0 = [(a_n)] + [(0)] = [(a_n + 0)] = [(a_n)]$.

(IE+): $-[(a_n)] = [(-a_n)]$, denn $[(a_n)] + [(-a_n)] = [(a_n - a_n)] = [0] = 0$.

Genauso: (AG·), (KG·), (NE·) mit $1 := [(1)] = [(1 + \frac{1}{2^n})] = [(\frac{n}{n+1})]$.

(IE·): Sei $[(a_n)] \neq 0 \Leftrightarrow \neg\Big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\Big)$

$$\Leftrightarrow \neg\big(\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n| < \varepsilon\big)$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |a_n| \geq \varepsilon_0$$

Zwischenziel: Zeige $\exists c > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m > N : |a_m| > c$.

(a_n) C-Folge $\Rightarrow\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$.

Wähle $N := N_\varepsilon\ \Rightarrow\ \exists n_0 > N_\varepsilon : |a_{n_0}| \geq \varepsilon$.

Für $m > N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
|a_m| &= |a_m - a_{n_0} + a_{n_0}| \\
&= |a_{n_0} + a_m - a_{n_0}| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\underset{\text{nach unten}}{\geq}} \big||a_{n_0}| - |a_m - a_{n_0}|\big| \\
&\geq |a_{n_0}| - |a_m - a_{n_0}| \\
&> \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \forall m > N_\varepsilon : |a_m| > \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Definiere das inverse Element zu $[(a_n)]$ durch $b_n := \begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & \text{falls } a_n \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b_n) \text{ ist C-Folge (3.26)} \\ a_n \cdot b_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow\ a_n \cdot b_n - 1 = 0 \text{ für } n > N_\varepsilon \end{cases}$$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n - 1) = 0$, d.h. $[(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(a_n \cdot b_n)] = [(1)] = 1$.

(DG): Wie oben

□

3.37 Definition: $(a_n) \in$ CF($\mathbb{Q}$) heißt **positiv**, falls

$$\exists \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n \geq \delta,$$

3.38 Beispiele: **1)** $a_n := 1 + \dfrac{1}{n}$ ist positiv: $a_n \geq \delta := 1$ für $n > N := 1$.

2) $b_n := \dfrac{1}{n}$ ist nicht positiv, da $b_n \to 0$.

3) $c_n := \begin{cases} -1\,000 & \text{für } n \le 10^6 \\ 1 & \text{für } n > 10^6 \end{cases}$ ist positiv: $N := 10^6,\ \delta := 1$.

3.39 Satz: „positiv“ und „$\sim$“ sind verträglich,d.h.

$$(a_n) \text{ positiv } \wedge\ (b_n) \sim (a_n)\ \Rightarrow\ (b_n) \text{ positiv.}$$

Beweis: (a_n) positiv: $\exists \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n \geq \delta$.
$(b_n) \sim (a_n)\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0\ \Rightarrow\ \exists N_\delta \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\delta : |b_n - a_n| < \dfrac{\delta}{2}$.
$\Rightarrow$ Für $n > \max\{N, N_\delta\}$ gilt

$$b_n\ =\ a_n + b_n - a_n\ \geq\ a_n - |b_n - a_n|\ >\ \delta - \frac{\delta}{2}\ =\ \frac{\delta}{2}.$$

$\Rightarrow$ (b_n) ist positiv. □

3.40 Satz: Sei $(a_n) \in$ CF($\mathbb{Q}$). Dann ist genau eine der drei Aussagen erfüllt:

(i) (a_n) positiv,

(ii) $a_n \to 0$,

(iii) $(-a_n)$ ist positiv.

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} \text{(i)} & \Leftrightarrow & \exists \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n \geq \delta \\ \text{(ii)} & \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n| < \varepsilon \\ \text{(iii)} & \Leftrightarrow & \exists \delta' > 0\ \exists N' \in \mathbb{N}\ \forall n > N' : \underbrace{-a_n \geq \delta}_{a_n \leq -\delta} \end{array}$$

Fall 1: (i) ist wahr $\Rightarrow$ (ii),(iii) sind falsch.

Fall 2: (iii) ist wahr $\Rightarrow$ (i),(ii) sind falsch.

Fall 3: $\neg$(i) $\wedge$ $\neg$(ii) ist wahr. $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \delta > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : a_n < \delta \\ \wedge\ \forall \delta' > 0\ \forall N' \in \mathbb{N}\ \exists n' > N' : a_{n'} > -\delta \end{cases}$

Sei $\varepsilon > 0$ fest. (a_n) ist C-Folge $\Rightarrow$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Wähle $\delta = \delta' := \dfrac{\varepsilon}{2}$ und $n, n' > N_\varepsilon$ mit $a_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$ und $a_{n'} > -\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Für $m > N_\varepsilon$ gelten

$$\begin{array}{rcccccl} a_m & = & a_n + \underbrace{a_m - a_n}_{<\varepsilon/2} & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} & = & \varepsilon \\ a_m & = & a_{n'} + \underbrace{a_m - a_n}_{>-\varepsilon/2} & > & -\dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2} & = & -\varepsilon \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\forall n > N_\varepsilon : -\varepsilon < a_n < \varepsilon$ ($\Leftrightarrow$ $|a_n| < \varepsilon$)
$\Rightarrow$ $a_n \to 0$
$\Leftrightarrow$ (ii). □

3.41 Definition: Für $[(a_n)], [(b_n)] \in \mathbb{R}$:

$$[(a_n)] \leq [(b_n)] \;:\Leftrightarrow\; (b_n - a_n) \text{ positiv } \vee \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

3.42 Satz: $\leq$ ist eine vollständige Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$.

Beweis: 1) reflexiv: ✓

2) antisymmetrisch: Sei $[(a_n)] \leq [(b_n)] \;\wedge\; [(b_n)] \leq [(a_n)]$

Fall 1: $(b_n - a_n)$ positiv

$\overset{\text{letzter Satz}}{\Rightarrow} \neg(b_n - a_n) \to 0 \;\wedge\; \neg(a_n - b_n)$ positiv

$\Rightarrow \neg[(b_n)] \leq [(a_n)]$

$\Rightarrow$ Fall nicht möglich.

Fall 2: $(a_n - b_n)$ positiv $\overset{\text{genauso}}{\Rightarrow} \neg[(a_n)] \leq [(b_n)]$, also nicht möglich

Fall 3: $a_n - b_n \to 0$. Dann $[(a_n)] \leq [(b_n)] \wedge [(b_n)] \leq [(a_n)] \wedge [(a_n)] = [(b_n)]$, da $(a_n) \sim (b_n)$.
Also folgt $[(a_n)] = [(b_n)]$.

3) transitiv: Sei $[(a_n)] \leq [(b_n)] \;\wedge\; [(b_n)] \leq [(c_n)]$.

Fall 1: $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \;\wedge\; \lim\limits_{n\to\infty}(c_n - b_n) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n - b_n + b_n - a_n) = 0$

$\Rightarrow [(a_n)] \leq [(b_n)]$.

$\vdots$

Fall 4: $(b_n - a_n)$ positiv und $(c_n - b_n)$ positiv $\Rightarrow (c_n - a_n)$ positiv, denn

$$c_n - a_n \;=\; \underbrace{c_n - b_n}_{\geq \delta_1,\ n_{N_1}} + \underbrace{b_n - a_n}_{\geq \delta_2,\ n > N_2} \;\overset{n > \max\{N_1, N_2\}}{\geq}\; \delta_1 + \delta_2 > 0$$

$\Rightarrow [(a_n)] \leq [(c_n)]$.

1) – 3) $\Rightarrow \leq$ ist Ordnungsrelation.

4) Vollständigkeit: Sein $[(a_n)], [(b_n)] \in \mathbb{R}$.

Fall 1: $(b_n - a_n)$ positiv $\Rightarrow [(a_n)] \leq [(b_n)]$,

Fall 2: $(b_n - a_n) \to 0 \Rightarrow [(a_n)] \leq [(b_n)]$,

Fall 1: $(a_n - b_n)$ positiv $\Rightarrow [(b_n)] \leq [(a_n)]$.

Nach letztem Satz sind dies alle Fälle.

$\square$

3.43 Satz: $(\mathbb{R}, \leq)$ ist ein geordneter Körper.

Beweis: 1) Zeige: $[(a_n)] \leq [(b_n)] \;\Rightarrow\; [(a_n)] + [(c_n)] \leq [(b_n)] + [(c_n)]$.

Fall a): $b_n - a_n \to 0 \;\Rightarrow\; b_n + c_n - (a_n + c_n) \to 0$
$\Rightarrow\; [(a_n)] + [(c_n)] = [(a_n + c_n)] \leq [(b_n)] \leq [(c_n)] = [(b_n)] + [(c_n)]$

Fall b): $(b_n - a_n)$ positiv $\;\Rightarrow\; \big(b_n + c_n - (a_n + c_n)\big)$ ist positiv
$\Rightarrow\; [(a_n)] + [(c_n)] \leq [(b_n)] + [(c_n)]$.

2) Zeige $[(a_n)] \leq [(b_n)] \;\wedge\; 0 \leq [(c_n)] \;\Rightarrow\; [(a_n)] \cdot [(c_n)] \leq [(b_n)] \cdot [(c_n)]$ genauso wie 1). $\square$

3.44 Bemerkung: 1) Damit sind in $\mathbb{R}$ automatisch definiert: $n \cdot x$, $\dfrac{x}{n}$, x^n für $n \in \mathbb{N}$, $<$, $\geq$, $>$, Folgen- und Reihenkonvergenz, C-Folgen, $|.|$.

2) Alle Sätze, die in geordneten Körpern gelten, gelten auch in $\mathbb{R}$.

3.45 Satz: Für $X \in \mathbb{R},\; X = [(x_n)]$ gelten

1) $X > 0 \;\Leftrightarrow\; (x_n)$ positiv,

2) $X| = [(|x_n|)]$.

Beweis: 1) $X > 0 \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} 0 < X \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} 0 \leq X \;\wedge\; X \neq 0$
$\Leftrightarrow\; \big((x_n - 0)$ positiv $\vee\; x_n - 0 \to 0\big) \;\wedge\; \neg(x_n \to 0) \;\Leftrightarrow\; (x_n)$ positiv.

2) **Fall a):** $X > 0 \;\Leftrightarrow\; (x_n)$ positiv $\;\Rightarrow\; \exists \delta > 0\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall n > N : x_n \geq \delta$
$\Rightarrow\; \forall n > N : x_n = |x_n| \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \big(|x_n| - x_n\big) = 0$
$\Rightarrow\; |X| = X = [(x_n)] = [(|x_n|)]$.

Fall b): $X = 0 \;\Rightarrow\; x_n \to 0 \;\Rightarrow\; |x_n| \to 0 \;\Rightarrow\; |X| = 0 = [(|x_n|)]$.

Fall c): $X < 0 \;\Leftrightarrow\; -X > 0 \;\Leftrightarrow\; (-x_n)$ positiv
$\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \big(|x_n| - (-x_n)\big) = 0$
$\Rightarrow\; |X| = -X = [(-x_n)] = [(|x_n|)]$. $\square$

3.5 Einbettung von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

3.46 Definition Einbettungsabbildung:

$$E : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : x \mapsto [\,\underbrace{(x)}_{\text{konstante Folge}}\,]$$

3.47 Satz: **1)** E ist injektiv,

2) E erhält die algebraische Struktur:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} : E(x+y) = E(x) + E(y) \;\wedge\; E(x \cdot y) = E(x) \cdot E(y),$$

3) E erhält die Ordnungsstruktur:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} : x \leq y \;\Rightarrow\; E(x) \leq E(y).$$

Beweis: **1)** Sei $x \neq y \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(x-y)}_{\text{konstante Folge}} = x - y \neq 0$

$\Rightarrow\; E(x) = [(x)] \neq [(y)] = E(y)$.

2) $E(x+y) = [(x+y)] \overset{\text{Def} +}{=} [(x)] + [(y)] = E(x) + E(y)$. Genauso für $\cdot$.

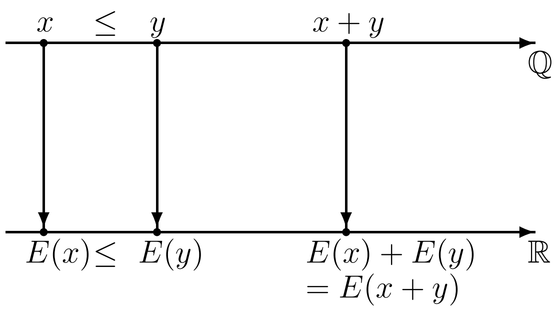
3) Sei $x \leq y$.

Fall a): $x = y \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} (y-x) = 0 \overset{\text{Def} \leq}{\Rightarrow} E(x) = [(x)] \leq [(y)] = E(y)$.

Fall b): $x < y \;\Rightarrow\; (y-x)_{n\in\mathbb{N}}$ ist positiv $\overset{\text{Def} \leq}{\Rightarrow} E(x) = [(x)] \leq [(y)] = E(y)$.

$\square$

Anschaulich:



3.48 Satz: **1)** $E(0) = 0,\; E(1) = 1,\; E(-x) = -E(x),\; E(x^{-1}) = E(x)^{-1}$ falls $x \neq 0$,

2) $\forall x \in \mathbb{Q} : \big|E(x)\big| = E\big(|x|\big)$,

3) $\forall n \in \mathbb{N} : E(n) = n \;\wedge\; E(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

Beweis: 1) Selber

2) Fall $x \geq 0 \;\Rightarrow\; E(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; \big|E(x)\big| = E(x) = E\big(|x|\big)$.
Fall $x < 0 \;\Leftrightarrow\; \neg(x \geq 0) \overset{3.47}{\Leftrightarrow} \neg\big(E(x) \geq 0\big) \;\Leftrightarrow\; E(x) < 0$
$\Rightarrow\; |E(x)| = -E(x) \overset{1)}{=} E(-x) = E\big(|x|\big)$.

3) $E(n) = E\big(\sum\limits_{k=1}^{n} 1\big) \overset{\text{vollst. Induktion}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} E(1) = n$.
$E(\frac{1}{n}) = E(n^{-1}) \overset{1)}{=} E(n)^{-1} = n^{-1} = \frac{1}{n}$.

$\square$

3.49 Definition: 1) $\mathbb{Q}_\mathbb{R} := E(\mathbb{Q}) = \text{Bild}(E)$.

2) $\forall X \in \mathbb{Q}_R \; \exists! x \in \mathbb{Q} : E(x) = X$, da E injektiv.
Schreibe $x =: E^{-1}(X)$ für $X \in \mathbb{Q}_\mathbb{R}$. Also: $E^{-1} : \mathbb{Q}_\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

3.50 Folgerung: $\forall X \in \mathbb{Q}_\mathbb{R} : \big|E^{-1}(X)\big| = E^{-1}\big(|X|\big)$.

Beweis: $X = E(x)$, d.h. $x = E^{-1}(X) \;\Rightarrow\; |X| = \big|E(X)\big| \overset{\text{letzter Satz}}{=} E\big(|X|\big)$
$\Rightarrow\; E^{-1}\big(|X|\big) = E^{-1}\big(E\big(|X|\big)\big) = |x| = \big|E^{-1}(X)\big|$.

$\square$

3.51 Satz: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. Dann

$$\exists \varepsilon' \in \mathbb{Q}_\mathbb{R},\ \varepsilon' > 0 : 0 < \varepsilon' < \varepsilon.$$

Beweis: $\varepsilon = [(\varepsilon_n)] > 0 \;\Rightarrow\; (\varepsilon_n)$ ist positiv.
$\Rightarrow\; \forall n > N : \varepsilon_n \geq \delta$ (Achtung: $\varepsilon_n, \delta \in \mathbb{Q}$).
Wähle $\varepsilon' := E(\frac{\delta}{2}) = \frac{1}{2}E(\delta)$.

1) $\delta > 0 \;\Rightarrow\; \frac{\delta}{2} > 0$ in $\mathbb{Q} \;\Rightarrow\; E(\frac{\delta}{2}) > 0$ in $\mathbb{R}$.

2) $\varepsilon - \varepsilon' = \big[(\varepsilon_n)\big] - \big[(\frac{\delta}{2})\big] = \big[(\varepsilon_n - \frac{\delta}{2})\big] > 0$,
da $(\varepsilon_n - \frac{\delta}{2})_{n\in\mathbb{N}}$ positiv ($\varepsilon_n - \frac{\delta}{2} \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > 0$ für $n > N_1$).
$\Rightarrow\; \varepsilon > \varepsilon'$.

$\square$

3.52 Satz: Sei $X = \big[(x_n)\big] \in \mathbb{R}$. Dann: $E(x_n) \to X$ in $\mathbb{R}$.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$.
Nach letztem Satz wähle $\varepsilon' \in \mathbb{Q}_\mathbb{R},\ 0 < \varepsilon' < \varepsilon$.
Setze $\varepsilon^* := E^{-1}(\varepsilon') \in \mathbb{Q}$. Insbesondere $\varepsilon^* > 0$, da $\varepsilon' > 0$.
(x_n) C-Folge in $\mathbb{Q} \;\Rightarrow\; |x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon^*}{2}$ für $n, m > N_\varepsilon$.
Sei $m = m_0 > N_\varepsilon$ beliebig, aber fest. Ziel: Zeige $|E(x_{m_0}) - X| < \varepsilon$. Dann ist bewiesen: $E(x_m) \to X$.

Setze $y_n := \varepsilon^* - |x_n - x_m|,\ n \in \mathbb{N}$

1) (y_n) ist C-Folge in $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}
|y_n - y_{n'}| &= \big||x_{n'} - x_{m_0}| - |x_n - x_{m_0}|\big| \\
&\overset{\text{Dreiecksungl. nach unten}}{\leq} \big|(x_{n'} - x_{m_0}) - (x_n - x_{m_0})\big| \\
&= |x_{n'} - x_n| \;<\; \tilde{\varepsilon}
\end{aligned}$$

für $n, n' > \tilde{N}_{\tilde{\varepsilon}}$.

2) (y_n) ist positiv: Für $n > N_\varepsilon$ gilt

$$y_n = \varepsilon^* - \underbrace{|x_n - x_{m_0}|}_{<\varepsilon^*/2} > \varepsilon^* - \frac{\varepsilon^*}{2} = \frac{\varepsilon^*}{2} =: \delta > 0.$$

$$\Rightarrow\; 0 \;<\; [(y_n)] \;=\; \big[\big(\varepsilon^* - |x_n - x_{m_0}|\big)_{n\in\mathbb{N}}\big] \;=\; \underbrace{[(\varepsilon^*)]}_{=\varepsilon'} - \big[(|x_n - x_{m_0}|)_{n\in\mathbb{N}}\big]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; \big|X - E(x_{m_0})\big| &= \big|[(x_n)] - [(x_{m_0})]\big| \;=\; \big|[(x_n - x_{m_0})]\big| \\
&= \big[(|x_n - x_{m_0}|)_{n\in\mathbb{N}}\big] \;<\; \varepsilon' \;<\; \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

3.53 Folgerung: $\forall X \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in \mathbb{Q} : |X - E(y)| < \varepsilon$
bzw. $\forall X \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists Y \in \mathbb{Q}_\mathbb{R} : |X - Y| < \varepsilon$.
Man sagt: $\mathbb{Q}_\mathbb{R}$ ist **dichte Teilmenge** von $\mathbb{R}$.

Beweis: Seien $X \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ fest, $X = [(x_n)]$.
Letzter Satz: $E(x_n) \to X \;\Rightarrow\; \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon : |E(x_n) - X| < \varepsilon$. $\square$

3.54 Satz: $(\mathbb{R}, \leq)$ ist archimedisch, d.h. $\forall X, Y > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot X > Y$.

Beweis: Wir wissen: $\mathbb{Q}$ ist archimedisch.
Letzter Satz: $\exists y \in \mathbb{Q} : |Y - E(y)| < 1 \;\Rightarrow\; Y < E(y) + 1$.
Zu X wähle $x \in \mathbb{Q}$ mit $0 < E(x) < X$. Insbesondere $x > 0$.
$\mathbb{Q}$ archimedisch $\Rightarrow\; \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot x > y + 1$
$\Rightarrow\; n \cdot X > n \cdot E(x) = E(n \cdot x) > E(y+1) = E(y) + 1 > Y$. □

3.55 Folgerung: $\dfrac{1}{n} \to 0$ in $\mathbb{R}$ (Selber beweisen).

3.6 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

3.56 Satz: $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede C-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Beweis: Sei (X_n) C-Folge in $\mathbb{R}$.
Zu jedem X_n existiert ein $Y_n \in \mathbb{Q}_\mathbb{R}$ mit $|X_n - Y_n| < \dfrac{1}{n}$. Setze $y_n := E^{-1}(Y_n)$ bzw. $Y_n = E(y_n)$.
Behauptung: $X := [(y_n)] \;\Rightarrow\; X_n \to X$.

1) (y_n) ist C-Folge: Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q},\ \varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

$$
\begin{aligned}
|Y_n - Y_M| &= |Y_n - X_n + X_n - X_m + X_m - Y_m| \\
&\overset{\triangle-\text{Ungl}}{\leq} \underbrace{|Y_n - X_n|}_{<\frac{1}{n}<\frac{E(\varepsilon)}{3},\ n>N_1} + \underbrace{|X_n - X_m|}_{<\frac{E(\varepsilon)}{3},\ n>N_\varepsilon} + \underbrace{|X_m - Y_m|}_{<\frac{1}{n}<\frac{E(\varepsilon)}{3},\ n>N_1} \\
&< E(\varepsilon) \quad \text{für } n > \max\{N_1, N_\varepsilon\} \\
\Rightarrow\; |y_n - y_m| &= \left|E^{-1}(Y_n) - E^{-1}(Y_m)\right| = \left|E^{-1}(Y_n - Y_m)\right| \\
&= E^{-1}\big(|Y_n - Y_m|\big) < E^{-1}\big(E(\varepsilon)\big) = \varepsilon \quad \text{für } n > \max\{N_1, N_\varepsilon\}
\end{aligned}
$$

2) Setze $X := \big[(y_n)\big] \in \mathbb{R}$.

$$
\Rightarrow\; |X_n - X| \leq \underbrace{|X_n - Y_n|}_{<\frac{1}{n}} + \underbrace{|Y_n - X|}_{=|E(y_n)-X|\to 0 \text{ (vorletzter Satz)}} < \varepsilon \text{ für } n \text{ genügend groß}
$$

□

3.57 Folgerung: In $\mathbb{R}$ gilt:

$$(a_n) \text{ ist C-Folge} \;\Leftrightarrow\; (a_n) \text{ ist konvergent.}$$

3.58 Definition: Eine Folge (a_n) in einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ heißt **nach oben (unten) beschränkt**, falls

$$\exists S \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq S \quad (a_n \geq S).$$

3.59 Hauptsatz über monotone Folgen in $\mathbb{R}$: Sei (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent.
Sei (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent.

Beweis: Widerspruchsbeweis. Annahme: (a_n) monoton wachsend
und $\exists S \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq S$
und (a_n) nicht konvergent.

(a_n) nicht konvergent $\Leftrightarrow$ (a_n) keine C-Folge

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m, n > N : |a_n - a_m| \geq \varepsilon.$$

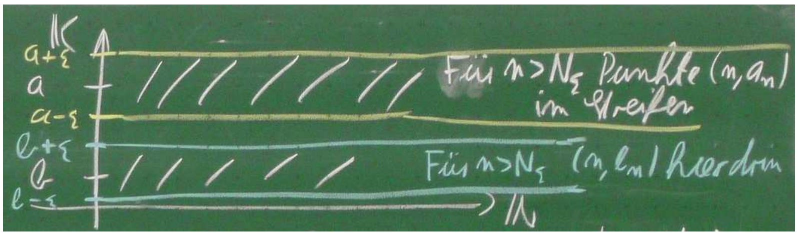
Wähle $n_1 > m_1$ mit $a_{n_1} - a_{m_1} = |a_{n_1} - a_{m_1} \geq \varepsilon \ \Rightarrow\ a_{n_1} \geq a_{m_1} + \varepsilon$.
Wähle $n_2 > m_2 > n_1$ mit $a_{n_2} - a_{m_2} = |a_{n_2} - a_{m_2}| \geq \varepsilon \ \Rightarrow\ a_{n_2} \geq a_{m_2} + \varepsilon \geq a_{n_1} + \varepsilon \geq a_{m_1} + 2\varepsilon$.
Wähle $n_3 > m_3 > n_2$ mit $a_{n_3} - a_{m_3} = |a_{n_3} - a_{m_3}| \geq \varepsilon \ \Rightarrow\ a_{n_3} \geq a_{m_3} + \varepsilon \geq a_{m_1} + 3\varepsilon$.
$\vdots$
$\Rightarrow\ a_{n_j} \geq a_{m_j} + j\varepsilon > S$ für j genügend groß $\lightning$ $a_n \leq S$. $\square$

3.60 Satz: Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen in einem geordneten Körper. Dann:

$$\big(\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\big) \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3.61 Achtung: $a_n = 0,\ b_n = \frac{1}{n}$: Dann $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Beweis: Kontraposition: Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: b$.



Wähle $\varepsilon := \dfrac{a-b}{3}$.
Für $n > N_\varepsilon$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon \ \Rightarrow\ a_n = a + a_n - a \geq a - |a_n - a| > a - \varepsilon = a - \dfrac{a-b}{3} = \dfrac{2a}{3} + \dfrac{b}{3}$.
Für $n > N'_\varepsilon$ gilt $|b_n - b| < \varepsilon \ \Rightarrow\ b_n = b + b_n - b \leq b + |b_n - b| < b + \varepsilon = b + \dfrac{a-b}{3} = \dfrac{a}{3} + \dfrac{2b}{3}$.
$\Rightarrow\ b_n = \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{3} + \dfrac{b}{3} < \dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{3} < a_n$ für $n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$
$\Rightarrow\ \exists n \in \mathbb{N} : b_n < a_n$. $\square$

3.62 Satz: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.

Beweis: $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1) (s_n) ist monoton wachsend:

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

2) (s_n) ist nach oben beschränkt:
Vorüberlegung:
Für $k \geq 2$ gilt $k! = \underbrace{k}_{\geq 2} \cdot \underbrace{(k-1)}_{\geq 2} \cdots \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{2}_{=2} \cdot 1 \geq 2^{k-1}$, gilt auch für $k = 1$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow s_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \overset{\text{Vorüberlegung}}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\
&\overset{k'=k-1}{=} 1 + \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k'}} \overset{\text{geom. Summe}}{=} 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\
&\leq 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3.
\end{aligned}$$

$\square$

3.63 Definition: $\mathrm{e} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(= \lim_{n\to\infty} s_n \right)$.

3.64 Satz: e ist irrational.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest, und $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
s_{n+m} - s_n &= \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{\underbrace{k(k-1)\cdots(n+2)}_{\geq (n+2)^{k-n-1}} \cdot (n+1)!} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{(n+2)^{k-n-1}(n+1)!} \overset{k'=k-n-1}{=} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k'=0}^{m-1} \frac{1}{(n+2)^{k'}} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - \left(\frac{1}{n+2}\right)^m}{1 - \frac{1}{n+2}} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \frac{n+2}{(n+1)^2} = \frac{1}{n!} \frac{n+2}{n^2+2n+1} \\
&\leq \frac{1}{n!} \frac{n+2}{n^2+2n} = \frac{1}{n \cdot n!}.
\end{aligned}$$

$m \to \infty \;\Rightarrow\; \mathrm{e} - s_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_{n+m} - s_n) \le \dfrac{1}{n \cdot n!}$.
Außerdem: $s_{n+m} \ge s_{n+1}$ für $m \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \mathrm{e} = \lim_{m\to\infty} s_{n+m} \ge s_{n+1} > s_n$.
Also: $$0 < \mathrm{e} - s_n \le \tfrac{1}{n \cdot n!} \qquad (*)$$

Für $n = 2:\; s_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; 0 < \mathrm{e} - \frac{5}{2} \le \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \mathrm{e} \notin \mathbb{N}_0$.
Außerdem $\mathrm{e} > 0$, da $s_n > 0$ und somit $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \ge 0$, aber $\mathrm{e} \ne 0$.

Annahme: $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N},\; q \ge 2$ (da $\mathrm{e} \notin \mathbb{N}$).
$(*)$ für $n := q$:

$$\begin{aligned} 0 \;&<\; \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \;\le\; \frac{1}{q \cdot q!} \quad \Big|\cdot q! \\ \Rightarrow\; 0 \;&<\; \underbrace{\underbrace{\frac{p \cdot q!}{q}}_{=p(q-1)! \in \mathbb{N}} - \sum_{k=0}^{q} \underbrace{\frac{q!}{k!}}_{\in \mathbb{N}}}_{=\text{ ganze Zahl } \in\,]\,0, \frac{1}{2}]\ ⚡} \;\le\; \frac{1}{q} \overset{q \ge 2}{\le} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also war die Annahme "e ist rational" falsch. $\square$

3.65 Satz: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

Beweis: $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

1) (a_n) ist monoton wachsend:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} \frac{n-1}{n-1} \frac{n}{n} = \frac{(n+1)^n (n-1)^n}{n^{2n}} \frac{n}{n-1} \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\ &\underset{\text{Bernoulli}}{\overset{\frac{n}{n-1} > 0}{\ge}} \left(1 + n\Big(-\frac{1}{n^2}\Big)\right) \frac{n}{n-1} = 1. \end{aligned}$$

Also: $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \ge 1$ für alle $n \in \mathbb{N},\; n \ge 2$.

2) (a_n) ist beschränkt:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Binom. Satz}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \cdot 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1} \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{<1} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n < 3. \end{aligned}$$

Also: $a_n < 3$ für $n \in \mathbb{N}$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$:

Aus 2): $a_n \le s_n$ für $n \in \mathbb{N}$ $\overset{(a_n),(s_n)\text{ konv}}{\Rightarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}$.

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, aber zunächst fest gewählt. Aus 2) für $n \ge m$:

$$\begin{aligned} a_n &\ge \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\to 1 \text{ für } n\to\infty} \cdot \frac{1}{k!} \\ \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n &\ge \sum_{k=0}^{m} 1 \cdot \frac{1}{k!} = s_m \\ \overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n &\ge \lim_{m\to\infty} s_m = \mathrm{e}. \end{aligned}$$

□

3.66 Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

1) $S \in \mathbb{R}$ heißt **obere** (**untere**) **Schranke** von M, falls

$$\forall x \in M : x \le S \ (x \ge S).$$

2) M heißt **nach oben** (**unten**) **beschränkt**, falls

$$\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : x \le S \ (x \ge S).$$

M heißt **beschränkt**, falls

$$\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : |x| \le S.$$

3) $M_+ := \{S \in \mathbb{R} : S \text{ ist obere Schranke von } M\}$

$M_- := \{S \in \mathbb{R} : S \text{ ist untere Schranke von } M\}$

3.67 Beispiel: $M = \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$: $M_+ = [2, \infty[$

$M_- =]-\infty, 1]$

3.68 Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \ne \emptyset$. Dann:

$$M \text{ nach oben beschränkt} \Rightarrow M_+ \text{ hat ein Minimum,}$$

$$M \text{ nach unten beschränkt} \Rightarrow M_- \text{ hat ein Maximum.}$$

Beweis: Intervallschachtelung. Wähle ein $x \in M$ und ein $S \in M_+$ ($\neq \emptyset$, da M nach oben beschränkt).

Definiere $(a_n), (b_n)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned}
a_0 &:= x, \quad b_0 := S \\
a_{n+1} &:= \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := b_n \qquad \text{falls } \frac{a_n + b_n}{2} \notin M_+ \\
a_{n+1} &:= a_n, \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{falls } \frac{a_n + b_n}{2} \in M_+
\end{aligned}$$

Dann gelten für alle $n \in \mathbb{N}$:

(i) $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

(ii) $|b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{1}{2}|b_n - a_n| = \frac{1}{4}|b_{n-1} - a_{n-1}| \ldots = \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0|$

(iii) $b_n \in M_+$, $\forall S \in M_+ : a_n \leq S$

(a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow\ a_n \to a$

(b_n) monoton fallend und nach unten beschränkt $\Rightarrow\ b_n \to b$

(ii) $\Rightarrow\ b - a = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0) = 0 \ \Rightarrow\ b = a$

Behauptung: $a = b = \min(M_+)$

1) $a \in M_+$: $x \in M \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N} : x \leq b_n \ \Rightarrow\ x \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b = a.$

2) $\forall S \in M_+ : a \leq S$: $S \in M_+ \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq S \ \Rightarrow\ a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq S.$

□

3.69 Definition: $M \subseteq \mathbb{R},\ M \neq \emptyset$. Dann sind **Supremum** und **Infimum** von M definiert durch

$$\sup(M) := \begin{cases} \min(M_+) & \text{falls } M \text{ nach oben beschränkt} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\inf(M) := \begin{cases} \max(M_-) & \text{falls } M \text{ nach unten beschränkt} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

3.70 Bemerkungen: Falls M nach oben beschränkt: $\sup(M) =$ kleinste obere Schranke, $M_+ = [\sup(M), \infty[$.
Falls M nach unten beschränkt: $\inf(M) =$ größte untere Schranke, $M_- =]-\infty, \inf(M)]$.

3.71 Satz: $M \subseteq \mathbb{R},\ M \neq \emptyset$, M nach oben (unten) beschränkt. Dann existiert eine Folge (a_n) in M mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup(M)$ $\big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf(M)\big)$.

Beweis: $S := \sup(M)$ ist kleinste obere Schranke
$\Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N} : S - \frac{1}{n}$ ist keine obere Schranke
$\Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists a_n \in M : S - \frac{1}{n} < a_n \leq S$
$\Rightarrow\ (a_n)$ ist Folge in M, $a_n \to S$ (Einschließungskriterium). □

3.72 Definition: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{R}$.

1) $v \in \mathbb{R}$ heißt **Verdichtungspunkt** der Folge (a_n), falls es eine gegen v konvergente Teilfolge von (a_n) gibt: $\exists (a_{n_k}) : a_{n_k} \to v$ für $k \to \infty$.

2) $V(a_n) := \{v \in \mathbb{R} : v$ ist Verdichtungspunkt von $(a_n)\}$.

3.73 Beispiele: $V\big((-1)^n\big) = \{-1, 1\},\ V(\frac{1}{n}) = \{0\}$.

3.74 Satz von Bolzano-Weierstraß für Folgen**:** Ist (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, so besitzt (a_n) eine konvergente Teilfolge.

Beweis: $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq S$.
Intervallschachtelung: Definiere $(b_k), (c_k), (n_k)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned}
&b_1 := -S, \quad c_1 := S, \quad n_1 := 1 \\
&b_{k+1} := \frac{b_k + c_k}{2}, \quad c_{k+1} := c_k \quad \text{falls in } \left[\frac{b_k + c_k}{2}, c_k\right] \text{ unendlich viele Folgenglieder liegen} \\
&b_{k+1} := b_k, \quad c_{k+1} := \frac{b_k + c_k}{2} \quad \text{sonst}
\end{aligned}$$

Wähle n_{k+1} mit $n_{k+1} > n_k$ und $a_{n_{k+1}} \in [b_{k+1}, c_{k+1}]$ (dieses Intervall enthält nach Konstruktion unendlich viele Folgenglieder)

Dann: $b_k \leq b_{k+1} \leq a_{n_{k+1}} \leq c_{k+1} \leq c_k$

$$|b_{k+1} - c_{k+1}| = \frac{1}{2}|b_k - c_k| = \ldots = \frac{1}{2^{k-1}}\, S$$

$$\Rightarrow \begin{cases}
(b_k) \text{ monoton wachsend und beschränkt } (b_k \leq c_1 \ \Rightarrow\ b_k \to b \\
(c_k) \text{ monoton fallend und beschränkt } (c_k \geq b_1 \ \Rightarrow\ c_k \to c \\
b - c = \lim\limits_{k\to\infty} (b_k - c_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2k-1}\, S = 0 \ \Rightarrow\ b = c \\
b_k \leq a_{n_{k+1}} \leq c_k \overset{\text{Einschließungskriterium}}{\Rightarrow} a_{n_k} \to b = c \text{ für } k \to \infty
\end{cases}$$

$\Rightarrow\ (a_{n_k})$ ist konvergente Teilfolge. □

3.75 Folgerung: Ist (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, dann $V(a_n) \neq \emptyset$.

3.76 Definition: Sei (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind **Limes Superior** und **Limes Inferior** definiert durch:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup V(a_n), \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf V(a_n).$$

3.77 Beispiel: $\limsup_{n\to\infty}(-1) = 1,\ \liminf_{n\to\infty}(-1) = -1.$

3.78 Satz: (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist $V(a_n)$ beschränkt.

Beweis: $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq S.$
Sei $v \in V(a_n)\ \Rightarrow$ Es existiert eine Teilfolge $a_{n_k} \to v$ für $k \to \infty$.

$$\left.\begin{array}{l} (\forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} \leq S) \ \Rightarrow \ v = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \leq S, \\ (\forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} \geq -S) \ \Rightarrow \ v = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \geq -S, \end{array}\right\} \Rightarrow \ |v| \leq S. \text{ Also ist } V(a_n) \text{ beschränkt.}$$

□

3.79 Satz: (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann

$$\limsup_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} a_n \in V(a_n).$$

D.h.
$$\begin{array}{rcll} \limsup\limits_{n\to\infty} a_n & = & \max V(a_n), & \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \text{ ist größter Verdichtungspunkt} \\ \liminf\limits_{n\to\infty} a_n & = & \min V(a_n), & \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \text{ ist kleinster Verdichtungspunkt.} \end{array}$$

Beweis: Vorletzter Satz: Es existiert eine Folge (v_j) in $V(a_n)$ mit $v_j \to \limsup_{n\to\infty}$ für $j \to \infty$.

$$\begin{array}{lll} v_1 \overset{k\to\infty}{\longleftarrow} a_{n_k^{(1)}} & \Rightarrow & \exists k_1 \in \mathbb{N} : \left|a_{n_{k_1}^{(1)}} - v_1\right| < 1 \\ v_2 \overset{k\to\infty}{\longleftarrow} a_{n_k^{(2)}} & \Rightarrow & \exists k_2 \in \mathbb{N} : \left|a_{n_{k_2}^{(2)}} - v_1\right| < \dfrac{1}{2} \ \wedge \ n_{k_2}^{(2)} > n_{k_1}^{(1)} \\ v_3 \overset{k\to\infty}{\longleftarrow} a_{n_k^{(3)}} & \Rightarrow & \exists k_3 \in \mathbb{N} : \left|a_{n_{k_3}^{(3)}} - v_1\right| < \dfrac{1}{3} \ \wedge \ n_{k_3}^{(3)} > n_{k_2}^{(2)} \\ & \vdots & \\ v_j \overset{k\to\infty}{\longleftarrow} a_{n_k^{(j)}} & \Rightarrow & \exists k_j \in \mathbb{N} : \left|a_{n_{k_j}^{(j)}} - v_1\right| < \dfrac{1}{j} \ \wedge \ n_{k_j}^{(j)} > n_{k_{j-1}}^{(j-1)} \\ & \vdots & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(a_{n_{k_j}^{(j)}}\right)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist Teilfolge von } (a_n), \\ a_{n_{k_j}^{(j)}} \to \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \text{ für } j \to \infty, \text{ denn} \\ \left|a_{n_{k_j}^{(j)}} - \limsup\limits_{n\to\infty} a_n\right| \leq \underbrace{\left|a_{n_{k_j}^{(j)}} - v_j\right|}_{<1/j} + \underbrace{\left|v_j - \limsup\limits_{n\to\infty} a_n\right|}_{\to 0} < \varepsilon \text{ für } j \text{ genügend groß} \end{cases}$$

Also ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ein Verdichtungspunkt von (a_n).

□

3.80 Satz: Sei (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon < a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon.$$

Beweis: Widerspruchsbeweis, Annahme

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : \big(\underbrace{\liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \geq a_n}_{p} \vee \underbrace{a_n \geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon}_{q}\big).$$

$\Rightarrow$ ∞ viele a_n erfüllen p oder ∞ viele a_n erfüllen q

$\Rightarrow$ Es xistiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $\quad \forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} \leq \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \quad (1)$

oder $\quad \forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} \geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \quad (2)$

(a_{n_k}) ist beschränkt, da (a_n) beschränkt $\overset{\text{Bolzano}}{\underset{\text{Weierstraß}}{\Rightarrow}}$ Es existiert eine konv. Teilfolge $a_{n_{k_j}} \to a,\ j \to \infty.$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \in V(a_n) \\ \text{falls (1) gilt:} \quad a = \lim\limits_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} \leq \underbrace{\liminf\limits_{n\to\infty} a_n}_{=\min V(a_n)} - \varepsilon < \min V(a_n) \ \lightning \\ \text{falls (2) gilt:} \quad a = \lim\limits_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} \geq \underbrace{\limsup\limits_{n\to\infty} a_n}_{=\max V(a_n)} + \varepsilon > \max V(a_n) \ \lightning \end{cases}$$

□

3.81 Folgerung: (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann

$$(a_n) \text{ konvergent} \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \sharp V(a_n) = 1.$$

In diesem Fall: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

3.82 Definiton:: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{R}$. Falls eine Teilfolge (a_{n_k}) existiert mit $a_{n_k} \to \infty$ (bzw. $a_{n_k} \to -\infty$), dann

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \infty \qquad (\text{bzw. } \liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty).$$

4 Die komplexen Zahlen

4.1 Der Körper der komplexen Zahlen

4.1 Vorüberlegung: Angenommen, es gibt einen Körper $\mathbb{K}$ mit

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K} \ \wedge \ \exists\, \mathrm{i} \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R} : \mathrm{i}^2 = -1.$$

Dann muss $\mathbb{K}$ mindestens alle $x + \mathrm{i} \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ enthalten. Außerdem muss für solche Zahlen gelten:

$$\begin{aligned}(x_1 + \mathrm{i}\, y_1) + (x_2 + \mathrm{i}\, y_2) &\overset{\text{AG+, KG+}}{=} x_1 + x_2 + \mathrm{i}\, y_1 + \mathrm{i}\, y_2 \\ &\overset{\text{DG}}{=} \underbrace{x_1 + x_2}_{\in\mathbb{R}} + \mathrm{i}\, \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in\mathbb{R}}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(x_1 + \mathrm{i}\, y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}\, y_2) &\overset{\text{DG}}{=} (x_1 + \mathrm{i}\, y_1)x_2 + (x_1 + \mathrm{i}\, y_1)\mathrm{i}y_2, \\ &\overset{\text{DG, KG}\cdot\text{, AG}\cdot}{=} x_1\, x_2 + \mathrm{i}\, y_1\, x_2 + x_1\, \mathrm{i}\, y_2 + \underbrace{\mathrm{i}\, y_1\, \mathrm{i}\, y_2}_{=\mathrm{i}^2 y_1 y_2 = -y_1 y_2} \\ &= \underbrace{x_1\, x_2 - y_1\, y_2}_{\in\mathbb{R}} + \mathrm{i}\, \underbrace{(y_1\, x_2 + x_1\, y_2)}_{\in\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Woher soll i kommen?

4.2 Satz: $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{A1}$$

$$\underbrace{(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)}_{\text{neue Verknüpfung}} := \underbrace{(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)}_{\text{nur relle Add./Mult. verwendet}} \tag{M1}$$

ist ein Körper mit

$$\begin{aligned}&\text{Nullelement:} & 0 &= (0, 0) \\ &\text{Einselement:} & 1 &= (1, 0) \\ &\text{Inverses Element } +\text{:} & -(x, y) &= (-x, -y) \\ &\text{Inverses Element } \cdot\text{:} & (x, y)^{-1} &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \qquad \text{falls } (x, y) \neq (0, 0).\end{aligned}$$

In $\mathbb{C}$ kann man also rechnen wie in jedem Körper.

Beweis: Durch Nachrechnen, z.B.

$(x, y) + (0, 0) \ =$

$(x, y) \cdot (1, 0) \ =$

$(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \ =$

$\square$

4.3 Definition: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ heißt Körper der **komplexen Zahlen**.

4.4 $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$: Die Einbettungsabbildung $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$ ist injektiv und erhält die algebraische Struktur:

$$\underbrace{E(x) + E(y)}_{+\text{ in }\mathbb{C}} = (x,0) + (y,0) \overset{\text{(A1)}}{=} (x+y, 0) = \underbrace{E(x+y)}_{+\text{ in }\mathbb{R}}$$

$$\underbrace{E(x) \cdot E(y)}_{\cdot\text{ in }\mathbb{C}} = (x,0) \cdot (y,0) \overset{\text{(M1)}}{=} (x \cdot y - 0 \cdot 0, 0 \cdot y - x \cdot 0) = (x \cdot y, 0) = \underbrace{E(x \cdot y)}_{\cdot\text{ in }\mathbb{R}}$$

Es ist egal, ob man in $\mathbb{R}$ rechnet und dann abbildet, oder erst abbildet und dann in $\mathbb{C}$ rechnet. Wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit $E(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $(x,0) \in \mathbb{C}$: $x = (x, 0)$. Für $\alpha \in \mathbb{R},\ (x,y) \in \mathbb{C}$ gilt

$$\alpha \cdot (x,y) = (\alpha, 0) \cdot (x,y) = (\alpha x, \alpha y) = (x,y) \cdot \alpha.$$

4.5 Definition: $\mathrm{i} := (0, 1)$ heißt **imaginäre Einheit**.

4.6 Satz: **1)** Es gilt $\mathrm{i}^2 = -1 \in \mathbb{R}$.

2) $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists x, y, \in \mathbb{R} : z = x + \mathrm{i}\, y$ (**Normalform** einer komplexen Zahl).

Beweis: **1)** $\mathrm{i}^2 = (0,1) \cdot (0,1) =$

2) $z = (x,y) =$ $\square$

4.7 Beispiel: $\dfrac{4+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} =$

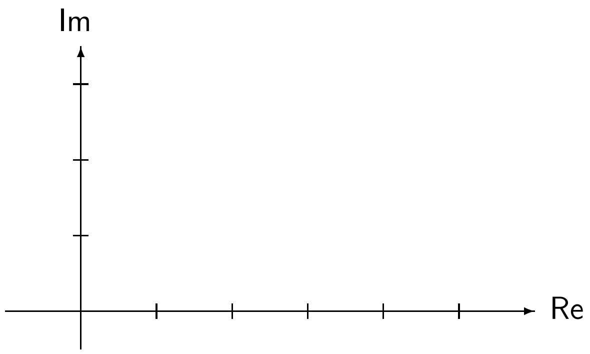
4.8 Definition: Sei $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

1) x heißt **Realteil** von z : $x = \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\, z$.

2) y heißt **Imaginärteil** von z : $y = \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Im}\, z$.

3) $\overline{z} := x - \mathrm{i}\, y$ heißt die zu z **konjugierte** Zahl.

4.9 Veranschaulichung in der **Gauß'schen Zahlenebene:**



4.10 Satz: Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten:

1) $z \mapsto \overline{z} \mathrel{\hat{=}}$ Spiegelung an reeller Achse in der Gauß'schen Zahlenebene,

2) $\overline{\overline{z}} \;=\; z$,

3) $z \in \mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{z} \;=\; z$,

4) $\operatorname{Re} z \;=\; \dfrac{z+\overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z \;=\; \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$,

5) $\overline{z_1 + z_2} \;=\; \overline{z}_1 + \overline{z}_2$,

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} \;=\; \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \quad \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} \;=\; \dfrac{1}{\overline{z}}$ falls $z \neq 0$,

7) $z \;=\; x + \mathrm{i}\, y \;\Rightarrow\; z \cdot \overline{z} \;=\; x^2 + y^2 \;\in \mathbb{R}_0^+ = [\,0, \infty\,[\,.$

Beweis: Durch Nachrechnen, z.B. 4)

$$z = x + \mathrm{i}y \;\Rightarrow\; \overline{z} = x - \mathrm{i}y \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{z+\overline{z}}{2} & = \\[2ex] \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} & = \end{cases}$$

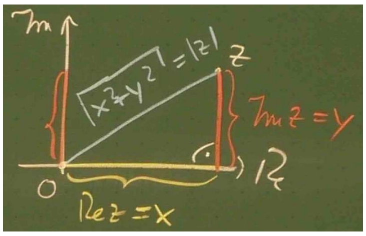
□

4.11 Bemerkung: Wegen $\mathrm{i}^2 = -1^2$ kann $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden.

4.12 Definition: Sei $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \;\in\; \mathbb{R}$$

der **Betrag** von z. (Geometrisch: $|z|$ = Länge der Strecke von 0 bis z in Gauß'scher Ebene.)



4.13 Hilfssatz: 1) $|z| \;=\; |\overline{z}|$

2) $|\operatorname{Re} z| \;\leq\; |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \;\leq\; |z|$

3) $z \;=\; x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; |z|_{\mathbb{C}} \;=\; \sqrt{x^2 + 0} \;=\; |x|_{\mathbb{R}}$.
Also: Der Betrag in $\mathbb{C}$ verallgemeinert den Betrag in $\mathbb{R}$.

4.14 Satz: $(\mathbb{C}, |.|)$ ist ein bewerteter Körper, d.h. es gelten:

(B1) $\forall z \in \mathbb{C} : \Big(|z| \geq 0 \ \wedge \ \big(|z| = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 0\big)\Big)$,

(B2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 \cdot z_2| \ = \ |z_1| \cdot |z_2|$,

(B3) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : |z_1 + z_2| \ \leq \ |z_1| + |z_2|$ ($\triangle$-Ungleichung).

Insbesondere gelten: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_2 \neq 0 : \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| \ = \ \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 \pm z_2| \ \geq \ \big||z_1| - |z_2|\big|$ ($\triangle$-Ungleichung nach unten).

Beweis: **(B1)** $|z| \geq 0$ okay

$$|z| \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ x \ = \ 0 \ \wedge \ y \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ z \ = \ 0$$

(B2) $|z_1\, z_2|^2 \ = \ (z_1\, z_2) \cdot \overline{(z_1\, z_2)} \ = \ z_1\, z_2\, \overline{z_1}\, \overline{z_2} \ = \ z_1\, \overline{z_1}\, z_2\, \overline{z_2} \ = \ |z_1|^2\, |z_2|^2$

(B3)
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\, \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)\ (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\, \overline{z_1} + z_1\, \overline{z_2} + z_2\, \overline{z_1} + z_2\, \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \underbrace{z_1\, \overline{z_2} + \overline{z_1\, \overline{z_2}}}_{=2\mathrm{Re}\,(z_1\, \overline{z_2}) \leq 2|z_1\, \overline{z_2}| = 2|z_1|\, |\overline{z_2}| = 2|z_1|\, |z_2|} \\ &\leq \big(|z_1| + |z_2|\big)^2 \end{aligned}$$
$\square$

4.2 Folgen in $\mathbb{C}$

4.15 Definition: (z_n) Folge in $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.

1) (z_n) heißt **beschränkt**, falls

$$\exists S \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |z_n| \leq S.$$

2) (z_n) heißt **konvergent** zum den **Grenzwert** z ($z = \lim\limits_{n \to \infty} z_n$), falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |z_n - z| < \varepsilon.$$

3) (z_n) heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N_\varepsilon : |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

4.16 Hilfssatz Vergleich von Beträgen: Sei $z = x + \mathrm{i}\,y$. Dann gilt

$$|z| \;\leq\; |x| + |y| \;\leq\; \sqrt{2}\,|z|.$$

D.h. wenn $|z|$ klein ist, sind auch $|x|, |y|$ klein und umgekehrt.

Beweis: 1) $|z|^2 \;=\; x^2 + y^2 \;=\; |x|^2 + |y|^2 \;\leq\; |x|^2 + |y|^2 + 2|x|\,|y| \;=\; \big(|x| + |y|\big)^2$
$\Rightarrow\; |z| \;\leq\; |x| + |y|$.

2) Vorüberlegung: Es gilt $2|x|\,|y| \;\leq\; |x|^2 + |y|^2$, denn $|x|^2 - 2|x|\,|y| + |y|^2 = \big(|x| - |y|\big)^2 \geq 0.$

$$\Rightarrow\; \big(|x|+|y|\big)^2 \;=\; |x|^2+2|x|\,|y|+|y|^2 \;\overset{\text{Vorüberl.}}{\leq}\; 2(|x|^2+|y|^2) \;=\; 2|z|^2 \;\Rightarrow\; |x|+|y| \;\leq\; \sqrt{2}\,|z|.$$

$\square$

4.17 Satz: Seien $z_n = x_n + \mathrm{i}\,y_n,\; z = x + \mathrm{i}\,y$. Dann gelten

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \;\wedge\; \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y.$

2) (z_n) ist C-Folge in $\mathbb{C}$ $\;\Leftrightarrow\;$ $(x_n), (y_n)$ sind C-Folgen in $\mathbb{R}$.

3) $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede C-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Beweis: 1) folgt aus $|z_n - z| \;\leq\; |x_n - x| + |y_n - y| \;\leq\; \sqrt{2}\,|z_n - z|$.

2) Genauso.

3) (z_n) C-Folge in $\mathbb{C}$, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ $\overset{2)}{\Rightarrow}$ $(x_n), (y_n)$ C-Folgen in $\mathbb{R}$
$\overset{\mathbb{R}\text{ vollständig}}{\Rightarrow}$ $x_n \to x,\; y_n \to y$ in $\mathbb{R}$
$\overset{1)}{\Rightarrow}$ $z_n \to z := x + \mathrm{i}y$ in $\mathbb{C}$.

$\square$

4.18 Beispiele: 1) $z_n \;=\; \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \mathrm{i}\underbrace{\left(2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}_{\to 2} \;\to\; 2\mathrm{i}$

2) $z_n \;=\; \dfrac{1}{n} + \mathrm{i}\,n$:

3) $z_n = (-1)^n - \dfrac{\mathrm{i}}{n}$:

4) $|z| < 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0.$

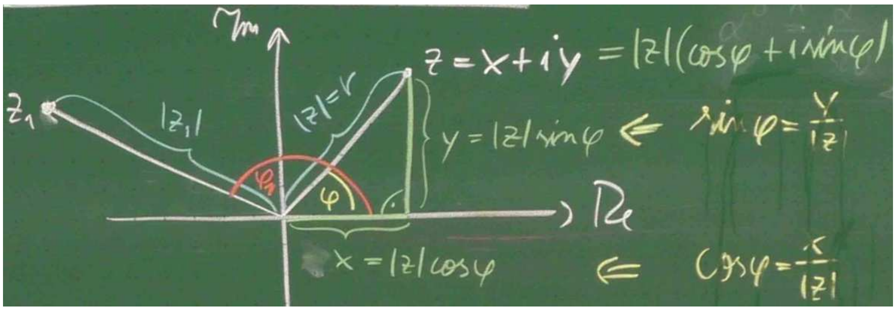
4.19 Bemerkung: Die Rechenregeln für konvergente Folgen gelten genauso in $\mathbb{C}$ (vgl. frühere Sätze), da für den Beweis nur die Eigenschaften der Betragsfunktion benützt wurden:

1) (z_n) konvergent $\Rightarrow$ (z_n) beschränkt.

2) $(z_n), (w_n)$ konvergent $\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}(z_n + w_n) &= \left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right) + \lim\limits_{n\to\infty} w_n \\ \lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) &= \left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} w_n \end{cases}$

3) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0$ setze $v_n := \begin{cases} \dfrac{z_n}{w_n} & \text{falls } w_n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Dann $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}$.

4.3 Polardarstellung komplexer Zahlen



4.20 Satz: Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existieren eindeutige Zahlen $r \in]\,0, \infty\,[$, $\varphi \in [0, 2\pi\,[$, so dass

$$z \;=\; r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \quad (\textbf{Polardarstellung} \text{ von } z).$$

Es gilt

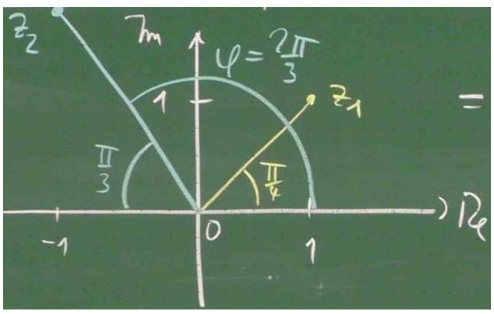
$$r = |z|, \;\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}, \;\sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}.$$

Der Winkel φ heißt **Argument** von z: $\arg(z) := \varphi \in [0, 2\pi\,[$.

4.21 Tabelle:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\varphi$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\varphi$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

4.22 Beispiele:



1) $z_1 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\big)$,

2) $z_2 = -1 + \sqrt{3} = 2\big(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\big)$,

3) $z_3 = \mathrm{i} = 1\big(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\big)$,

4) $z_4 = -1 = 1(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$.

4.23 Multiplikation: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2)$

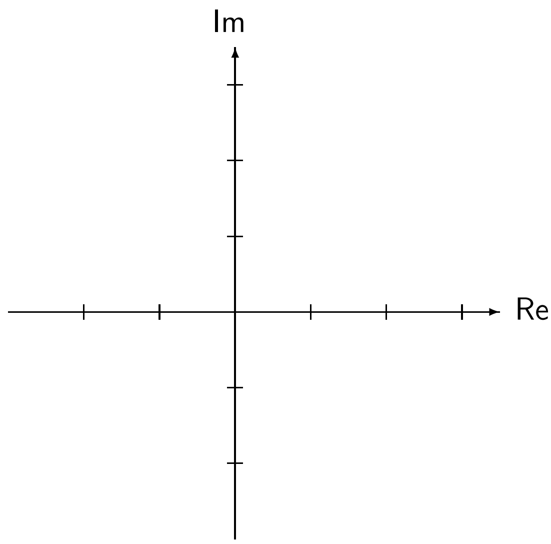
$$\begin{aligned}\Rightarrow\ z_1\,z_2 &= r_1\,r_2\big(\underbrace{\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2}_{=\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + \mathrm{i}\,(\underbrace{\cos\varphi_1\,\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\,\cos\varphi_2}_{=\sin(\varphi_1+\varphi_2)})\big) \quad \text{(Additionstheoreme)}\\ &= r_1\,r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1+\varphi_2))\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen werden in Polardarstellung multipliziert, in dem man ihre Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

4.24 Vereinfachung: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} := \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \ \Rightarrow$ Polardarstellung: $\quad z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.
Additionstheoreme $\Rightarrow\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$.
Multiplikation in Polardarstellung: $r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\cdot r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$.
Wichtig: Für $\varphi\in\mathbb{R}$ gilt $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right| = \left|\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$.

4.25 Beispiele: **1)** $(1+\mathrm{i})^n =$

2) Lösungen von $z^3 = -8$:



4.26 Satz: Zu gegebenen $n\in\mathbb{N}$, $r>0$ und $\varphi\in[0,2\pi[$ besitzt die Gleichung

$$z^n = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

genau n verschiedene Lösungen

$$z_k = r^{1/n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

D.h. für $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ besitzt die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene Lösungen $z\in\mathbb{C}$.

4.27 Bemerkung: Die Symbole $\sqrt[n]{a},\ a^{1/n}$ sind in $\mathbb{C}$ nicht eindeutig definiert, sie bezeichnen i.a. eine der Lösungen.

4.28 Quadratische Gleichungen: Die Gleichung $az^2 + bz + c \;=\; 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0$ hat die Lösungen

$$z_{1/2} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

($w = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ bezeichnet beide Lösungen der Gleichung $w^2 = b^2 - 4ac$).

4.4 Polynome

4.29 Definition: 1) Ein **Polynom** ist eine Funktion

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k \;=\; a_0 + a_1\, z + \ldots + a_n\, z^n$$

mit den **Koeffizienten** $a_k \in \mathbb{C}$. Falls $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, heißt das Polynom **reell** (dann betrachtet man auch $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der **Grad** des Polynoms: Grad $(P) := n$. Für das Nullpolynom: Grad$(0) := -1$.

2) Die Menge der komplexen/reellen Polynome: $\mathbb{C}[x],\ \mathbb{R}[x]$.

3) Rechnen mit Polynomen: Seien P, Q Polynome.

$$\begin{aligned} P + Q :&\quad z \mapsto P(z) + Q(z), \quad P + Q \text{ Polynom},\\ P \cdot Q :&\quad z \mapsto P(z) \cdot Q(z), \quad\ \ P \cdot Q \text{ Polynom}, \end{aligned}$$

4.30 Division mit Rest: Seien $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\in \mathbb{R}[x]$) mit $1 \leq \text{Grad}\, Q \leq \text{Grad}\, P$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $P_1, R \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\in \mathbb{R}[x]$), so dass

$$P \;=\; P_1 \cdot Q + R \;\wedge\; \text{Grad}\, R < \text{Grad}\, Q.$$

4.31 Beispiel: $(4z^4 - 14z^3 + 6z^2 + 3z - 5) : (2z^3 + 3z + 1) =$

4.32 Satz: Sei $P \in \mathbb{C}[x]$, Grad $P \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$P(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; (z-\lambda) \text{ ist } \textbf{Teiler} \text{ von } P, \text{ d.h. } \exists P_1 \in \mathbb{C}[x] : P(z) = (z-\lambda)P_1(z).$$

Beweis: "$\Leftarrow$" klar.

"$\Rightarrow$": Teilen mit Rest: $P(z) \;=\; (z-\lambda)P_1(z) + R(z)$, Grad $R < 1$, also $R =$ konstant.

$$0 \;=\; P(\lambda) \;=\; 0 \cdot P_1(\lambda) + R(\lambda) \;\Rightarrow\; R(\lambda) \;=\; 0 \;\overset{R=\text{const}}{\Rightarrow}\; R = 0.$$

□

4.33 Satz: Ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Beweis: Annahme: Grad$(P) = n \geq 1 \;\wedge\; P(\lambda_j) = 0$ für $j = 0, \ldots, n+1$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ paarweise verschieden.

$$\Rightarrow\; P(z) \overset{4.32}{=} (z-\lambda_1)P_1(z) \overset{4.32}{=} (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)P_2(z) = \ldots = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_{n+1}) \cdot \underbrace{P_{n+1}(z)}_{P_{n+1}\neq 0}$$

$\Rightarrow$ Grad$(P) \geq n+1$ ↯

□

4.34 Identitätssatz: Sind $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ Polynome mit Grad(P), Grad$(Q) \leq n$, die an mindestens $n+1$ paarweise verschiedenen Stellen übereinstimmen. so folgt $P = Q$.

Beweis: Grad$(P-Q) \leq n$, $P-Q$ hat mindestens $n+1$ verschiedene Nullstellen $\Rightarrow$ $P - Q = 0$.

□

4.35 Definition: $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt ***k*-fache Nullstelle** von P oder Nullstelle mit **Vielfachheit *k***, falls $(z-\lambda)^k$, aber nicht $(z-\lambda)^{k+1}$ Teiler von P ist. D. h. $P(z) = (z-\lambda)^k P_1(z)$ mit $P_1(\lambda) \neq 0$.

4.36 Fundamentalsatz der Algebra (C. F. Gauß): Sei $P \in \mathbb{C}[x]$ Polynom vom Grad $n \geq 1$: $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k$, $a_n \neq 0$. Dann gelten

1) P hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.

2) Es gibt komplexe Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (nicht notwendig verschieden), so dass

$$P(z) \;=\; a_n(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n).$$

Die λ_j sind bis auf Nummerierung eindeutig. Zählt man jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit, so hat P genau Grad (P) Nullstellen.

(Ohne Beweis)

4.37 Reelle Polynome: Sei $P \in \mathbb{R}[x]$. Dann:

$$P(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; P(\overline{\lambda}) = 0.$$

Beweis: $0 \;=\; P(\lambda) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\,\lambda^k$

$$\Rightarrow\; 0 \;=\; \overline{0} \;=\; \overline{P(\lambda)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k\,\lambda^k} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\overline{a_k}}_{=a_k}\,(\overline{\lambda})^k \;=\; P(\overline{\lambda}).$$

□

4.38 Relle Faktorisierung reller Polynome: Sei $P \in \mathbb{R}[x]$, Grad $(P) \geq 1$.
Fundamentalsatz $\Rightarrow\; \exists : \lambda \in \mathbb{C} : P(\lambda) = 0$.

Fall 1: $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad\Rightarrow\; P(z) = (z-\lambda)P_1(z), \quad P_1 \in \mathbb{R}[x]$.

Fall 2: $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: 4.37 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P(\overline{\lambda}) &= 0 \\ \Rightarrow\; P(z) &= (z-\lambda)(z-\overline{\lambda})P_1(z) \;=\; \big(z^2 - \overline{\lambda}\,z - \lambda z + \lambda\,\overline{\lambda}\big)P_1(z) \\ &= \underbrace{\big(z^2 - (2\mathrm{Re}\,\lambda)z + |\lambda|^2\big)}_{\text{reelles Polynom}} P_1(z) \qquad \Rightarrow\; P_1 \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

Fortsetzung dieses Verfahrens: P ist darstellbar als Produkt linearer und quadratischer reeller Polynome, wobei die quadratischen Polynome keine reellen Nullstellen besitzen, d.h. sie sind über $\mathbb{R}$ irreduzibel.

4.39 Beispiel: $P(z) = z^4 + 4z^3 + 2z^2 + 4z + 1$ hat Nullstelle $z = \mathrm{i} \Rightarrow$ weitere Nullstelle $z = -\mathrm{i}$

4.40 Rationale Nullstellen: Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Ist $x = \frac{p}{q}$ Nullstelle von P, wobei $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind, dann ist p Teiler von a_0 und q Teiler von a_n.

Beweis: $0 \;=\; P\Big(\frac{p}{q}\Big) \;=\; a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_0$

$$\Leftrightarrow\; 0 \;=\; a_n\,p^n + a_{n-1}\,p^{n-1}\,q + \ldots + a_0\,q^n \qquad (*)$$

$(*) \;\Leftrightarrow\; a_n\,p^n \;=\; -q(\ldots) \;\Rightarrow\; q$ teilt $a_n\,a^n \overset{p,q \text{ teilerfremd}}{\Rightarrow} q$ teilt a_n

Genauso: $(*) \;\Leftrightarrow\; q^n\,a_0 = -p(\ldots) \;\Rightarrow\; p$ teilt $q^n\,a_0 \overset{p,q \text{ teilerfremd}}{\Rightarrow} p$ teilt a_0

□

4.41 Beispiele: **1)** $P(x) \;=\; 1 \cdot x^3 - 2x^2 - 6x + 4$,

2) $P(x) \;=\; 12x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 1$.

5 Mächtigkeit von Mengen

5.1 Vorüberlegung: Zählen der Elemente einer endlichen Menge $A = \{a, 4, \beta, \chi, Z\}$: Man nummeriert die Elemente

$$a \leftrightarrow 1,\ 4 \leftrightarrow 2,\ \beta \leftrightarrow 3,\ \chi \leftrightarrow 4,\ Z \leftrightarrow 5. \tag{5.1}$$

Dies ist eine bijektive Abbildung $f : A \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5.2 Definition: Zwei Mengen A, B heißen **gleich mächtig** ($A \sim B$), falls es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

5.3 Beispiele: **1)** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Z.B. $f(x) = 3x \ \Rightarrow\ A \sim B$.

2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{G} := \{2, 4, 6, \ldots\} : n \mapsto 2n$ ist bijektiv: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{G}$ sind gleich mächtig.

3) $]-1, 1[$ und $\mathbb{R}$ sind gleich mächtig:

$$f :]-1, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 & \text{falls } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ \frac{1}{x} + 1 & \text{falls } -1 < x < 0 \end{cases}$$

ist bijektiv.

5.4 Definition: Eine Menge A heißt

- **unendlich**, falls es eine echte Teilmenge $B \subsetneqq A$ gibt mit $A \sim B$, andernfalls heißt A **endlich**,
- **abzählbar**, falls $A \sim \mathbb{N}$,
- **überabzählbar**, falls A unendlich und nicht abzählbar.

5.5 Satz: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beweis: Schreibe die Elemente von $\mathbb{Q}$ geschickt auf:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ -\frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\ -\frac{2}{1} & -\frac{2}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{4} & -\frac{2}{5} & \cdots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

Nummeriere die Elemente: Geh das Schema in Pfeilrichtung durch, überspringe alle bereits an anderer Stelle nummerierten Zahlen. Die Nummerierung ist die bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$:
$a_1 = \dfrac{1}{1},\ a_2 = -\dfrac{1}{1},\ a_3 = \dfrac{1}{2},\ a_3 = \dfrac{1}{3}, \ldots$.

$\square$

5.6 Satz: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis: Offensichtlich ist $\mathbb{R}$ unendlich.

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar: Widerspruchsbeweis.

Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Definiere

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } f(n) = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \ \wedge \ b_n \neq 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N} : f(n) = b_0, \ldots b_n \ldots \neq x = 0, \ldots a_n \ldots \ \lightning f$ surjektiv. $\square$

5.7 Bemerkung: Die **Kontinuumshypothese** besagt: Ist $M \subseteq \mathbb{R}$, so gilt genau eine der drei Aussagen:

(i) M ist endlich, **(ii)** $M \sim \mathbb{N}$, **(iii)** $M \sim \mathbb{R}$.

Es gibt keine Menge, die „mächtiger" ist als $\mathbb{N}$, aber „weniger mächtig" als $\mathbb{R}$.

Man kann beweisen, dass die Kontinuumshypothese weder verifiziert noch falsifiziert werden kann (in unserem Axiomensystem).

5.8 Satz: Eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Beweis: Sei $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Menge, deren Elemente abzählbare Mengen sind. Schreibe alle Elemente von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in ein Schema:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{Elemente von } A_1: & a_1^{(1)}, & & a_2^{(1)}, & \rightarrow & a_3^{(1)}, & & a_4^{(1)}, & \rightarrow & a_5^{(1)}, & \ldots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\text{Elemente von } A_2: & a_1^{(2)}, & & a_2^{(2)}, & & a_3^{(2)}, & & a_4^{(2)}, & & a_5^{(2)}, & \ldots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\text{Elemente von } A_3: & a_1^{(3)}, & & a_2^{(3)}, & & a_3^{(3)}, & & a_4^{(3)}, & & a_5^{(3)}, & \ldots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
\text{Elemente von } A_4: & a_1^{(4)}, & & a_2^{(4)}, & & a_3^{(4)}, & & a_4^{(4)}, & & a_5^{(4)}, & \ldots \\
\qquad \vdots & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Nummeriere die Elemente von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$: Gehe entlang der Pfeile und nummeriere jedes Element, an dem du vorbeikommst. Lasse dabei alle Elemente weg, die bereits als Element einer anderen Menge nummeriert wurden. Nummerierung = bijektive Abbildung auf $\mathbb{N}$. $\square$

6 Stetigkeit

6.1 Abstand

6.1 Definition: Sei M nichtleere Menge. Eine **Metrik** (oder **Abstand**) auf M ist eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

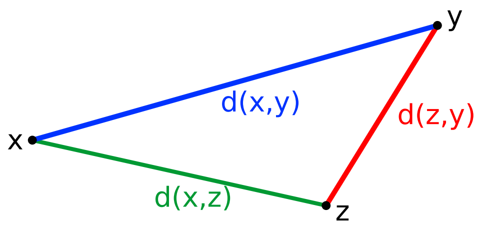
(M1) $\forall x, y \in M : \Big(d(x,y) \geq 0 \;\wedge\; \big(d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y\big)\Big)$ Positivität, Definitheit,

(M2) $\forall x, y \in M : d(x,y) = d(y,x)$ Symmetrie,

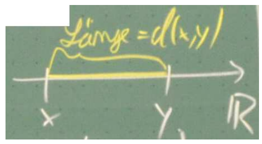
(M3) $\forall x, y, z \in M : d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\triangle$-Ungleichung.

(M,d) heißt **metrischer Raum**.

Veranschaulichung:
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(x,y)$



6.2 Beispiele: **1)** $(\mathbb{R}, d)$ mit $d_{|.|}(x,y) := |x-y|$ ist ein metrischer Raum.

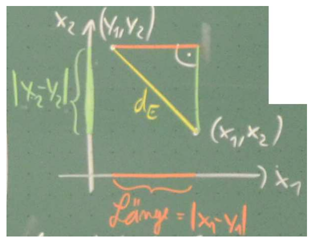


2) $(\mathbb{C}, d_{|.|})$ mit $d_{|.|}(z,u) := |z-u|$ ist ein metrischer Raum.

3) $(\mathbb{R}^2, d_{\mathsf{E}})$ mit

$$d_{\mathsf{E}}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

(euklidischer Abstand) ist ein metrischer Raum.



4) **Diskrete Metrik**: Sei $M \neq \emptyset$.

$$d(x,y) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

ist eine Metrik auf M.

6.3 Dreiecks-Ungleichung nach unten: Sei (M,d) ein metrischer Raum. Für $x, y, z \in M$ gilt

$$d(x,y) \;\geq\; \big|d(x,z) - d(z,y)\big|.$$

Beweis:
$$d(x,z) \overset{\triangle-\text{Ungl}}{\leq} d(x,y) + d(y,z) \;\Rightarrow\; d(x,y) \geq d(x,z) - d(z,y),$$
$$d(y,z) \overset{\triangle-\text{Ungl}}{\leq} d(y,x) + d(x,z) \;\Rightarrow\; d(x,y) \overset{(M2)}{=} d(y,x) \geq d(x,z) - d(z,y).$$ □

6.2 Folgen

6.4 Definition: Sei (M,d) ein metrischer Raum, $x \in M$, (x_n) Folge in M.

1) (x_n) heißt **konvergent zum Grenzwert** x, geschrieben $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ oder $x_n \to x$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n > N_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

2) (x_n) heißt **konvergent**, falls

$$\exists x \in M : x_n \to x.$$

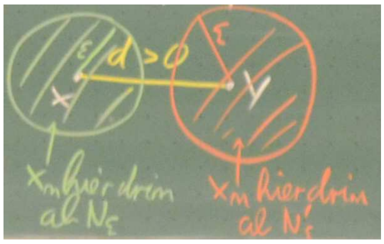
Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie **divergent**.

3) (x_n) heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n, m > N_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

6.5 Satz: Sei (M,d) ein metrischer Raum. Eine Folge in M besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Widerspruchsbeweis, Annahme: $x_n \to x, \ x_n \to y, \ x \neq y$.



$$\begin{aligned}
x \neq y &\overset{(M1)}{\Rightarrow} d(x,y) > 0 \ \Rightarrow \ \varepsilon := \frac{1}{2} d(x,y) > 0 \\
x_n \to x &\Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon \\
x_n \to y &\Rightarrow d(x_n, y) < \varepsilon \text{ für } n > N'_\varepsilon \\
&\Rightarrow \forall n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\} : d(x,y) \overset{\triangle-\text{Ungl}}{\leq} d(x, x_n) + d(x_n, y) < 2\varepsilon = d(x,y) \\
&\Rightarrow d(x,y) < d(x,y) \ \ ↯
\end{aligned}$$

$\square$

6.6 Satz und Definition: Sei (M,d) ein metrischer Raum.

1) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

2) Gilt umgekehrt: Jede Cauchy-Folge in M ist konvergent, dann heißt (M,d) **vollständig**.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ fest. $x_n \to x \ \Rightarrow \ \forall n > N_\varepsilon : d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \ \forall m, n > N_\varepsilon : d(x_n, x_m) \overset{\triangle-\text{Ungl}}{\leq} d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ $\square$

6.7 Beispiele: 1) $M = \mathbb{Q}$, $d(x,y) = |x-y|$:

$$x_n \to x \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\forall n > N_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon.$$

Dies ist der Konvergenzbegriff, den wir bereits kennen. $(\mathbb{Q}, d)$ ist **nicht vollständig**.

2) $(\mathbb{R}, d_{|.|})$: Neue Definition = alte Definition, $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ ist vollständig.

3) $(\mathbb{C}, d_{|.|})$: Neue Definition = alte Definition, $(\mathbb{C}, d_{|.|})$ist vollständig (vgl. 4.17), genauso $(\mathbb{R}^2, d_\mathsf{E})$.

4) $M = \mathbb{Q}$, $d =$ diskrete Metrik $\Rightarrow$ $(\mathbb{Q}, d)$ ist vollständig.

6.3 Offene und abgeschlossene Mengen

6.8 Definition: Sei (M,d) ein metrischer Raum, $x_0 \in M$.

1) Für $R > 0$ (bedeutet $R \in \mathbb{R} \;\wedge\; R > 0$) heißt

$$B_R(x_0) \;:=\; \big\{x \in M : d(x, x_0) < R\big\}$$

offene Kugel um x_0 mit Radius R.

2) $U \subseteq M$ heißt **Umgebung** von x_0, falls

$$\exists R > 0 : B_R(x_0) \subseteq U.$$

6.9 Beispiele: 1) In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$: $B_R(x_0) =]x_0 - R, x_0 + R\,[$.

2) In $(\mathbb{R}^2, d_E)$: $B_R(x_1, x_2) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < R^2\}$.

6.10 Satz: (M,d) metrischer Raum, $x \in M$, (x_n) Folge in M. Dann

$$x_n \to x \;\Leftrightarrow\; \forall U \subseteq M,\; U \text{ Umgebung von } x \;\; \exists N_U \in \mathbb{N} \;\forall n > N_U : x_n \in U.$$

Beweis: " $\Rightarrow$ ": U Umgebung von x $\Rightarrow$ $\exists R > 0 : B_R(x) \subseteq U$
Wähle $\varepsilon := R \overset{x_n \to x}{\Rightarrow} \exists N_R \in \mathbb{N} \;\forall n > N_R : \underbrace{d(x, x_n) < R}_{\Leftrightarrow\; x_n \in B_R(x)} \overset{B_R(x) \subseteq U}{\Rightarrow} \forall n > N_R : x_n \in U.$

" $\Leftarrow$ ": Zu $\varepsilon > 0$ wähle $U := B_\varepsilon(x)$ $\Rightarrow$ $\forall n > N_\varepsilon : \underbrace{x_n \in B_\varepsilon(x)}_{\Leftrightarrow d(x, x_n) < \varepsilon}$.

$\square$

6.11 Satz: (M,d) metrischer Raum, $x_0 \in M$.

1) $U \subseteq M$ Umgebung von $x_0 \ \wedge\ U \subseteq U' \subseteq M \ \Rightarrow\ U'$ Umgebung von x_0.

2) $U_1, \ldots, U_n$ (endlich viele) Umgebungen von $x_0 \ \Rightarrow\ \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ Umgebung von x_0.

Beweis: **1)** $B_R(x_0) \subseteq U \ \Rightarrow\ B_R(x_0) \subseteq U'$.

2) $\exists R_1, \ldots, R_n > 0 : B_{R_1}(x_0) \subseteq U_1 \ \wedge\ \ldots B_{R_n}(x_0) \subseteq U_n$.

$$R := \min\{R_1, \ldots, R_n\} \ \Rightarrow\ \begin{cases} R > 0 \\ \forall k = 1, \ldots, n : B_R(x_0) \subseteq B_{R_k}(x_0) \subseteq U_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ B_R(x_0) \ \subseteq\ \bigcap_{k=1}^{n} U_k$$

$$\Rightarrow\ \bigcap_{k=1}^{n} U_k \text{ ist Umgebung von } x_0.$$

□

6.12 Beispiel: In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$: $X = \{1\} \cup [2,3[\ \Rightarrow\ X$ ist keine Umgebung von 1 und von 2. X ist Umgebung aller Punkte aus $]2,3[$.

6.13 Definition: Es sei (M,d) metrischer Raum, $A \subseteq M$.

1) $x \in A$ heißt **innerer Punkt** von A, falls A Umgebung von x ist.

2) A heißt **offen**, wenn: $x \in A \ \Rightarrow\ x$ ist innerer Punkt von A.

6.14 Satz: (M,d) metrischer Raum. Dann

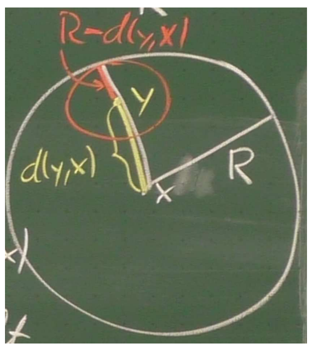
1) M und $\emptyset$ sind offen.

2) $\forall x \in M\ \forall R > 0 : B_R(x)$ ist offen.

Beweis: **1)** $A = M$: $\forall x \in M\ \forall R > 0 : B_R(x) \subseteq M$.
$A := \emptyset$: $x \in A$ ist immer falsch, also ist „$x \in A \ \rightarrow\ x$ ist innerer Punkt von A“ immer wahr.

2) Sei $y \in B_R(x)$ beliebig aber fest.
Setze $R' := R - d(y,x) > 0$
Behauptung: $B_{R'}(y) \subseteq B_R(x)$
(dann ist y innerer Punkt, also $B_R(x)$ offen)

$$z \in B_{R'}(y) \ \Leftrightarrow\ d(y,z) < R'$$
$$\Rightarrow\ d(x,z) \ \overset{\triangle\text{ Ungl.}}{\leq}\ d(x,y) + d(y,z)$$
$$<\ d(x,y) + R' \ =\ R$$
$$\Rightarrow\ z \in B_R(x).$$



□

6.15 Satz: 1) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

2) Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Beweis: 1) Sei $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ eine Menge offener Mengen.

$x \in \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \;\Leftrightarrow\; \exists \alpha_0 \in A : x \in O_{\alpha_0}$.

O_{α_0} offen $\Rightarrow$ O_{α_0} Umgebung von $x \overset{O_{\alpha_0} \subseteq \bigcup O_\alpha}{\underset{6.11}{\Rightarrow}} \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$ ist Umgebung von x.

2) Seien $O_1, \ldots, O_n$ offen.

$x \in \bigcap_{k=1}^{n} O_k \;\Leftrightarrow\; \forall k = 1, \ldots, n : x \in O_k$

$\Rightarrow\; \forall k = 1, \ldots, n : O_k$ ist Umgebung von $x \overset{6.11}{\Rightarrow} \bigcap_{k=1}^{n} O_k$ ist Umgebung von x. $\square$

6.16 Definition: $A \subseteq M$ heißt **abgeschlossen**, falls $M \setminus A$ offen ist.

6.17 Beispiele: 1) $\emptyset$ und M sind offen und abgeschlossen.

2) Endliche Mengen sind abgeschlossen: $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$.
Zeige: $M \setminus A$ offen.
Zu $y \in M \setminus A$ konstruiere $R > 0$, so dass $B_R(y) \subseteq M \setminus A$ ($\Rightarrow$ $M \setminus A$ offen)
Wähle $R := \min\{d(y, x_k) : k = 1, \ldots n\} > 0 \;\Rightarrow\; B_R(y) \subseteq M \setminus A$, denn
$z \in B_R(y) \;\Leftrightarrow\; d(z, y) < R$, aber $d(y, x_k) \geq R$ für $k = 1, \ldots, n$, also $x_k \notin B_R(y)$.

3) In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$: $]\,a, b\,[$, $]-\infty, a\,[$, $]\,a, \infty\,[$ sind offen ($a, b \in \mathbb{R}$)
$\Rightarrow$ $[a, b]$, $]-\infty, a]$, $[a, \infty\,[$ sind abgeschlossen.

6.18 Satz: 1) Der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

2) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis: Übungen

6.19 Definition: Sei (M, d) metrischer Raum, $X \subseteq M$.

1) $\overset{\circ}{X} = X^\circ := \bigcup\{O \subseteq M : O \subseteq X \;\wedge\; O$ offen$\}$ heißt **Inneres** von X.

2) $\overline{X} := \bigcap\{A \subseteq M : X \subseteq A \;\wedge\; A$ abgeschlossen$\}$ heißt **Abschluss** von X.

6.20 Bemerkungen: 1) $\overset{\circ}{X}$ ist offen (siehe 6.18) und ist die größte offene Teilmenge von X.

2) $\overline{X}$ ist abgeschlossen und ist die kleinste abgeschlossene Menge, die X als Teilmenge enthält (d.h. $Y \subseteq M$ abgeschlossen $\wedge$ $X \subseteq Y \;\Rightarrow\; \overline{X} \subseteq Y$).

6.21 Beispiele: 1) X abgeschlossen $\Rightarrow$ $\overline{X} = X$, $\quad X$ offen $\Rightarrow$ $\overset{\circ}{X} = X$.

2) In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$:
$$\begin{aligned} \overline{]\,a,b\,[} &= [a,b] \\ \overline{]-\infty,a\,[} &= \,]-\infty,a] \\ [a,b]^\circ &= \,]\,a,b\,[\\ ]-\infty,a]^\circ &= \,]-\infty,a\,[\end{aligned}$$

6.22 Definition: Sei (M,d) metrischer Raum.

1) Sei $X \subseteq M$. Eine Menge $O = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ offener Mengen heißt **offene Überdeckung** von X, falls $X \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha$.

2) $K \subseteq M$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilmenge enthält, die offene Überdeckung von K ist.

6.23 Beispiele: 1) Endliche Mengen sind kompakt:
$K = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$ mit offener Überdeckung O.
$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} \exists \alpha_1 \in A : x_1 \in O_{\alpha_1} \\ \exists \alpha_2 \in A : x_2 \in O_{\alpha_2} \\ \qquad\vdots \\ \exists \alpha_n \in A : x_n \in O_{\alpha_n} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} O_{\alpha_k}, \\ \{O_{\alpha_1}, \ldots, O_{\alpha_n}\} \text{ endliche Teilmenge von } O \end{array}$$

2) In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$: $\mathbb{N}$ ist nicht kompakt: $O := \{B_{1/3}(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ist offene Überdeckung von $\mathbb{N}$, bei der kein einziges Element weggelassen werden kann, sonst liegt keine Überdeckung von $\mathbb{N}$ vor.

6.24 Definition: Sei (M,d) metrischer Raum. $A \subseteq M$ heißt **beschränkt**, falls
$$\exists x_0 \in M \;\exists R > 0 : A \subseteq B_R(x_0).$$

6.25 Satz: Sei (M,d) metrischer Raum. Dann gilt
$$K \subseteq M \text{ kompakt} \;\Rightarrow\; K \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.}$$

Beweis: 1) Wähle ein festes $x_0 \in M$. $O := \{B_R(0) : R > 0\}$ ist offene Überdeckung von K:
$x \in K \;\Rightarrow x \in B_R(x_0)$ für $R > d(x, x_0)$. Also $K \subseteq \bigcup\limits_{R>0} B_R(x_0)$.

K kompakt $\Rightarrow$ $\exists R_1, \ldots, R_n > 0 : K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{R_k}(0)$

$R := \max\{R_1, \ldots, R_n\} > 0 \;\Rightarrow\; K \subseteq B_R(0)$, also K beschränkt.

2) Zeige $M \setminus K$ ist offen. Sei $x_0 \in M \setminus K$, Zeige $\exists R > 0 : B_R(x_0) \subseteq M \setminus K$.
$O := \{B_{d(x,x_0)/2}(x) : x \in K\}$ ist offene Überdeckung von K.

K kompakt $\Rightarrow$ $\exists x_1, \ldots x_n \in K : K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{d(x_k,x_0)/2}(x_k)$.

Setze $R := \min\{\frac{1}{2}\, d(x_k, x_0) : k = 1, \ldots, n\} > 0$. Behauptung: $B_R(x_0) \subseteq M \setminus K$.
Seien $y \in B_R(x_0),\;\; x \in K$ mit $\underbrace{x \in B_{d(x_k,x_0)/2}(x_k)}_{(*)}$. Zeige $y \neq x$ (dann $B_R(x_0) \subseteq M \setminus K$).

$$\begin{array}{rcl}
(*) \;\Rightarrow\; d(x_0, x) & > & \frac{1}{2} d(x_k, x_0) \;\geq\; R, \text{ denn} \\
d(x_0, x) & \underset{\text{nach unten}}{\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\geq}} & \big| d(x_0, x_k) - d(x_k, x) \big| \\
& \geq & d(x_0, x_k) - d(x_k, x) \\
& > & d(x_0, x_k) - \frac{1}{2} d(x_0, x_k)
\end{array}$$

$\Rightarrow\; d(x, y) \underset{\text{nach unten}}{\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\geq}} d(x, x_0) - d(x_0, y) \;>\; R - R \;=\; 0.$

$\Rightarrow\; d(x, y) \neq 0$, also $x \neq y$. $\square$

6.4 Häufungspunkte

6.26 Definition: (M, d) metrischer Raum, $A \subseteq M$.

1) $h \in M$ heißt **Häufungspunkt** von A, falls

$$\forall U \subseteq M,\ U \text{ Umgebung von } h\ \exists x \in A \setminus \{h\} : x \in U.$$

2) $H(A) := \{h \in M : h$ ist Häufungspunkt von $A\}$.

6.27 Beispiele: 1) In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$: $H(\,]-1, 1[\,) \;=\; [-1, 1]$,
$H\big(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}\big) \;=\; \{0\}$,
$H(\mathbb{N}) \;=\; \emptyset$,
$H(\mathbb{Q}) \;=\; \mathbb{R}$.

2) In (M, d): $H\big(\{x_1, \ldots, x_n\}\big) = \emptyset$, $H(\emptyset) = \emptyset$.

6.28 Satz: (M,d) metrischer Raum, $A \subseteq M$. Dann

1) $h \in H(A) \;\Leftrightarrow\; \exists (x_n)$ in $A : \big(x_n \to h \;\wedge\; \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq h\big)$.
Insbesondere liegen in jeder Umgebung eines Häufungspunktes unendlich viele El. von A.

2) A abgeschlossen $\;\Leftrightarrow\; H(A) \subseteq A$. Insbesondere: $H(A) = \emptyset \;\Rightarrow\; A$ abgeschlossen.

Beweis: **1)** "$\Rightarrow$": Sei $h \in H(A)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $B_{1/n}(h)$ Umgebung von h
$\overset{h \in H(A)}{\Rightarrow} \;\exists x_n \in A \setminus \{h\} : x_n \in B_{1/n}(h)$
$\Rightarrow\; (x_n)$ Folge in A, $x_n \to h$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq h$.

"$\Leftarrow$": Sei (x_n) eine solche Folge, U Umgebung von $h \;\Rightarrow\; \exists R > 0 : B_R(h) \subseteq U$
$x_n \to h \;\Rightarrow\; \forall n > N_R : x_n \in B_R(h) \;\overset{x_n \neq h}{\Rightarrow}\; \forall n > N_R : x_n \in A \setminus \{h\} \;\wedge\; x_n \in U$.

2) "$\Rightarrow$": Sei A abgeschlossen. Dann $M \setminus A$ offen.
Zeige $x \in H(A) \;\Rightarrow\; x \in A$ durch Kontraposition: $x \notin A \;\Rightarrow\; x \notin H(A)$:
$x \notin A \;\Rightarrow\; x \in M \setminus A \;\overset{M\setminus A \text{ offen}}{\Rightarrow}\; \exists R > 0 : B_R(x) \in M \setminus A \;\Rightarrow\; x \notin H(A)$.
(da $B_R(x)$ Umgebung von von x ist, die kein Element von A enthält.)

"$\Leftarrow$": Sei $H(A) \subseteq A$. Zeige: $M \setminus A$ ist offen (dann A abgeschlossen):
$x \in M \setminus A \;\Leftrightarrow\; x \notin A \;\overset{H(A)\subseteq A}{\Rightarrow}\; x \notin H(A)$
$\Rightarrow\; \exists U \subseteq M,\; U$ Umgebung von $x \;\; \forall y \in \underbrace{A \setminus \{x\}}_{=A} : y \notin U$
$\Rightarrow\; U \subseteq M \setminus A \;\wedge\; U$ Umgebung von $x \;\overset{6.11}{\Rightarrow}\; M \setminus A$ Umgebung von x.
$x \in M \setminus A$ beliebig $\;\Rightarrow\; M \setminus A$ offen.

□

6.29 Satz: Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen, (x_n) Folge in A. Dann:

$$(x_n) \text{ konvergent in } M \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n \in A.$$

Beweis: Sei $x_n \to x$ in M.
Fall 1: $\exists N_0 \in \mathbb{N}\; \forall n > N_0 : x_n = x$. Dann $x = x_{N_0+1} \in A$.
Fall 2: $\forall N \in \mathbb{N}\; \exists n > N : x_n \neq x$: Dann existiert eine Teilfolge mit $x_{n_k} \to x$ mit $\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \neq x$.
$x_n \to x \;\Rightarrow\; x_{n_k} \to x \;\underset{A \text{ abgeschlossen}}{\overset{6.28}{\Rightarrow}}\; x \in H(A) \subseteq A$.

□

6.30 Satz: Sei (M,d) metrischer Raum, $A \subseteq M$. Dann

1) $H(A) \subseteq \overline{A}$,

2) $\overline{A} = A \cup H(A)$.

Beweis: 1) $h \in H(A) \;\Rightarrow\; \exists \underbrace{(x_n) \text{ in } A}_{\Rightarrow (x_n) \text{ in } \overline{A}} : x_n \to h \overset{\overline{A} \text{ abgeschlossen}}{\underset{6.29}{\Rightarrow}} h \in \overline{A}$.

2) Aus 1) und Definition von $\overline{A}$: $A \subseteq A \cup H(A) \subseteq \overline{A}$. Wenn $A \cup H(A)$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{A} = A \cup H(A)$ (denn $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A als Teilmenge enthält).

Zeige $H\big(A \cup H(A)\big) \subseteq A \cup H(A)$ (dann ist $A \cup H(A)$ abgeschlossen nach 6.28).

Sei $h \in H\big(A \cup H(A)\big) \;\Rightarrow\; \exists (x_n)$ in $A \cup H(A) : x_n \to h \;\wedge\; x_n \neq h$. Betrachte jedes einzelne x_n. Falls $x_n \in H(A)$, existiert ein $x_n' \in A$ mit $d(x_n, x_n') < \dfrac{1}{n}$ und $x_n' \neq h$ (in der Umgebung $B_{1/n}(x_n)$ von x_n liegen unendlich viele Elemente von A). Definiere

$$y_n := \begin{cases} x_n & \text{falls } x_n \in A, \\ x_n' & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann: (y_n) in A, $y_n \neq h$, $y_n \to h$ (denn $d(y_n, h) \leq d(x_n, h) + \frac{1}{n}$). Also $h \in H(A)$.
Da h beliebig: $H\big(A \cup H(A)\big) \subseteq H(A) \subseteq A \cup H(A)$. □

6.5 Kompakte Mengen in $\mathbb{R}$

6.31 Satz (Heine-Borel für $\mathbb{R}$): In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ gilt für $K \subseteq \mathbb{R}$:

$$K \text{ kompakt} \;\Leftrightarrow\; K \text{ beschränkt und abgeschlossen.}$$

Beweis: 1) "$\Rightarrow$": Gilt in jedem metrischen Raum, siehe 6.25.

2) "$\Leftarrow$": Sei K beschränkt und abgeschlossen. Annahme: K ist nicht kompakt, d.h. es gibt eine offene Überdeckung O von K, so dass jede endliche Teilmenge keine Überdeckung von K ist.
K beschränkt $\;\Rightarrow\; \exists R > 0 : K \subseteq [-R, R]$.
Schritt 1: Halbiere $[-R, R]$:
O ist auch offene Überdeckung von $[-R, 0] \cap K$ und von $[0, R] \cap K$. Für mindestens eine dieser beiden Mengen gilt: Jede endliche Teilmenge von O ist keine Überdeckung mehr. Wir wählen diese Menge und bezeichnen das das dazugehörige Intervall mit $[a_1, b_1]$.
Schritt 2: Halbiere $[a_1, b_1]$. Dasselbe Argument liefert uns ein abgeschlossenes Intervall $[a_2, b_2]$ mit $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$ und: O ist offene Überdeckung von $[a_2, b_2] \cap K$ und jede endliche Teilmenge von O ist keine Überdeckung.
So fortfahrend erhalten wir eine Intervallschachtelung

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_1.$$
$$b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b_1 - a_1) \;\to\; 0.$$

$\Rightarrow$ $(a_n), (b_n)$ sind monoton und beschränkt, konvergieren also in $\mathbb{R}$, und zwar gilt:

$$a_n \to a,\ b_n \to b = a,\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \le a \le b_n.$$

In jedem Schritt muss $[a_n, b_n] \cap K \neq \emptyset$ gelten (sonst würde ein Element von O zur Überdeckung ausreichen). Wähle eine Folge (x_n) mit $x_n \in [a_n, b_n] \cap K$.
Einschließungskriterium $\Rightarrow$ $x_n \to a$.
K abgeschlossen $\overset{6.29}{\Rightarrow}$ $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in K$.
$K \subseteq \bigcup\limits_{U\in O} U \Rightarrow$ $\exists U \in O : a \in U$.
U offen $\Rightarrow$ $\exists R > 0 : B_R(a) \subseteq U$
Für n genügend groß gilt $0 < b_n - a_n < R \overset{a\in[a_n,b_n]}{\Rightarrow} [a_n, b_n] \subseteq\ ]\,a - R, a + R\,[\ = B_R(a) \subseteq U$
$\Rightarrow$ die einelementige Teilmenge $\{U\} \subseteq O$ reicht zur Überdeckung von $[a_n, b_n] \cap K$ aus. $\lightning$
Nach Konstruktion gilt: Jede endliche Teilmenge von O ist keine Überdeckung von $[a_n, b_n] \cap K$.

$\square$

6.32 Satz: In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ gilt:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ kompakt} \quad \Rightarrow \quad \sup(A), \inf(A) \in A.$$

Im Fall einer kompakten Menge A gilt also $\sup(A) = \max(A),\ \inf(A) = \min(A)$.

Beweis: A kompakt $\overset{6.25}{\Rightarrow}$ A beschränkt und abgeschlossen.
A beschränkt $\overset{3.71}{\Rightarrow}$ $\exists (a_n)$ in $A : a_n \to \sup(A)$.
A abgeschlossen $\overset{6.29}{\Rightarrow}$ $\sup(A) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in A$.
Genauso für $\inf(A)$.

$\square$

6.6 Stetige Abbildungen

6.33 Vereinbarung: Im Folgenden seien (M_j, d_j) metrische Räume. Ist $D(f) \subseteq M_1$ und $f : D(f) \to M_2$ eine Abbildung, so schreiben wir:

$$f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2.$$

$D(f)$ heißt **Definitionsbereich** von f. Die Schreibweisen

$$f : M_1 \supseteq D(f) \to \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$$

bedeuten, dass $M_2 = \mathbb{R},\ d_2 = d_{|.|}$ bzw. $M_1 = M_2 = \mathbb{R},\ d_1 = d_2 = d_{|.|}$.

6.34 Definition: Sei $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$.

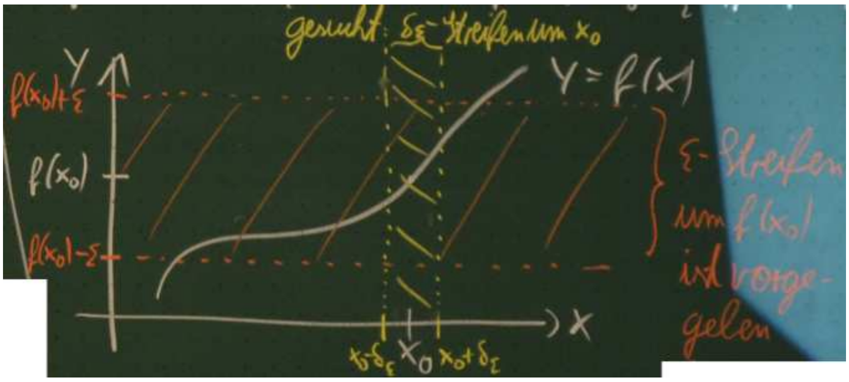
1) Für $x_0 \in D(f)$ heißt f **stetig in x_0**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in D(f) : d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

2) f heißt **stetig**, falls f stetig in allen $x_0 \in D(f)$.

6.35 Spezialisierung: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$. Dann ist f stetig in $x_0 \in D(f)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in D(f) : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$$



6.36 Beispiele: **1)** Konstante Funktionen sind stetig.

2) Für $M_1 = M_2 = M,\ d_1 = d_2 = d$: Die identische Abbildung $\mathrm{Id} : M \to M : x \mapsto x$ ist stetig.

6.37 Satz über Folgenstetigkeit: Sei $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$, $x_0 \in D(f)$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in x_0.

(ii) Für alle Folgen (x_n) in $D(f)$ gilt

$$x_n \to x_0 \ \Rightarrow \ f(x_n) \to f(x_0).$$

D.h. f und $\lim$ sind vertauschbar: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\big)$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei (x_n) Folge in $D(f)$, $x_n \to x_0$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest.
f stetig $\Rightarrow$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$, so dass $d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
$x_n \to x_0$ $\Rightarrow$ $\exists N_\delta \ \forall n > N_\delta : d_1(x_n, x_0) < \delta_\varepsilon$.

$\Rightarrow\ \forall n > N_\delta : d_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$
$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow\ f(x_n) \to f(x_0)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Zeige $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii).
$\neg$(i) $\Leftrightarrow\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D(f) : d_1(x, x_0) < \delta\ \wedge\ d_2\big(f(x), f(x_0)\big) \geq \varepsilon$
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle $\delta_n := \frac{1}{n} : \Rightarrow\ \exists x_n \in D(f) : d_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n}\ \wedge\ d_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon$
$\Rightarrow\ x_n \to x_0\ \wedge\ \neg\big(f(x_n) \to f(x_0)\big)$
$\Rightarrow\ \neg$(ii), □

6.38 Beispiele: 1) Einschaltfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

2) Die Dirichletsche Sprungfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ist nirgends stetig.

3) Unglaublich, aber wahr: $f : \mathbb{R} \supseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist stetig.

4) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig.

6.39 Definition: Seien $f : M \supseteq D(f) \to\ \mathbb{R},\ g : M \supseteq D(g) \to \mathbb{R}$.

1) Summe/Differenz von f und g: $D(f \pm g) := D(f) \cap D(g),\ (f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$.

2) Produkt von f und g: $D(f \cdot g) := D(f) \cap D(g),\ (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

3) Quotient von f und g: $D\big(\frac{f}{g}\big) := D(f) \cap \{x \in D(g) : g(x) \neq 0\},\ \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$.

6.40 Satz: Summe, Differenz, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in D(f+g)$ beliebig aber fest, (x_n) Folge in $D(f+g)$ mit $x_n \to x_0$. Dann folgt

$$(f+g)(x_n) \overset{\text{Def } f+g}{=} f(x_n) + g(x_n) \underset{\text{Rechenregeln für konv. Folgen}}{\overset{f,g \text{ stetig in } x_0}{\longrightarrow}} f(x_0) + g(x_0) \overset{\text{Def } f+g}{=} (f+g)(x_0).$$

Also ist $f + g$ stetig in x_0.
Genauso für Differenz, Produkt und Quotient. □

6.41 Beispiele: 1) Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind stetig,

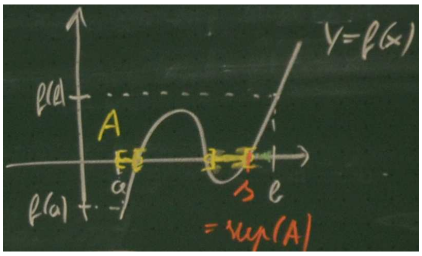
2) Seien P, Q Polynome. Die **gebrochen rationale Funktion**

$$f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ mit } D(f) = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

ist stetig.

6.42 Nullstellensatz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann

$$\exists x \in \,]a, b[\, : f(x) = 0.$$



Beweis: O.B.d.A: $f(a) < 0 \;\wedge\; f(b) > 0$. Betrachte

$$A \;:=\; \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}.$$

Dann
- $A \neq \emptyset$, denn $a \in A$,
- A beschränkt, da b obere Schranke, a untere Schranke.

$\Rightarrow \; s := \sup(A) \leq b \;\wedge\; \exists (x_n)$ in A mit $x_n \to s$.

Behauptung: $f(s) = 0$.

f stetig $\;\Rightarrow\; f(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{<0} \leq 0$. Insbesondere $s \neq b$, also $s < b$.

$\Rightarrow \; \forall x \in \,]s, b] : f(x) \geq 0$.

Für $y_n := s + \frac{1}{n}$ gilt $y_n \in \,]s, b]$ für $n \geq N_0$ und $y_n \to s$.

$f(y_n) \geq 0$ für $n \geq N_0 \;\Rightarrow\; f(s) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) \geq 0$.

$\Rightarrow \; f(s) = 0 \;\wedge\; s \in \,]a, b[$. $\square$

6.43 Hintereinanderausführung stetiger Funktionen:

Seien $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2, \;\; g : M_2 \supseteq D(g) \to M_3$, Bild$(f) \subseteq D(g)$.

Ist f stetig in $x_0 \in D(f)$ und g stetig in $f(x_0)$, so ist $g \circ f$ stetig in x_0.

Beweis: Sei (x_n) in $D(f)$, $x_n \to x_0$.

f stetig in $x_0 \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(x_0)$.

g stetig in $f(x_0) \;\Rightarrow\; \underbrace{g\big(f(x_n)\big)}_{=g\circ f(x_n)} \to \underbrace{g\big(f(x_0)\big)}_{=g\circ f(x_0)}$.

(x_n) beliebig $\overset{6.37}{\Rightarrow}$ $g \circ f$ stetig. $\square$

6.7 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

6.44 Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$ stetig und $K \subseteq D(f)$ kompakt. Dann ist

$$f(K) \;=\; \{f(x) : x \in K\}$$

kompakt (Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt).

Beweis: Zeige: K beschränkt und abgeschlossen $\;\Rightarrow\;$ $f(K)$ beschränkt und abgeschlossen. Dann folgt die Behauptung mit Heine-Borel 6.31.

1) $f(K)$ ist beschränkt: Annahme $f(K)$ nicht beschränkt.
$\Rightarrow\;\; \forall n \in \mathbb{N}\; \exists y_n \in f(K) : |y_n| > n.$
$y_n \in f(K) \;\Rightarrow\; \exists x_n \in K : f(x_n) = y_n.$
(x_n) in K, K beschränkt $\;\Rightarrow\;$ (x_n) beschränkt $\overset{\text{Bolzano-Weierstraß}}{\Rightarrow}$ $\exists (x_{n_k}) : x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}.$
K abgeschlossen $\overset{6.29}{\Rightarrow}$ $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K.$
f stetig $\overset{6.37}{\Rightarrow}$ $f(x_{n_k}) \to f(x)$ $\lightning$ $\;|f(x_{n_k})| = |y_{n_k}| \to \infty.$

2) $f(K)$ ist abgeschlossen: Zeige $H\big(f(K)\big) \subseteq f(K)$. Dann folgt Abgeschlossenheit aus 6.28
Fall $H\big(f(K)\big) = \emptyset$: ✓
Fall $H\big(f(K)\big) \neq \emptyset$: Sei $h \in H\big(f(K)\big)$. Zeige $h \in f(K)$.
6.28 $\;\Rightarrow\;$ $\exists (y_n)$ in $f(K) : y_n \to h.$
Wähle wie oben (x_n) in K mit $f(x_n) = y_n$.
Wie in 1): $\exists (x_{n_k}) : x_{n_k} \to x \in K$, $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x)$
$\Rightarrow\;\; h = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = f(x) \in f(K).$

□

6.45 Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq K \to \mathbb{R}$ stetig und K kompakt. Dann

$$\exists x_+, x_- \in K : f(x_-) = \min\{f(x) : x \in K\} \;\wedge\; f(x_+) = \max\{f(x) : x \in K\}.$$

Stetige Funktionen auf kompakten Mengen haben einen größten und einen kleinsten Funktionswert.

Beweis: 6.44 $\;\Rightarrow\;$ $f(K)$ ist kompakt $\overset{6.32}{\Rightarrow}$ $\sup f(K) = \max f(K)$
$\Rightarrow\;\; \exists y \in f(K) : y = \max f(K) \;\Rightarrow\; \exists x_+ \in K : f(x_+) = y = \max f(K).$
Genauso für Minimum.

□

6.46 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R} \supseteq \,]0,1[\, \to \mathbb{R} : x \mapsto x.$

2) $f : \mathbb{R} \supseteq [-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$

6.47 Zwischenwertsatz von Bolzano: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und

$$m := \min\{f(x) : x \in [a,b]\} \leq c \leq M := \max\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Dann

$$\exists x \in [a,b] : f(x) = c.$$

Beweis: Letzter Satz $\Rightarrow$ $\exists x_-, x_+ \in [a,b] : f(x_-) = m \ \wedge \ f(x_+) = M$.
Fall 1 $c = m$: Dann $f(x_-) = c$.
Fall 2 $c = M$: Dann $f(x_+) = c$.
Fall 3 $m < c < M$: $g(x) := f(x) - c$, $D(g) = \begin{cases} [x_-, x_+] & \text{falls } x_+ > x_- \\ \text{bzw. } [x_+, x_-] & \text{sonst} \end{cases}$
$g(x_-) \cdot g(x_+) = (m-c)(M-c) < 0$, g ist stetig
$\underset{6.42}{\overset{\text{Nullstellensatz}}{\Longrightarrow}}$ $\exists x \in D(g) : \underbrace{g(x) = 0}_{\Leftrightarrow f(x) = c}$ □

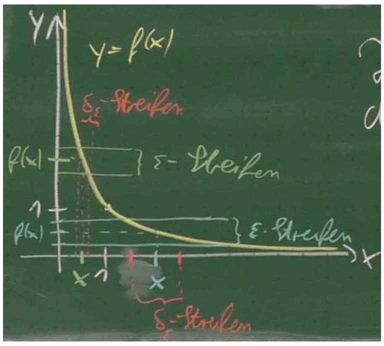
6.48 Beispiel: $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[\ : x \mapsto x^2$ ist surjektiv.

6.49 Erinnerung: $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$ heißt stetig, falls

$$\forall x \in D(f) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x' \in D(f) : d_1(x, x') < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ d_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

6.50 Beispiel: $f : \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Je näher x an 0, desto kleiner muss δ_ε gewählt werden.



6.51 Definition: $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x, x' \in D(f) : d_1(x, x') < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ d_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

D.h. δ_ε ist universal, unabhängig von x, x' wählbar.

6.52 Satz: $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$ stetig und $D(f)$ kompakt $\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig.

Beweis:
f stetig $\Rightarrow$ $\forall x \in D(f)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0\ \forall x' \in D(f) : d_1(x,x') < \delta_{\varepsilon,x} \ \Rightarrow\ d\big(f(x), f(x')\big) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Setze $O := \big\{B_{\frac{1}{2}\delta_{\varepsilon,x}}(x) : x \in D(f)\big\}$ $\Rightarrow$ O offene Überdeckung von $D(f)$.
$D(f)$ kompakt $\Rightarrow$ $\exists x_1, \dots x_n \in D(f) : D(f) \subseteq \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B_{\frac{1}{2}\delta_{\varepsilon,x_k}}(x_k)$
Setze $\delta := \min\{\frac{1}{2}\delta_{\varepsilon,x_k} : k = 1, \dots, n\}$. Seien $x, x' \in D(f)$ beliebig mit $d_1(x,x') < \delta$.
$x \in D(f)$ $\Rightarrow$ $\exists l \in \{1, \dots, n\} : x \in B_{\frac{1}{2}\delta_{\varepsilon,x_l}}(x_l)$.
$\Rightarrow$ $d_1(x', x_l) \le d_1(x', x) + d_1(x, x_l) < \delta + \dfrac{1}{2}\delta_{\varepsilon,x_l} \le \delta_{\varepsilon,x_l}$
$\Rightarrow$ $d_2\big(f(x), f(x')\big) \le d_2\big(f(x), f(x_l)\big) + d_2\big(f(x_l), f(x')\big) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ □

6.53 Beispiel: Gilt $0 < a < b$, so ist $f : \mathbb{R} \supseteq [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ gleichmäßig stetig.

6.8 Grenzwerte von Funktionen

6.54 Definition: Sei $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$, $x_0 \in H\big(D(f)\big)$. Dann heißt $y \in M_2$ **Grenzwert** von f für $x \to x_0$, geschrieben $y = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x \in D(f) \setminus \{x_0\} : d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ d_2\big(f(x), y\big) < \varepsilon.$$

6.55 Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \le 2 \\ 1 & \text{für } x = 3 \end{cases}$

6.56 Satz: Sei $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$, $x_0 \in H\big(D(f)\big)$, $y \in M_2$. Dann sind äquivalent:

(i) $y = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

(ii) $\forall (x_n)$ in $D(f) \setminus \{x_0\} : x_n \to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \to y$.

Beweis: Genauso wie bei Folgenstetigkeit, siehe Beweis von 6.37. □

6.57 Satz: Sei $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$, $x_0 \in H\big(D(f)\big)$ und $x_0 \in D(f)$. Dann sind äquivalent:

(i) f stetig in x_0,

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \;=\; f(x_0)$.

Beweis: (ii) $\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x \in D(f) \setminus \{x_0\} : d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$

$\overset{x_0 \in D(f)}{\Leftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x \in D(f) : d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$

$\Leftrightarrow$ (i) □

6.58 Definition: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to M$.

1) Ist $A \subseteq D(f)$, so heißt $f\big|_A : A \to M : x \mapsto f(x)$ **Einschränkung** von f auf A.

2) Ist $x_0 \in H\big(D(f) \cap\,]-\infty, x_0[\,\big)$, und existiert

$$y \;=\; \lim_{x \to x_0} f\big|_{D(f) \cap\,]-\infty, x_0[}(x),$$

so heißt y **linksseitiger Grenzwert** von f für $x \to x_0$. Schreibe

$$f(x_0 - 0) \;:=\; \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \;:=\; y.$$

3) Ist $x_0 \in H\big(D(f) \cap\,]x_0, \infty[\,\big)$, so ist der **rechtsseitige Grenzwert** von f für $x \to x_0$ definiert durch

$$f(x_0 + 0) \;:=\; \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \;:=\; \lim_{x \to x_0} f\big|_{D(f) \cap\,]x_0, \infty[}(x).$$

6.59 Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

6.60 Unstetigkeitsstellen: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq\,]a, b[\, \to M$, $x_0 \in\,]a, b[$, f nicht stetig in x_0. Dann heißt x_0

1) **hebbare Unstetigkeitsstelle**, falls $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ existieren und gleich sind.

2) **Unstetigkeitsstelle 1. Art** oder **Sprungstelle**, falls $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ existieren und verschieden sind.

3) **Unstetigkeitsstelle 2. Art**, falls $f(x_0 - 0)$ oder $f(x_0 + 0)$ nicht existiert.

6.61 Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1, & x = -1 \\ 0, & -1 < x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

6.62 Definition: **1)** Seien $f : [a, \infty[\to M,\ g :]-\infty, b] \to M$. Dann

$$y = \lim_{x \to \infty} f(x) \ / \ z = \lim_{x \to -\infty} g(x),$$

falls für jede Folge (x_n) in $D(f)$ gilt

$$x_n \to \infty \ \Rightarrow \ f(x_n) \to y \ / \ x_n \to -\infty \ \Rightarrow \ g(x_n) \to z.$$

2) Sei $f : M \supseteq D(f) \to \mathbb{R},\ x_0 \in H\big(D(f)\big)$. Dann

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \ = \ \infty \ (= -\infty),$$

falls für jede Folge (x_n) in $D(f) \setminus \{x_0\}$ gilt

$$x_n \to x_0 \ \Rightarrow \ f(x_n) \to \infty \ (\to -\infty).$$

3) Entsprechend $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty,\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \pm\infty.$

6.63 Beispiele: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0,\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0,\ \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{1}{x} = \infty,\ \lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty.$

6.9 Monotone Funktionen

6.64 Definition: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$, $A \subseteq D(f)$. Dann heißt f auf A

monoton wachsend, falls	$\forall x, x' \in A : x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$
streng monoton wachsend, falls	$\forall x, x' \in A : x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$
monoton fallend, falls	$\forall x, x' \in A : x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$
streng monoton fallend, falls	$\forall x, x' \in A : x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

f heißt auf A (streng) monoton), falls f auf A (streng) monoton wachsend oder auf A (streng) monoton fallend ist.

6.65 Beispiele:: **1)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$ ist monoton wachsend und monoton fallend.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist auf $]-\infty, 0]$ streng monoton fallend, auf $[0, \infty[$ streng monoton wachsend.

6.66 Satz: $f : \mathbb{R} \supseteq]a,b[\to \mathbb{R}$ monoton, $x_0 \in]a,b[$. Dann existieren $f(x_0 - 0)$ und $f(x_0 + 0)$. Das bedeutet: Unstetigkeitsstellen monotoner Funktionen sind immer von 1. Art.

Beweis: Für f monoton wachsend, $f(x_0 - 0)$:

1) Sei $x_n := x_0 - \dfrac{1}{n}$, $n > N_0$ so dass $x_n \in]a, x_0[$.

$$x_n < x_{n+1} < x_0 \overset{f \text{ monoton}}{\underset{\text{wachsend}}{\Rightarrow}} f(x_n) \le f(x_{n+1} \le f(x_0) \Rightarrow \begin{cases} \big(f(x_n)\big) \text{ monoton wachsend} \\ f(x_n) \text{ nach oben beschränkt} \end{cases}$$

$\Rightarrow\ f(x_n) \to y \in \mathbb{R}\ \wedge\ \forall n \in \mathbb{N} : f(x_n) \le y.$

2) Sei (x_n') Folge in $]a, x_0[$, $x_n' \to x_0$. Zeige $f(x_n') \to y$. Dann folgt $f(x_0 - 0) = y$.

a) Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. $x_m' < x_0\ \wedge\ x_n \to x_0\ \Rightarrow\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_m' < x_n$

$\Rightarrow\ f(x_m') \le f(x_n) \le y$

b) Sei $\varepsilon > 0$: $f(x_n) \to y\ \Rightarrow\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : y - \varepsilon < f(x_n) \le y$

$$x_n' \to x_n\ \Rightarrow\ \exists N_\varepsilon' \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon' : x_0 - \frac{1}{N_\varepsilon + 1} = x_{N_\varepsilon + 1} < x_n'$$

$\Rightarrow\ \forall n > N_\varepsilon' : y - \varepsilon < f(x_{N_\varepsilon+1}) \le f(x_n')$

a) und b) $\Rightarrow\ \forall n > N_\varepsilon' : y - \varepsilon < f(x_n) \le y$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow\ f(x_n') \to y.$

(x_n') beliebig mit $x_n' \to x_0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = y.$

$\square$

6.67 Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (fallend). Dann:

1) f ist injektiv. Insbesondere ist $f : D(f) \to \text{Bild}(f)$ bijektiv.

2) f^{-1} : $\text{Bild}(f) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend (fallend).

Beweis: Sei f streng monoton wachsend.

1) Sei $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Fall } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(_2) \\ \text{Fall } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$

2) Sei $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. Zeige $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$

Annahme $x_1 \ge x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) \ge f(x_2)$ ↯

$\square$

6.68 Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

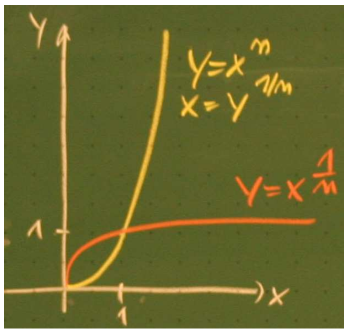
f ist stetig und streng monoton wachsend,
aber die Umkehrfunktion f^{-1} : Bild$(f) \to D(f)$ ist nicht stetig.

6.69 Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton, und sei $D(f)$ kompakt. Dann ist f^{-1} : Bild$(f) \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Sei $y_0 \in$ Bild(f), (y_n) in Bild(f), $y_n \to y_0$. Zeige $x_n := f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0) =: x_0$.
Annahme: $\neg x_n \to x_0$, d.h. $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |x_n - x_0| \geq \varepsilon$
$\Rightarrow\ \exists (x_{n_k})\ \forall k \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - x_0| \geq \varepsilon$
(x_{n_k}) in $D(f)$ und $D(f)$ kompakt $\overset{\text{Bolzano-Weierstraß}}{\underset{\text{und 6.29}}{\Rightarrow}}$ $\exists (x_{n_{k_j}}) : x_{n_{k_j}} \to x \in D(f)$.
f stetig $\Rightarrow$ $\underbrace{f(x_{n_{k_j}})}_{=y_{n_{k_j}} \to y_0} \to f(x)$ $\Rightarrow$ $f(x) = y_0 = f(x_0)$ $\Rightarrow x = x_0$
$\Rightarrow\ x_{n_{k_j}} \to x_0$ ↯ $|x_{n_{k_j}} - x_0| \geq \varepsilon$.
Also $x_n \to x_0$. Dies bedeutet $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$
$y_0 \in$ Bild(f) beliebig $\Rightarrow$ f^{-1} stetig. □

6.10 Potenz- und Exponentialfunktion

6.70 Satz und Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$, $f : [0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$. Dann



1) f ist stetig und streng monoton wachsend.

2) Bild$(f) = [0, \infty[$.

3) $f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ ist stetig und streng monoton wachsend.
Schreibe $x^{1/n} := \sqrt[n]{x} := f^{-1}(x)$.

Beweis: 1) klar.

2) Siehe Beispiel 6.48.

3) 6.67 $\Rightarrow$ f^{-1} existiert und ist streng monoton wachsend.
Stetigkeit: Sei $y \in [0, \infty[$. Wähle $b > 0$ mit $b^n > y$ ($\Rightarrow\ y \in$ Bild$(f|_{[0,b]})$).
6.69 $\Rightarrow$ $\left(f|_{[0,b]}\right)^{-1}$ ist stetig.
$f^{-1}(z) = \left(f|_{[0,b]}\right)^{-1}(z)$ für $0 \leq z \leq b^n$ $\Rightarrow$ f^{-1} stetig in y.
$y \geq 0$ beliebig $\Rightarrow$ f^{-1} stetig. □

6.71 Definition: 1) Sei $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Für $x \geq 0$: $x^r := \left(x^{1/q}\right)^p$.

2) Für $r \in \mathbb{Q}$ heißt $f :]0,\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^r$ **Potenzfunktion**.

3) Für $a > 0$ heißt $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$ **Exponentialfunktion**.

6.72 Hinweise: 1) Es ist zu zeigen: $\forall m \in \mathbb{N} : \left(x^{1/q}\right)^p = \left(x^{1/(mq)}\right)^{mp}$.

2) Die Potenzfunktion ist Hintereinanderausführung stetiger streng monoton wachsender (falls $r > 0$) Funktionen, also auch stetig und streng monoton wachsend falls $r > 0$.

3) Für $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{Q}$ gelten:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ a^r \cdot b^r &= (ab)^r \\ (a^r)^s &= a^{rs} \end{aligned}$$

4) Für $a > 1$ ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend, für $0 < a < 1$ ist sie streng monoton fallend.

6.73 Satz: Sei $a > 0$, (x_n) in $\mathbb{Q}$, $x_n \to 0$. Dann $a^{x_n} \to 1$.

Beweis: Fall $a > 1$: $a^{1/n} \to 1 \;\Rightarrow\; a^{-1/n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{1/n} \to 1$.

$\forall n \geq N_0 \; \exists k_n \in \mathbb{N} : -\frac{1}{k_n} < x_n < \frac{1}{k_n} \;\wedge\; k_n \to \infty$

$$\overset{\text{Monotonie}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{a^{-1/k_n}}_{>1-\varepsilon,\; n>N_\varepsilon} < a^{x_n} < \underbrace{a^{1/k_n}}_{<1+\varepsilon,\; n>N'_\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad a^{x_n} \to 1.$$

Genauso für $0 < a < 1$. □

6.74 Satz: Seien $a > 0$, $(x_n), (x'_n)$ in $\mathbb{Q}$, $x_n \to x$, $x'_n \to x$ in $\mathbb{R}$. Dann

1) $(a^{x_n}), (a^{x'_n})$ konvergieren in $\mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x'_n}$.

Beweis: 1) $x_n \to x \;\Rightarrow\; \exists K \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq K \;\Rightarrow\; a^{x_n} \leq \begin{cases} a^K & \text{falls } a \geq 1 \\ a^{-K} & \text{falls } 0 < a < 1 \end{cases}$

$$\left|a^{x_n} - a^{x_m}\right| = \underbrace{a^{x_n}}_{\leq a^K \text{ oder } \leq a^{-K}} \cdot \underbrace{\left|1 - a^{x_n - x_m}\right|}_{<\varepsilon/a^K \text{ (letzter Satz)}} < \varepsilon \;\Rightarrow\; (a^{x_n}) \text{ C-Folge.}$$

2) $a^{x_n} - a^{x'_n} = \underbrace{a^{x_n}}_{\text{konv}} \Big(\underbrace{1 - a^{x_n - x'_n}}_{\to 0 \text{ (letzter Satz)}} \Big) \to 0.$ □

6.75 Definition: Sei $a > 0, x \in \mathbb{R}$. Wähle (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$. Dann:

$$a^x \; := \; \lim_{n\to\infty} a^{x_n}.$$

6.76 Satz: Für $a, b > 0,\ r, s \in \mathbb{R}$ gelten:

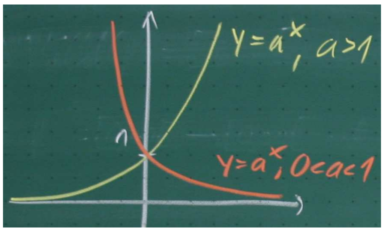
$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ a^r \cdot b^r &= (ab)^r \\ (a^r)^s &= a^{rs} \end{aligned}$$

Beweis: Z.B.: $(r_n), (s_n)$ Folgen in $\mathbb{Q}$ mit $r_n \to r,\ s_n \to s$. Dann

$$a^r \cdot a^s \overset{\text{Def. } a^x}{=} \left(\lim_{n\to\infty} a^{r_n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} a^{s_n} \underset{\text{konv. Folgen}}{\overset{\text{Satz über}}{=}} \lim_{n\to\infty} \left(a^{r_n} \cdot a^{s_n}\right) \overset{6.72}{=} \lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} \overset{\text{Def. } a^x}{=} a^{r+s}.$$

□

6.77 Satz und Definition: Sei $a > 1$ $(0 < a < 1)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$.

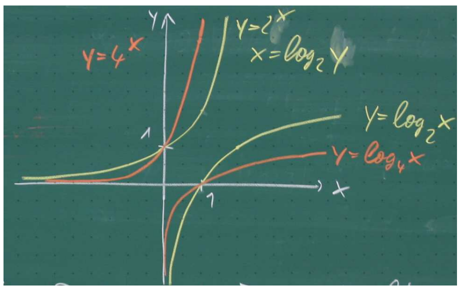


1) f ist stetig und streng monoton wachsend (fallend).

2) Bild$(f) =]0, \infty[$.

6.78 Definition: Sei $a > 1,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$. Die stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion $f^{-1} :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ heißt **Logarithmus zur Basis** $\boldsymbol{a}$. Schreibe $\log_a x := f^{-1}(x)$.

6.79 Rechenregeln für den Logarithmus: Für $a > 1$ gelten



1) $\log_a(x \cdot y) \;=\; \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0)$.

2) $\log_a 1 \;=\; 0, \quad \log_a(\frac{1}{x}) \;=\; -\log x, \quad \log_a a \;=\; 1.$

3) $\log_a(x^y) \;=\; y \log_a x \qquad (x > 0,\ y \in \mathbb{R})$.

Beweis in Übungen.

6.80 Satz: Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann ist $f :]0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^r$ stetig.

Beweis: Sei $b > 1$ fest. $x^r = b^{\log_b(x^r)} = b^{r \log_a x}$.
Also ist f Hintereinanderausführung stetiger Funktionen.

□

6.81 Satz: Sei (h_n) in $\mathbb{R}$ mit $0 < |h_n| < 1$ und $h_n \to 0$. Dann

$$\lim_{n\to\infty} (1 + h_n)^{1/h_n} = \mathrm{e}.$$

Beweis: Betrachte $x_n := \dfrac{1}{h_n}$.
Fall 1: $x_n \to \infty$ (nur endlich viele $x_n < 0$),
Fall 2: $x_n \to -\infty$ (nur endlich viele $x_n > 0$),
Fall 3: (x_n) besteht aus zwei Teilfolgen (x_{n_k}) und $(x_{n'_k})$ mit $x_{n_k} > 0,\ x_{n_k} \to \infty$ und $x_{n'_k} < 0,\ x_{n'_k} \to -\infty$.

Fall 1: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0\ \exists k_n \in \mathbb{N} : k_n \leq x_n < k_n + 1$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ 1 + \frac{1}{k_n + 1} < 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{k_n} \\ &\Rightarrow\ \underbrace{\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n}}_{\to \mathrm{e}\cdot 1} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}}_{\to \mathrm{e}\cdot 1} \end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} &= \left(1 - \frac{1}{|x_n|}\right)^{-|x_n|} = \left(\frac{|x_n| - 1}{|x_n|}\right)^{-|x_n|} = \left(\frac{|x_n|}{|x_n| - 1}\right)^{|x_n|} \\ &= \left(\frac{|x_n| - 1 + 1}{|x_n| - 1}\right)^{|x_n|} = \left(1 + \frac{1}{|x_n| - 1}\right)^{|x_n|-1} \left(1 + \frac{1}{|x_n| - 1}\right) \overset{\text{Fall 1}}{\to} \mathrm{e} \cdot 1 \end{aligned}$$

Fall 3: Aus Fall 1: $\left(1 + \dfrac{1}{x_{n_k}}\right)^{x_{n_k}} \to \mathrm{e}$,

Aus Fall 2: $\left(1 + \dfrac{1}{x_{n'_k}}\right)^{x_{n'_k}} \to \mathrm{e}$,

$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to \mathrm{e}$ $\square$

6.82 Satz: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

Beweis in den Übungen.

7 Differentialrechnung

7.1 Ableitung

7.1 Definition: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R},\ D(f)$ offen, $x_0 \in D(f)$.

1) f heißt **differenzierbar in x_0**, falls

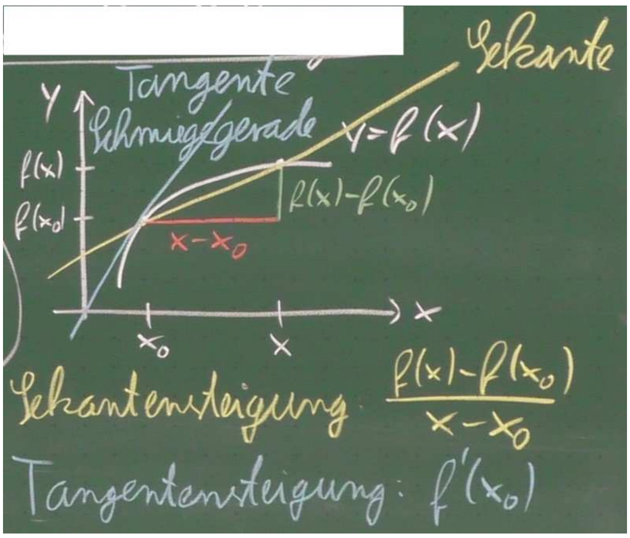
$$\frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}x}(x_0) \;:=\; f'(x_0) \;:=\; \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{Differenzenquotient}} \overset{h:=x-x_0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert, $f'(x_0)$ heißt **Ableitung von f in x_0**.

2) f heißt **differenzierbar**, falls f in jedem $x_0 \in D(f)$ differenzierbar ist. Dann heißt $f' : D(f) \to \mathbb{R}$ **Ableitung** von f.

7.2 Veranschaulichungen:

1)



2) $x : [0,T] \to \mathbb{R}$, $x(t) =$ zurückgelegte Entfernung zur Zeit t

$\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}$ = Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $[t, t+h]$

$x'(t) =$ Momentangeschwindigkeit

7.3 Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R},\ D(f)$ offen, $x_0 \in D(f)$. Dann sind äquivalent:

(i) f differenzierbar in x_0.

(ii) Es gibt $R > 0$, $c \in \mathbb{R}$, $g : B_R(x_0) \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + c(x-x_0) + |x-x_0| g(x) \text{ für } x \in B_R(x_0), \\ \text{und} &\quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 = g(x_0). \end{aligned}$$

Dann gilt $c = f'(x_0)$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Definiere

$$g(x) := \begin{cases} \left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right)\dfrac{x-x_0}{|x-x_0|} & \text{für } x \in B_R(x_0)\setminus\{x_0\}, \\ 0 & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x-x_0|g(x) = f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0) \text{ für } x \in B_R(x_0)\setminus\{x_0\}, \\ g(x) \overset{x\neq x_0}{=} \Big(\underbrace{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} - f'(x_0)\Big)\underbrace{\dfrac{x-x_0}{|x-x_0|}}_{\in\{1,-1\}} \to 0 \text{ für } x \to x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $x \neq x_0$. Dann

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{\text{(ii)}}{=} c + \frac{|x-x_0|}{x-x_0}g(x) \overset{x\to x_0}{\to} c \;\Rightarrow\; f'(x_0) = c \text{ existiert } \Rightarrow \text{ (i).}$$

□

7.4 Satz: f ist differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0.

Beweis: 7.3, (ii) $\Rightarrow$ $f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + |x-x_0|g(x) \overset{x\to x_0}{\to} f(x_0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\overset{6.57}{\Rightarrow}$ f stetig in x_0.

□

7.5 Beispiele: **1)** $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$.

2) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$.

3) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$: f nicht stetig in $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ f nicht differenzierbar in 0.

4) $f(x) = |x|$: $f'(x) = 1$ falls $x > 0$, $f'(x) = -1$ falls $x < 0$, f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

5) Sei $a > 1$ und $f(x) = \log_a(x),\ D(f) =]0,\infty[$. Dann: $f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a(\mathrm{e})$ für $x > 0$.
Insbesondere $a = \mathrm{e}$: $f(x) = \ln(x) = \log_{\mathrm{e}}(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

6) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

7.6 Satz: Sei f differenzierbar in x_0. Dann

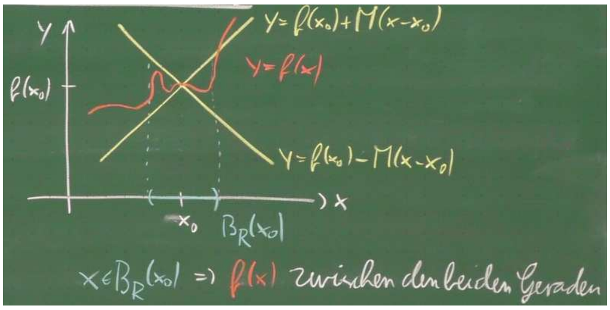
$$\exists B_R(x_0) \subseteq D(f)\ \exists K > 0\ \forall x \in B_R(x_0) : \big|f(x) - f(x_0)\big| \leq K|x-x_0|.$$

Beweis: Aus 7.3: $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + |x - x_0| g(x)$.
$\Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \big(|c| + |g(x)|\big)$.

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in D(g) = B_R(x_0) : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |g(x) - 0| < \varepsilon$.
Wähle $\varepsilon := 1$. Dann $x \in B_{\delta_1}(x_0) \ \Rightarrow \ |g(x)| < 1$.

$\Rightarrow \ \big|f(x) - f(x_0)\big| \leq |x - x_0| \left(|c| + 1|\right)$ für $x \in B_{\delta_1}(x_0) \subseteq D(f)$. $\square$

7.7 Veranschaulichung:



7.2 Landau-Symbole

7.8 Definition: $f, g : \mathbb{R} \supseteq X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in H(X)$. Dann

$$f = O(g) \text{ für } x \to x_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \exists K > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X : \big(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq K|g(x)|\big)$$
$$f = o(g) \text{ für } x \to x_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X : \big(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|\big)$$

Falls $\exists a \in \mathbb{R} : [a, \infty[\ \subseteq X$:

$$f = O(g) \text{ für } x \to \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \exists K > 0 \ \exists L > 0 \ \forall x > L : |f(x)| \leq K|g(x)|\big)$$
$$f = o(g) \text{ für } x \to \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists L > 0 \ \forall x > L : |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|\big)$$

Entsprechend für $x \to -\infty$.
Schreibe $f_1(x) = f_2(x) + o\big(g(x)\big)$ für $f_1 - f_2 = o(g)$, $f_1(x) = f_2(x) + O\big(g(x)\big)$ für $f_1 - f_2 = O(g)$.

7.9 Rechenregeln: **1)** $f = o(g) \ \Rightarrow \ f = O(g)$ für $x \to x_0$.

2) $f_1 = O(g) \ \wedge \ f_2 = O(g) \ \Rightarrow \ f_1 + f_2 = O(g)$ für $x \to x_0$.

3) $f_1 = o(g) \ \wedge \ f_2 = o(g) \ \Rightarrow \ f_1 + f_2 = o(g)$ für $x \to x_0$.

4) $f_1 = O(g_1) \ \wedge \ f_2 = O(g_2) \ \Rightarrow \ f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \, g_2)$ für $x \to x_0$.

5) $f_1 = O(g_1) \ \wedge \ f_2 = o(g_2) \ \Rightarrow \ f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \, g_2)$ für $x \to x_0$.

Beweis: 1) Wähle $\varepsilon := 1$ in der Def. von $o(g)$ $\Rightarrow$ Def. von $O(g)$ mit $K = 1$ erfüllt.

2) $|f_1(x)| \leq K|g(x)|$ für $|x - x_0| < \delta$
$|f_2(x)| \leq K'|g(x)|$ für $|x - x_0| < \delta'$
$\Rightarrow$ $|f_1(x) + f_2(x)| \leq (K + K')\,|g(x)|$ für $|x - x_0| \leq \min\{\delta, \delta'\}$.

3) Wie 2)

4) $|f_1(x)| \leq K|g_1(x)|$ für $|x - x_0| < \delta$
$|f_2(x)| \leq K'|g_2(x)|$ für $|x - x_0| < \delta'$
$\Rightarrow$ $|f_1(x) \cdot f_2(x)| \leq K \cdot K'\,|g_1(x) \cdot g_2(x)|$ für $|x - x_0| \leq \min\{\delta, \delta'\}$.

5) Übungen

$\square$

7.10 Beispiele: 1) Es gilt immer $f = O(f)$ für $x \to x_0$.

2) $g(x) = x^2$, $f(x) = x + 1$: $f = o(g)$ für $x \to \infty$, $f^2 = O(g)$ für $x \to \infty$.

7.11 Satz: Sei $x_0 \in D(f)$.

1) f stetig in x_0 $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(x_0) + o(1)$ für $x \to x_0$.

2) f differenzierbar in x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + o(|x - x_0|)$ für $x \to x_0$.
Dann gilt $c = f'(x_0)$.

Beweis: 1) f stetig in x_0 $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x \in D(f) : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \cdot 1$
$\Leftrightarrow$ $f - f(x_0) = o(1)$ für $x \to x_0$.

2) f differenzierbar in x_0 $\Leftrightarrow$
$\overset{7.3}{\Leftrightarrow}$ $\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + |x - x_0| g(x) \ \wedge\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$
$\Rightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + o(|x - x_0|)$ für $x \to x_0$.
$\Leftarrow$
$\uparrow$

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)}{|x - x_0|} & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases} \quad \Rightarrow\ g(x) \cdot |x - x_0| = o\big(|x - x_0|\big) \ \Rightarrow\ g = o(1)$$

Nach 7.3: $c = f'(x_0)$.

$\square$

7.3 Rechenregeln für Ableitungen

7.12 Satz: Seien $f, g : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten

1) $\lambda \cdot f$ ist differenzierbar in x_0, und es gilt $(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

2) $f + g$ ist differenzierbar in x_0, und es gilt $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

3) $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0 mit

$$(f \cdot g)'(x_0) \;=\; f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0) \quad \textbf{(Produktregel)}.$$

4) Falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, ist $\dfrac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \;=\; \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \textbf{(Quotientenregel)}.$$

Beweis: Nach 7.11:
$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o\big(|x-x_0|\big) \quad \text{für } x \to x_0 \\ g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o\big(|x-x_0|\big) \quad \text{für } x \to x_0 \end{aligned}\right. \qquad (*)$$

1) Selber

2) $(*) \overset{7.9}{\Rightarrow} (f+g)(x) = (f+g)(x_0) + \big(f'(x_0)+g'(x_0)\big)(x-x_0) + o\big(|x-x_0|\big) \overset{7.11}{\Rightarrow}$ Behauptung.

3)
$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow (f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(x_0) &+ \big(f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)\big)(x-x_0) \\ &\left.\begin{aligned} &+ \underbrace{f'(x_0)(x-x_0) \cdot g'(x_0)(x-x_0)}_{=o(|x-x_0|)} \\ &+ \big(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o\big(|x-x_0|\big)\big)o\big(|x-x_0|\big) \\ &+ \big(\underbrace{g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o\big(|x-x_0|\big)}_{=O(1)}\big)o\big(|x-x_0|\big) \end{aligned}\right\} = o\big(|x-x_0|\big) \\ \overset{7.9}{\Rightarrow} (f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(x_0) &+ \big(f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)\big)(x-x_0) + o\big(|x-x_0|\big) \end{aligned}$$

4) Später

□

7.13 Beispiel: Polynome: $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \;\Rightarrow\; P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k\, x^{k-1}$.

7.14 Kettenregel: Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D' \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq D'$. Ist f in $x_0 \in D$ differenzierbar und g in $f(x_0) \in D'$ differenzierbar, dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; \underbrace{g'(f(x_0))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}} \quad \textbf{(Kettenregel)}.$$

Beweis: Sei (h_n) in $\mathbb{R}$ mit $h_n \to 0$ und $h_n \neq 0$.
f stetig in $x_0 \;\Rightarrow\; y_n := f(x_0+h_n) \to f(x_0) =: y_0$.
Fall 1: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : f(x_0+h_n) \neq f(x_0)$.

$$\overset{\text{für } n\geq N}{\Rightarrow} \quad \frac{(g\circ f)(x_0+h_n)-(g\circ f)(x_0)}{h_n} = \underbrace{\frac{g\big(f(x_0+h_n)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x_0+h_n)-f(x_0)}}_{=\frac{g(y_n)-g(y_0)}{y_n-y_0}\to g'(y_0)} \cdot \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$
$$\to \quad g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Fall 2: $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : f(x_0+h_n) = f(x_0)$.
$\Rightarrow$ Es gibt eine Teilfolge (h_{n_k}) mit $\forall k \in \mathbb{N} : f(x_0+h_{n_k}) = f(x_0)$
$\Rightarrow \;\; f'(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{f(x_0+h_{n_k})-f(x_0)}{h_{n_k}} = 0$
Also zu zeigen: $(g\circ f)'(x_0) = 0$.

$$\frac{(g\circ f)(x_0+h_n)-(g\circ f)(x_0)}{h_n} = \begin{cases} 0 & \text{falls } f(x_0+h_n)=f(x_0) \\ \dfrac{g\big(f(x_0+h_n)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x_0+h_n)-f(x_0)} \cdot \dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\to 0 \;=\; (g\circ f)'(x_0).$$

□

Beweis der Quotientenregel: Sei $h(y) := \dfrac{1}{y}$. Dann $\dfrac{1}{g(x)} = (h\circ g)(x)$.

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \overset{\text{Kettenregel}}{=} h'\big(g(x_0)\big)g'(x_0) \;=\; -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Nun mit Produktregel:

$$\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' \;=\; f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(-\frac{g'}{g^2}\right) \;=\; \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}.$$

□

7.15 Ableitung der Umkehrfunktion: Sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$ injektiv, $D(f)$ offen, Bild(f) offen, f^{-1} : Bild$(f) \to D(f)$ die Umkehrfunktion. Ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ und ist f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ stetig, dann ist f^{-1} in y_0 differenzierbar mit

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) \;=\; \frac{1}{f'(x_0)} \;=\; \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}.$$

Beweis: Sei (h_n) in $\mathbb{R}$ mit $h_n \to 0$ und $h_n \neq 0$.
f^{-1} stetig in $y_0 \;\Rightarrow\; x_n := f^{-1}(y_0+h_n) \to f^{-1}(y_0) = x_0$. Außerdem $f(x_n)-f(x_0) = h_n$.

$$\Rightarrow \quad \frac{f^{-1}(y_0+h_n)-f^{-1}(y_0)}{h_n} \;=\; \frac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)} \;=\; \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}} \;\to\; \frac{1}{f'(x_0)}.$$

(Da $y_0+h_n \neq y_0$ und f^{-1} injektiv, ist auch $x_n \neq x_0$.)
Also ist der Grenzwert unabhängig von der gewählten Folge (h_n)
$\Rightarrow \;\; f^{-1}(y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f^{-1}(y_0+h)-f(y_0)}{h} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

□

7.16 Beispiele: **1)** $f(x) = x^n$, $x > 0$, $f'(x) = n\,x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ fest.

$f^{-1}(y) = y^{1/n}$ ist stetig

$$\Rightarrow\ f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} = \frac{1}{n\big(f^{-1}(y)\big)^{n-1}} = \frac{1}{n\,y^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}y^{(1-n)/n} = \frac{1}{n}\,y^{\frac{1}{n}-1}.$$

2) $f(x) = \ln(x) := \log_{\mathrm{e}}(x),\ x > 0\ \Rightarrow\ f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f^{-1}(y) = \mathrm{e}^y$ ist stetig

$$\Rightarrow\ (\mathrm{e}^y)' = f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{\frac{1}{f^{-1}(y)}} = f^{-1}(y) = \mathrm{e}^y.$$

3) Sei $a > 0$ fest, $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$

Kettenregel $\Rightarrow$ $f'(x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

4) $a \in \mathbb{R}$ fest, $f(x) = x^a,\ x > 0\ \Rightarrow\ f'(x) = a\,x^{a-1}$.

7.17 Höhere Ableitungen: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$, D offen und $k \in \mathbb{N}$.

1) f heißt in $x_0 \in D$ ***k*-Mal differenzierbar**, falls f in $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$ $(k-1)$-Mal differenzierbar und die $(k-1)$-te Ableitung von f in x_0 differenzierbar ist. Schreibe

$$f^{(k)}(x_0) \ :=\ \frac{\mathsf{d}^k f}{\mathsf{d}x^k}(x_0) \ :=\ \frac{\mathsf{d}f^{(k-1)}}{\mathsf{d}x}(x_0) \qquad (f^{(2)} =: f'',\ f^{(3)} =: f''',\ f^{(0)} =: f).$$

2) f heißt ***k*-Mal differenzierbar** (auf D), falls f in jedem $x_0 \in D$ k-Mal differenzierbar ist; $x \mapsto f^{(k)}(x)$ heißt die ***k*-te Ableitung** von f.

3) f heißt ***k*-Mal stetig differenzierbar**, falls f k-Mal differenzierbar und $f^{(k)}$ stetig ist. Die Menge der auf D k-Mal stetig differenzierbaren Funktionen bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, bezeichnet mit $C^k(D \to \mathbb{R})$. $C^\infty(D \to \mathbb{R})$ ist der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf D.

7.18 Leibniz-Regel: Sei $n \in \mathbb{N},\ f, g$ in x_0 n-Mal differenzierbar. Dann

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0).$$

(Beweis durch vollständige Induktion.)

7.4 Extrema

7.19 Definition: Sei (M, d) metrischer Raum. Die Funktion $f : M \supseteq D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**), falls

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in D : d(x, x_0) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{bzw. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Ein lokales Maximum oder Minimum heißt auch **lokales Extremum**. Falls $f(x) = f(x_0)$ nur für $x = x_0$ in $B_\varepsilon(x_0)$, so heißt das lokale Extremum **strikt** oder **isoliert**.

Falls

$$\forall x \in D : f(x) \leq f(x_0) \;/\; f(x) \geq f(x_0),$$

hat f in x_0 ein **globales Maximum/globales Minimum**.

7.20 Notwendiges Kriterium für Extremum: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann:

$$f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales Extremum } \Rightarrow \; f'(x_0) = 0.$$

Ist f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 **stationärer** oder **kritischer** Punkt von f.

Beweis: f habe ein lokales Maximum in x_0. Dann folgt

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \\ f'(x_0) &= \lim_{h \to 0-0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; f'(x_0) = 0$$

□

7.21 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^3 = x^3(x-1)$: Kritische Punkte: $x = 0 \lor x = \frac{3}{4}$.
In $x_0 = \frac{3}{4}$ hat f ein lokales und globales Minimum, in $x_0 = 0$ kein Extremum.

2) $f : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x$:
Keine kritischen Punkte, aber bei $x_0 = 1$ hat f ein lokales und globales Maximum, bei $x_0 = 0$ ein lokales und globales Minimum.

7.5 Mittelwertsätze und Anwendungen

7.22 Satz von Rolle: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a, b[$. Dann gilt:

$$f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; \exists \xi \in]a, b[: f'(\xi) = 0.$$

Beweis: $[a,b]$ kompakt $\overset{6.45}{\Rightarrow}$ f nimmt auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an.

Fall 1) Minimum und Maximum liegen in a und b.

$$\Rightarrow \; f(x) = \text{const} = f(a) \text{ für } x \in [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) = 0 \text{ in } [a,b]$$

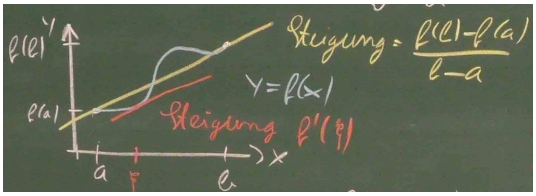
Fall 2) Maximum oder Minimum in $x_0 \in \,]a,b[\,$.

$$\overset{7.20}{\Rightarrow} \; f'(x_0) = 0.$$

□

7.23 Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gilt:

$$\exists \xi \in \,]a,b[\, : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Beweis: Setze $F(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

$$\Rightarrow \; F \text{ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle } (F(a) = f(a) = F(b))$$
$$\Rightarrow \; \exists \xi \in \,]a,b[\, : 0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

7.24 Verallgemeinerter Mittelwertsatz: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$, und $\forall x \in \,]a,b[\, : g'(x) \neq 0$. Dann gilt:

$$\exists \xi \in \,]a,b[\, : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Beweis: Falls $g(a) = g(b) \overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \xi \in \,]a,b[\, : g'(\xi) = 0$ ↯
$F(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big) \;\Rightarrow\; F$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle.
$\Rightarrow \; \exists \xi \in \,]a,b[\, : 0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi).$

□

7.25 Nullableitung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gilt:

$$\big(\forall x \in \,]a,b[\, : f'(x) = 0\big) \;\Rightarrow\; f = \text{konstant auf } [a,b].$$

Beweis: $y \in \,]a,b] \;\Rightarrow\; f\big|_{[a,y]}$ erfüllt die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes.

$$\Rightarrow \quad \exists \xi \in \,]a,y[\, : \underbrace{f'(\xi)}_{=0} = \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \;\Rightarrow\; f(y) = f(a)$$

y beliebig $\;\Rightarrow\; \forall y \in \,]a,b[\, : f(y) = f(a)$. □

7.26 Monotonie: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$.

1) Falls
$$\forall x \in \,]a,b[\, : f'(x) \geq 0 \qquad (f'(x) > 0 \quad / \quad f'(x) \leq 0 \quad / \quad f'(x) < 0),$$
so ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend (streng monoton wachsend/monoton fallend/ streng monoton fallend).

2) Ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend/fallend, dann $\forall x \in \,]a,b[\, : f'(x) \geq 0/f'(x) \leq 0$ auf $]a,b[$.

Beweis: 1) Sei $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$. Zeige $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) < f(x_2)$ durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf $f\big|_{[x_1,x_2]}$:
$$\exists \xi \in \,]x_1,x_2[\, : \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0 \text{ oder } > 0.$$

2) $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\geq 0 \text{ falls } f \text{ mon. wachsend}}$. □

7.27 Lokale Extrema: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$, $x_0 \in \,]a,b[$.

1) Gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass
$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \; (f'(x) > 0) \quad &\text{für} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0, \\ f'(x) \leq 0 \; (f'(x) < 0) \quad &\text{für} \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon, \end{aligned}$$
so hat f in x_0 ein lokales (striktes) Maximum: $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) : f(x) \leq f(x_0) \; (f(x) < f(x_0))$.

Entsprechend für Minimum.

2) Ist f in x_0 zwei Mal differenzierbar und $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum (Minimum).

3) Ist f in x_0 zwei Mal differenzierbar, und besitzt f in x_0 ein lokales Maximum (Minimum), so folgt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \leq 0$ (≥ 0).

Beweis: 1) Aus letztem Satz:

$$\left.\begin{array}{lll} f'(x) \geq 0 & \Rightarrow f \text{ ist monoton wachsend} & \text{für } x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 \\ f'(x) \leq 0 & \Rightarrow f \text{ ist monoton fallend} & \text{für } x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ hat in } x_0 \text{ ein} \\ \text{lokales Maximum.} \end{array}$$

Genauso für striktes Maximum.

2) $f'(x_0) = 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - 0}{x - x_0} = f''(x_0) < 0$

$$\Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 : \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \text{ für } x_0 - \varepsilon < x < x_0 \ \vee \ x_0 < x < x_0 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x_0 < x < x_0 + \varepsilon \\ > 0 & \text{für } x_0 - \varepsilon < x < x_0 \end{cases}$$

$\stackrel{1)}{\Rightarrow}$ f hat in x_0 lokales striktes Maximum.

3) f habe in x_0 lokales Maximum.
7.20 $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$.
Wäre $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein lokales striktes Minimum $\lightning$ $\square$

7.28 Achtung: $f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) = 0$ bedeutet gar nichts! Z.B. $f : x \mapsto x^4$ oder $f : x \mapsto x^5$ bei $x_0 = 0$. In diesem Fall muss man höhere Ableitungen betrachten (später).

7.6 Taylorentwicklung

7.29 Vorbemerkung: Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ n-Mal stetig differenzierbar, $x_0 \in]a, b[$. Es gibt genau ein Polynom $T_n(x_0, x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j \, (x - x_0)^j$ n-ten Grades, so dass

$$T_n^{(k)}(x_0, x)\Big|_{x=x_0} = f^{(k)}(x_0) \qquad \text{für } 0 \leq k \leq n$$

($n + 1$ Unbekannte $a_0, \ldots a_n$ und $n + 1$ Gleichungen). Für dieses Polynom gilt

$$T_n(x_0, x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \, (x - x_0)^j.$$

$T_n(x_0, .)$ heißt das ***n*-te Taylorpolynom** für f, $R_n(x_0, x) := f(x) - T_n(x_0, x)$ das ***n*-te Restglied**.

7.30 Beispiel: $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

$$x_0 = 0 : \quad f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1 \text{ für } k \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow \ T_n(0, x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \, x^j, \quad \underbrace{R_n(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!},}_{\text{bringt so nichts}}$$

$$x_0 = 1 : \quad f^{(k)}(1) = \mathrm{e} \qquad \Rightarrow \ T_n(1, x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathrm{e}}{j!} (x - 1)^j.$$

7.31 Satz (Taylor, Lagrange): Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $(n+1)$-Mal stetig differenzierbar, $x_0 \in]a,b[$ und $x \in]x_0, b[$. Dann:

$$\exists \xi \in]x_0, x[: f(x) \;=\; T_n(x_0,x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{=R_n(x_0,x)}$$

(gilt genauso für $x \in]a, x_0[$, nur dann $\xi \in]x, x_0[$).

Beweis: Sei $x \in]x_0, b[$ fest, $t \in [x_0, x]$ variabel und

$$F(t) \;:=\; f(x) - T_n(t,x) \;=\; f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j$$

$$G(t) \;:=\; \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x) \;=\; f(x) - T_n(x,x) \;=\; 0 \\ G(x) \;=\; 0 \\ F'(t) \;=\; \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!} j(x-t)^{j-1}}_{\overset{k=j-1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k} - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j \;=\; -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \\ G'(t) \;=\; -\frac{(x-t)^n}{n!} \end{cases}$$

Verallgemeinerter Mittelwertsatz:

$$\exists \xi \in]x_0, x[: \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \;=\; \frac{F(x) - f(x_0)}{G(x) - G(x_0)} \;=\; \frac{F(x_0)}{G(x_0)} \;=\; \frac{f(x) - T_n(x_0,x)}{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$$\Rightarrow\; f(x) - T_n(x_0,x) \;=\; \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \;=\; \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{-f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{-(x-\xi)^n}.$$

□

7.32 Beispiel: $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x_0 = 0$, $x = 1$: e^1 soll bis auf Genauigkeit 10^{-5} durch $T_n(1)$ bestimmt werden. Wähle n so groß, dass $|R_n(x_0,x)| < 10^{-5}$:

$$|R_n(0,1)| \;=\; \left| \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \right| \overset{0<\xi<1}{\leq} \frac{\mathrm{e}^1}{(n+1)!} \;\leq\; \frac{3}{(n+1)!} \;\overset{!}{\leq}\; 10^{-5}.$$

Für $n = 8$ gilt $(n+1)! = 9! = 362880$, also $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$.

$$\Rightarrow\; \mathrm{e} \;\approx\; T_8(1) \;=\; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{8!} \;\approx\; 2{,}7182788.$$

7.33 Bemerkung: $T_n(x_0, .)$ approximiert f an der Stelle x_0 bis zur n-ten Ableitung. Erst durch Diskussion des Restgliedes erkennt man, wie gut die Approximation in einer Umgebung von x_0 ist.

7.34 Satz: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{e}^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Taylorentwicklung bei $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= T_n(0,x) + R_n(0,x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + R_n(0,x) \\ |R_n(0,x)| &= \left| \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} \right| \le \underbrace{\max\{\mathrm{e}^x, 1\}}_{=\text{ konst}} \underbrace{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{\to 0} \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

□

7.35 Hinreichende Bedingungen für Extrema: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ n-Mal stetig differenzierbar, $x_0 \in D$ und $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

1) Ist n ungerade, so hat f in x_0 einen **Sattelpunkt**, d.h. Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

2) Falls n gerade ist:

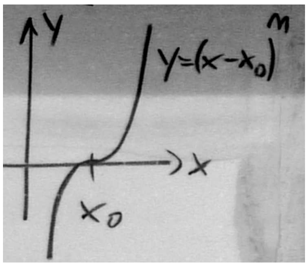
   a) Ist $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum.

   b) Ist $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

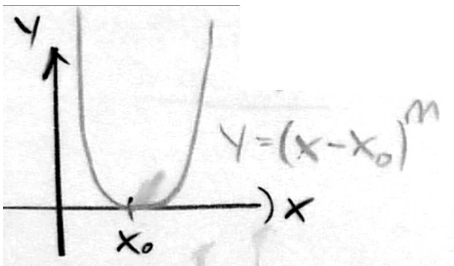
Beweis: Taylorentwicklung: $f(x) = \underbrace{T_{n-1}(x_0,x)}_{=f(x_0)+0} + r_{n-1}(x_0,x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} 0 + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$,

$$f^{(n)} \text{ stetig} \wedge f^{(n)}(x_0) \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(\xi) \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad \text{in } B_\varepsilon(x_0).$$

Falls n ungerade:



Falls n gerade:



Multiplikation mit $f(\xi)$ mit konstantem Vorzeichen ändert den Graph nicht wesentlich (z.B. Vorzeichenwechsel bei x_0 bleibt), Addition von $f(x_0)$ verschiebt den Graphen. □

7.36 Beispiele: $f(x) = x^6$, $f(x) = x^7$.

7.7 Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$

7.37 Regeln von de l'Hospital: Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$, und es existiere

$$l \;=\; \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Gilt zusätzlich

$$\lim_{x \to b} f(x) = 0 \;\wedge\; \lim_{x \to b} g(x) = 0 \tag{$*$}$$

oder

$$\lim_{x \to b} g(x) = \infty \tag{$**$}$$

so folgt

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; l.$$

Beweis: 1) Sei $l' > l$ gegeben. Zeige $\dfrac{f(x)}{g(x)} < l'$ für $x \to b$.

Wähle $l'' \in \,]l, l'[\,$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{x \to b}{\to} l < l'' \;\Rightarrow\; \exists K \in \,]a, b[\;\; \forall x \in \,]K, b[\, : \frac{f'(x)}{g'(x)} < l''.$$

Wähle $x_1 \in \,]K, b[\,$ fest. Verallgemeinerter Mittelwertsatz im Intervall $[x_1, x]$ für $x_1 < x < b$:

$$\forall x \in \,]x_1, b[\;\; \exists \xi_x \in \,]x_1, x[\, : \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \;=\; \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \overset{\xi_x \in]K,b[}{<} l''.$$

a) Gilt $(*)$, so folgt

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} \;=\; \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \;\leq\; l'' \;<\; l'.$$

Da x_1 fest, aber beliebig, folgt $\forall x_1 \in \,]K, b[\, : \dfrac{f(x_1)}{g(x_1)} < l'$.

b) Gilt $(**)$, so folgt

$$\exists K' \in \,]K, b[\;\; \forall x \in \,]K', b[\, : g(x) > \max\{0, g(x_1)\}.$$

Für $x \in \,]K', b[\,$ folgt dann

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)}}_{>0} \;<\; l'' \underbrace{\frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)}}_{=1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}$$

$$\Rightarrow\; \frac{f(x)}{g(x)} \;<\; l'' \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)} \;\overset{x \to b}{\to}\; l'' \;<\; l'$$

$$\Rightarrow\; \exists K'' \in \,]K', b[\;\; \forall x \in \,]K'', b[\, : \frac{f(x)}{g(x)} \;<\; l'.$$

Damit ist bewiesen: Aus $(*)$ oder $(**)$ folgt

$$\forall l' > l \; \exists K \in]a,b[\;\; \forall x \in]K,b[: \frac{f(x)}{g(x)} \; < \; l'.$$

2) Genauso zeigt man

$$\forall l'' < l \; \exists K' \in]a,b[\;\; \forall x \in]K',b[: \frac{f(x)}{g(x)} \; > \; l''. \tag{$***$}$$

3) Sei $\varepsilon > 0$. Setze $l' := l + \varepsilon, \; l'' := l - \varepsilon$. Dann

$$\forall x \in]\max\{K, K'\}, b[: l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon.$$

Dies beweist $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$. □

7.38 Bemerkungen: **1)** Der Satz gilt genauso, wenn $\lim\limits_{x \to} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \; (= -\infty)$. Dies folgt direkt aus $(***)$ (bzw. aus der Aussage vor $(***)$).

2) Der Satz gilt entsprechend auch für den Grenzwert $x \to a$.

3) Als Kurzhinweis auf die Anwendung des Satzes schreibt man $\left[\frac{0}{0}\right]$ bzw. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

4) Anwendung beim Typ "$0 \cdot \infty$": $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to b} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{(Fall } \left[\frac{0}{0}\right]\text{)} \\ &= \lim_{x \to b} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{(Fall } \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\text{)} \end{aligned}$$

5) Anwendung beim Typ "1^∞": $\lim f(x) = 1$, $\lim g(x) = \infty$: $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ geht mit vorigem Fall und Stetigkeit der Exponentialfunktion.

7.39 Beispiele: **1)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} \; = \; 0.$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \; = \; \dfrac{1}{2}.$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x} = 1.$

4) $\lim\limits_{x \downarrow 0} x \, \ln x = 0.$

7.40 Krasse Funktion: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

f ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$: Für $x_0 \neq 0$: ✓
$x_0 = 0 : \lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^{1/x^2}} = 0 = f(0)$.

f ist differenzierbar: Es gilt $f'(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

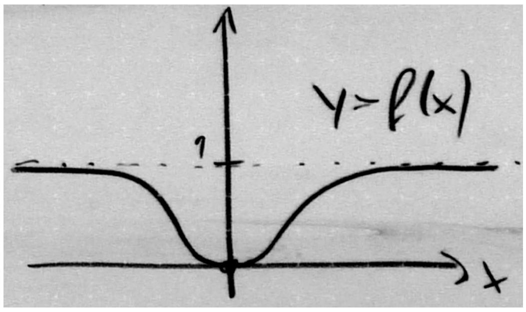
Ableitung im Punkt $x = 0$:

$$f'(0) \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2} \cdot (-\frac{2}{x^3})} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} \;=\; 0.$$

Mit Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(0) = 0$.
Taylorentwicklung:

$$f(x) = 0 + R_n(0, x).$$

Diese Funktion ist um $x_0 = 0$ nicht durch das Taylorpolynom approximierbar.



7.8 Eigenschaften der Ableitungsfunktion

7.41 Satz: Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gebe zwei Punkte $x_1, x_1 \in]a, b[$ mit $x_1 < x_2$ und $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$. Dann

$$\exists \xi \in]x_1, x_2[: f'(\xi) = 0.$$

Beweis: Fall $f'(x_1) > 0 \;\wedge\; f'(x_2) < 0$:
f differenzierbar $\wedge$ $[x_1, x_2] \subseteq]a, b[\;\Rightarrow\; f$ stetig auf $[x_1, x_2]$.
$[x_1, x_2]$ kompakt $\overset{6.45}{\Rightarrow}$ $\exists \xi \in [x_1, x_2] : f(\xi) = \max\{f(x) : x \in [x_1, x_2]\}$.
Zeige $\xi \neq x_1 \;\wedge\; \xi \neq x_2$. Dann folgt $\xi \in]x_1, x_2[\overset{7.20}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$.
Annahme: $\xi = x_1$, also $f(x) \leq f(x_1)$ für $x \in [x_1, x_2]$. Dann

$$f'(x_1) \;=\; \lim_{x\to x_1+0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \;\leq\; 0 \;\lightning\; f'(x_1) > 0$$

Genauso: $\xi = x_2 \;\Rightarrow\; f'(x_2) \geq 0 \;\lightning\; f'(x_2) < 0$.
Fall $f'(x_1) < 0 \;\wedge\; f'(x_2) > 0$: Wähle $\xi \in [x_1, x_2]$ mit $f(\xi) = \min\{f(x) : x \in [x_1, x_2]\}$. Dann wie anderer Fall. □

7.42 Satz von Darboux: Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gebe zwei Punkte $x_1, x_2 \in]a, b[$ mit $x_1 < x_2$ und $f'(x_1) > f'(x_2)$. Dann

$$\forall \lambda \in]f'(x_2), f'(x_1)[\;\; \exists \xi \in]x_1, x_2[: f'(\xi) = \lambda.$$

Beweis: Wende den letzten Satz auf $g(x) := f(x) - \lambda x$ an:

$$\left.\begin{array}{rcl} g'(x_1) &=& f'(x_1) - \lambda \;>\; 0 \\ g'(x_2) &=& f'(x_2) - \lambda \;<\; 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \;\exists \xi \in\,]x_1, x_2[\, : 0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \lambda.$$

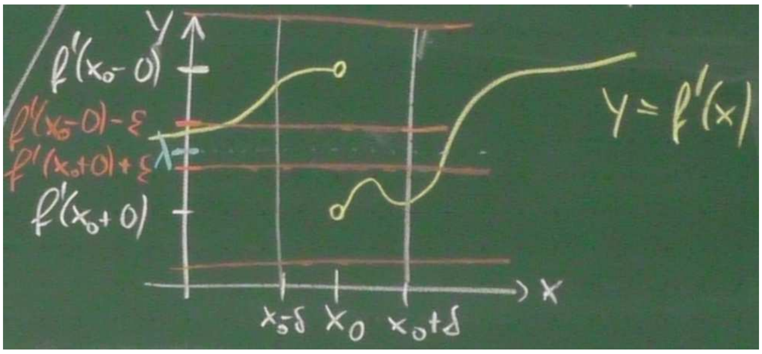
□

7.43 Satz: Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann besitzt $f' :]a, b[\to \mathbb{R}$ keine Unstetigkeitsstellen 1. Art (Sprungstellen).

Beweis: Annahme: $x_0 \in\,]a, b[$ sei Sprungstelle von f', d.h.

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x_0 - 0) &=& \lim_{x\to x_0-0} f'(x) \\ f'(x_0 + 0) &=& \lim_{x\to x_0-0} f'(x) \end{array}\right\} \text{existieren und } f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0).$$

O.B.d.A. $f'(x_0 - 0) > f'(x_0 + 0)$ (Sonst betrachte $-f$).



Setze $\varepsilon := \dfrac{1}{3}\big(f'(x_0 - 0) - f'(x_0 + 0)\big) > 0.$

$f'(x) \to f'(x_0 - 0)$ für $x \to x_0 - 0$

$$\Rightarrow \;\exists \delta > 0 \;\forall x \in\,]x_0 - \delta, x_0[\, : \;\underbrace{|f'(x) - f'(x_0 - 0)| < \varepsilon}_{\Leftrightarrow\; -\varepsilon < f'(x) - f'(x_0-0) < \varepsilon \;\Rightarrow\; f'(x) > f'(x_0-0) - \varepsilon}$$

$f'(x) \to f'(x_0 + 0)$ für $x \to x_0 + 0$

$$\Rightarrow \;\exists \delta' > 0 \;\forall x \in\,]x_0, x_0 + \delta'[\, : f'(x) < f'(x_0 + 0) + \varepsilon$$

Wähle $x_1 := x_0 - \dfrac{\delta}{2}$, $\;x_2 := x_0 + \dfrac{\delta'}{2}$, $\;\lambda \in [f'(x_0 + 0) + \varepsilon, f'(x_0 - 0) - \varepsilon] \setminus \{f'(x_0)\} \neq \emptyset$.

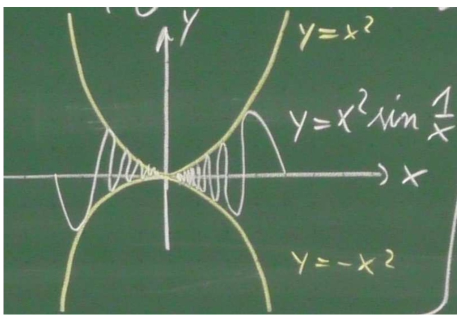
$\Rightarrow \;\forall \xi \in\,]x_1, x_2[\, : f'(\xi) \neq \lambda$ ↯ Satz von Darboux.

□

7.44 Beispiel: $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \;f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f' besitzt in $x_0 = 0$ eine Unstetigkeitsstelle 2. Art.



8 Reihen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

In diesem Kapitel steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Damit gilt $d(x,y) = |x-y|$ für $x, y \in \mathbb{K}$.

8.1 Grundlegendes

8.1 Erinnerung: Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{K}$.

1) Die (unendliche) **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet die Folge (s_n) der **Partialsummen** mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Die Folgenglieder a_k heißen **Summanden** der Reihe.

2) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **konvergent**, falls (s_n) konvergiert, sonst **divergent**.

3) Falls die Reihe konvergiert, schreibe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;:=\; \lim_{n\to\infty} s_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

4) Eine relle Reihe (d.h. die Summanden sind reell) heißt **bestimmt divergent**, falls $s_n \to \infty$ oder $s_n \to -\infty$. Schreibe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;=\; \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \;=\; -\infty.$$

5) Genauso $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit $k_0 \in \mathbb{Z}$.

8.2 Bemerkung: Jede Folge kann als Reihe dargestellt werden:

$$x_n = \underbrace{x_1}_{=:a_1} + \underbrace{x_2 - x_1}_{=:a_2} + \underbrace{x_3 - x_2}_{=:a_3} + \ldots + \underbrace{x_n - x_{n-1}}_{=:a_n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = (x_n).$$

8.3 Eigenschaften: 1) Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind auch $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda\, a_k$ konvergent mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda\, a_k \;=\; \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

2) Cauchy-Kriterium: Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N_\varepsilon : \underbrace{\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right|}_{=|s_m - s_n|} < \varepsilon \,.$$

3) Sind (a_k) und (b_k) Folgen, die sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden, so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert. (Die Grenzwerte können verschieden sein.)

4) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, dann folgt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Die Umkehrung gilt nicht: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.
Nullfolge-Kriterium: $\neg(a_n \to 0) \;\Rightarrow\; \sum a_k$ ist divergent.

5) Ist $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{N}$, und sind die Partialsummen beschränkt, so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Beweis: **1)** Folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \;=\; s_n + \tilde{s}_n \;\to\; \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k .$$

Genauso: $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda\, a_n \;=\; \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \;\to\; \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k.$

2) Folgt aus

$$\begin{aligned} (s_n) \text{ ist konvergent} \quad &\Rightarrow \quad (s_n) \text{ ist C-Folge} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\; \forall m, n > N_\varepsilon : |s_n - s_m| < \varepsilon, \\ (s_n) \text{ ist C-Folge} \quad &\overset{\mathbb{K} \text{ vollständig}}{\Rightarrow} \quad (s_n) \text{ ist konvergent} . \end{aligned}$$

3) $a_k = b_k$ für $k \geq K \;\Rightarrow\; \left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k \right| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} b_k \right|$ für $k \geq K \overset{2)}{\Rightarrow}$ Behauptung.

4) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, $\varepsilon > 0$

$$\overset{2)}{\Rightarrow} \;\forall m = n+1, n > N_\varepsilon : |a_{n+1}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k \right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; a_n \to 0.$$

Das Nullfolge-Kriterium ist die Kontraposition zur bewiesenen Aussage.

5) $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \;\Rightarrow\; (s_n)$ ist monoton wachsend
Nach Voraussetzung ist (s_n) beschränkt
$\Rightarrow\; (s_n)$ ist konvergent $\;\Leftrightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

□

8.2 Absolute und bedingte Konvergenz

8.4 Leibniz-Kriterium: Sei (a_n) reelle, positive, monoton fallende Nullfolge, d.h.

$$\big(\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0 \ \wedge \ a_n \geq a_{n+1}\big) \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dann ist die **alternierende** Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, a_k$ konvergent, und es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, a_k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, a_k \right| \ \leq \ a_{n+1}.$$

Beweis: Setze $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k\, a_k$.

1) $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend: $s_{2(k+1)} - s_{2k} \ = \ a_{2k+2} - a_{2k+1} \ \leq \ 0$.

2) $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend: $s_{2(k+1)+1} - s_{2k+1} \ = \ -a_{2k+3} + a_{2k+2} \ \geq \ 0$.

3) Es gilt: $s_1 \ \leq \ s_{2k+1} \ = \ s_{2k} - a_{2k+1} \ \leq \ s_{2k} \ \leq \ s_2$.

$\Rightarrow$ $(s_{2k}), (s_{2k+1})$ sind monoton und beschränkt, also konvergent.
Wegen $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \to 0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} \ = \ \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} \ =: \ s.$$

$\Rightarrow$ (s_n) ist konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

4) Fehlerabschätzung:

$$s_{2k-1} \leq s \leq s_{2k} \ \Rightarrow \ |s - s_{2k-1}| = s - s_{2k-1} \leq s_{2k} - s_{2k-1} = a_{2k},$$
$$s_{2k+1} \leq s \leq s_{2k} \ \Rightarrow \ |s - s_{2k}| = s_{2k} - s \leq s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1}.$$

$\square$

8.5 Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist konvergent (später: gegen $\ln 2$).

8.6 Definition: Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{K}$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, heißt **bedingt konvergent**.

8.7 Beispiele: 1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist bedingt konvergent.

2) Geometrische Reihe: Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ absolut konvergent, denn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |q|^k$ ist konvergent.

8.8 Satz: In $\mathbb{K}$ ist jede absolut konvergente Reihe konvergent.

Beweis: Cauchy-Kriterium:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon \qquad \text{für } m, n > N_\varepsilon.$$

$\square$

8.9 Beispiel: Sei $s := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Wir sortieren die Reihe um zu

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \pm \ldots &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2k-1} \underbrace{- \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}}_{= \frac{2-1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)} \Big) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{s}{2}. \end{aligned}$$

8.10 Definition: Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann heißt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ **Umordnung** der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

8.11 Satz: Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sei absolut konvergent, und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei bijektiv. Dann konvergiert die Umordnung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis: Sei $s := \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\varepsilon > 0$.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

φ bijektiv $\Rightarrow$ $\exists N \in \mathbb{N} : \{1, 2, \ldots, N_\varepsilon\} \subseteq \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(N)\}$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{N} \setminus \{\varphi(1), \ldots, \varphi(N)\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$

1) Für $m \geq n > N$ folgt
$$\sum_{k=n}^{m} |a_{\varphi(k)}| \;\leq\; \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist konvergent.

2) Für $n > N$ folgt
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - s\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k - \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} a_k\right| \\ &\leq \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k\right|}_{\leq \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2} + \underbrace{\left|\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} a_k\right|}_{\leq \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s.$

$\square$

8.12 Satz: Es sei (a_k) eine reelle Folge und
$$a_k^+ := \max\{0, a_k\} = \begin{cases} a_k & \text{falls } a_k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad a_k^- := -\min\{0, a_k\} = \begin{cases} -a_k & \text{falls } a_k \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gelten

1) $a_k = a_k^+ - a_k^-$, $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$, $a_k^+ = \frac{1}{2}\big(|a_k| + a_k\big)$, $a_k^- = \frac{1}{2}\big(|a_k| - a_k\big)$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ konvergent $\wedge \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergent.

3) Ist genau eine der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ divergent, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bestimmt divergent.

4) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty \wedge \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$.

Beweis: **1)** Mit Fallunterscheidung $a_k \geq 0$ bzw. $a_k < 0$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\big(|a_k| + a_k\big)}_{=a_k^+}$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\big(|a_k| - a_k\big)}_{=a_k^-}$ konvergent.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ konvergent $\wedge \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^+ + a_k^-)}_{=|a_k|}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^+ - a_k^-)}_{=a_k}$ konvergent.

3) Z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty \ \wedge \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergent. Dann $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ \to \infty \ \wedge \ s_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k^- \leq S$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k^+ - a_k^-) = s_n - s_n' \geq s_n - S \to \infty.$

Im anderen Fall: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty.$

4) Nur eine der beiden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ divergent $\overset{3)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\lightning$

Beide Reihen konvergent $\overset{2)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\lightning$

Also sind beide Reihen divergent $\overset{a_k^+, a_k^- \geq 0}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$

$\square$

8.13 Riemannscher Umordnungsatz: Sei (a_n) reelle Folge und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent. Dann existiert zu jedem $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ eine Umordnung der Reihe mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s$.

Beweisidee: Addiere so lange positive Folgengleider, bis Summe $> s$, addiere so lange negative Glieder, bis Summe $< s$, ...

Beweis: Sei (a_{n_k}) die Teilfolge aller nicht negativen Glieder von (a_n) und (a_{m_k}) die Teilfolge aller negativen Glieder.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + = \infty \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} = -\infty.$$

Sei $s \in \mathbb{R}$. Die Abbildung φ wird rekursiv konstruiert.

Schritt 1: Wähle $K_1 \in \mathbb{N}$, so dass $O_1 := \sum_{k=1}^{K_1} a_{n_k} > s$.

Schritt 2: Wähle $L_1 \in \mathbb{N}$, so dass $U_1 := O_1 + \sum_{k=1}^{L_1} a_{m_k} < s \leq O_1 + \sum_{k=1}^{L_1 - 1} a_{m_k}$.

Schritt 3: Wähle $K_2 \geq K_1 + 1$, so dass $O_2 := U_1 + \sum_{k=K_1+1}^{K_2} a_{n_k} > s \geq U_1 + \sum_{k=K_1+1}^{K_2-1} a_{n_k}$.

Schritt 4: Wähle $L_2 \geq L_1 + 1$, so dass $U_2 := O_2 + \sum_{k=L_1+1}^{L_2} a_{m_k} < s \leq O_2 + \sum_{k=L_1+1}^{L_2-1} a_{m_k}$.

usw.

Definiere

$$\varphi(k) := \begin{cases} n_k & \text{für } 1 \le k \le K_1 \\ m_{k-K_1} & \text{für } K_1+1 \le k \le K_1+L_1 \\ n_{k-L_1} & \text{für } K_1+L_1+1 \le k \le L_1+K_2 \\ m_{k-K_2} & \text{für } L_1+K_2+1 \le k \le K_2+L_2 \\ \vdots & \end{cases}$$

Nach Konstruktion gelten:

- $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bijektiv.
- $0 < O_j - s \le a_{n_{K_j}} \to 0 \;\Rightarrow\; O_j \to s$,
- $0 > U_j - s \ge a_{m_{L_j}} \to 0 \;\Rightarrow\; U_j \to s$,
- $$\left.\begin{array}{ll} U_j \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \le O_{j+1} & \text{für } L_j + K_j + 1 \le n \le L_j + K_{j+1} \\ U_{j+1} \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \le O_{j+1} & \text{für } L_j + K_{j+1} + 1 \le n \le L_{j+1} + k_{j+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s.$$

□

8.3 Kriterien für absolute Konvergenz

8.14 Vergleichskriterium: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$, (b_n) in $\mathbb{R}$.

1) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N : |a_n| \le b_n \ \wedge\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N : |a_n| \ge b_n \ge 0 \ \wedge\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist divergent.

Beweis: 1) Cauchy-Kriterium:

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \;\le\; \sum_{k=n+1}^{m} b_k \;<\; \varepsilon \qquad \text{für } m, n > \max\{N_\varepsilon, N\}.$$

2) Annahme: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\overset{1)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent. ↯

□

8.15 Erinnerung: 1) Sei (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.

a) Die Menge der Verdichtungspunkte: $V(a_n) := \{v \in \mathbb{R} \mid \exists (a_{n_k}) : a_{n_k} \to v\}$.

b) Limes superior: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \max V(a_n)$.

c) Limes inferior: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \min V(a_n)$.

d) Für jede beschränkte Folge (a_n) gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon : \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon < a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$$

2) Falls (a_n) eine Teilfolge (a_{n_k}) besitzt mit $a_{n_k} \to \infty$: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \infty$.
Falls (a_n) eine Teilfolge (a_{n_k}) besitzt mit $a_{n_k} \to -\infty$: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := -\infty$.

8.16 Wurzelkriterium: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$ und $a := \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

1) $a < 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) $a > 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent.

8.17 Bemerkung: Im Fall $a = 1$ kann alles passieren:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konvergiert für $s > 1$, divergiert für $s \leq 1$, und $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{k^s}\right|^{1/n} = 1$ für jedes $s \in \mathbb{R}$.

Beweis: **1)** Wähle $b \in \,]a, 1[$.

$$b > \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \;\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : |a_n|^{1/n} < b$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow\; \forall n > N : |a_n| < b^n. \\ &0 < b < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} b^k \text{ konvergiert} \end{aligned}\right\} \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ absolut konvergent.}$$

2) Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $|a_{n_k}|^{1/n_k} \to a$ (auch im Fall $a = \infty$).

$$\begin{aligned} a > 1 \quad &\Rightarrow \quad \exists K \in \mathbb{N} \; \forall k > K : |a_{n_k}|^{1/n_k} > 1 \\ &\Rightarrow \quad \forall k > K : |a_{n_k}| > 1 \\ &\Rightarrow \quad \neg(a_{n_k} \to 0) \\ &\Rightarrow \quad \neg(a_n \to 0) \\ &\overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Rightarrow} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert.} \end{aligned}$$

□

8.18 Quotientenkriterium: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$.

1) $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent.

Beweis: 1) Wähle $b \in \left]\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, 1\right[$.

$$\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall n > N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < b$$

$$\Rightarrow\; |a_{N+2}| < b|a_{N+1}|,\; |a_{N+3}| < b|a_{N+2}| < b^2|a_{N+1}|,\; \ldots,\; |a_{N+k}| < b^{k-1}|a_{N+1}|$$

$$\Rightarrow\; \forall k \geq 2 : |a_{N+k}| < b^{N+k} \underbrace{\frac{|a_{N+1}|}{b^{N+1}}}_{=:c}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c\, b^k \text{ ist konvergent } \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent.}$$

2) $1 < \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall n > N : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$

$$\Rightarrow\quad |a_{N+1}| < |a_{N+2}| < |a_{N+3}| < \ldots$$

$$\Rightarrow\quad \neg(a_n \to 0)$$

$$\overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Rightarrow}\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert.}$$

$\square$

8.19 Beispiele: 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{4^n}$ konvergiert absolut.

Wurzelkriterium: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n}{4^n}} \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{1/n}}{4} \;=\; \dfrac{1}{4} \lim\limits_{n\to\infty} (n^{1/n}) = \dfrac{1}{4} \;<\; 1.$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ ist absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| \geq 1$.

Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|n^2 z^n|} \;=\; \sqrt[n]{n^2}\,|z| \;=\; \left(n^{1/n}\right)^2 |z| \;\to\; |z| \;\Rightarrow \begin{cases} \text{absolute Konvergenz für } |z| < 1 \\ \text{Divergenz für } |z| > 1 \end{cases}$$

Für $|z| = 1$: $|n^2 z^n| = n^2 \to \infty \;\Rightarrow\; \neg(n^2 z^n \to 0) \;\Rightarrow\; \sum n^2 z^n$ ist divergent.

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

Quotientenkriterium: $\left|\dfrac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| \;=\; |z|\frac{1}{n+1} \;\to\; 0 < 1 \;\Rightarrow\;$ absolute Konvergenz..

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2 + (-1)^n)^n}{4^n}$ ist absolut konvergent:

Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{|a_n|} \;=\; \begin{cases} \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{4^n}} \;=\; \dfrac{3}{4} & \text{für gerades } n, \\ \sqrt[n]{\dfrac{1^n}{4^n}} \;=\; \dfrac{1}{4} & \text{für ungerades } n. \end{cases} \quad \Rightarrow\; \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \dfrac{3}{4} < 1$

$\Rightarrow$ absolute Konv.

$$\text{Quotientenkriterium: } \left|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n}} = \dfrac{1}{4\cdot 3^{n+1}} & \text{für gerades } n \\ \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}} = \dfrac{3^n}{4} & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty,\ \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$$

Mit dem Quotientenkriterium ist keine Aussage möglich!

8.20 Wurzelkriterium ist schärfer: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$ mit $\forall n\in\mathbb{N} : a_n \neq 0$. Dann

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ \le\ \liminf_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \ \le\ \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \ \le\ \limsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

D.h.: Ist $\sum a_k$ nach Quotientenkriterium konvergent, dann liefert auch das Wurzelkriterium Konvergenz.

Beweis: Sei $l := \limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n > N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < l+\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ |a_{N+2}| < (l+\varepsilon)|a_{N+1}|,\ |a_{N+3}| < (l+\varepsilon)|a_{N+2}| < (l+\varepsilon)^2|a_{N+1}|, \ldots$$

$$\Rightarrow\ |a_{N+k}| < (l+\varepsilon)^{k-1}|a_{N+1}| = (l+\varepsilon)^{N+k}\underbrace{\frac{|a_{N+1}|}{(1+\varepsilon)^{N+1}}}_{=:c>0}$$

$$\Rightarrow\ |a_{N+k}|^{1/(N+k)} < (l+\varepsilon)\, c^{1/(N+k)}$$

$$\Rightarrow\ \forall n > N+2 : |a_n|^{1/n} < (l+\varepsilon)\, c^{1/n} \overset{n\to\infty}{\to} (l+\varepsilon)$$

$$\underset{(*)}{\Rightarrow}\ \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \le l+\varepsilon.$$

Zu $(*)$: Wähle Teilfolge mit $|a_{n_k}|^{1/n_k} \to \limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}$.

$|a_{n_k}|^{1/n_k} < (l+\varepsilon)\, c^{1/n_k}\ \Rightarrow\ \limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_k}|^{1/n_k} \le \lim\limits_{k\to\infty}(l+\varepsilon)\, c^{1/n_k} = l+\varepsilon.$

Also bewiesen: $\forall\varepsilon > 0 : \limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \le l+\varepsilon.$

$\Rightarrow\ \limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \le l.$

Genauso $\liminf\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \ge \liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. □

8.21 Kriterium von Kummer: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$, $\forall n\in\mathbb{N} : a_n \neq 0$, (b_n) Folge in $\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$: $b_n > 0$, und sei

$$D_n\ :=\ b_n\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - b_{n+1}.$$

1) $\liminf\limits_{n\to\infty} D_n > 0\ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

2) $\big(\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : D_n \le 0\big) \ \wedge\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ divergiert $\ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist divergent.

Beweis: **1)** Wähle $d \in \big]0, \liminf\limits_{n\to\infty} D_n\big[\ \Rightarrow\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : D_n > d.$

$\Rightarrow\ \forall n > N : b_n|a_n| - b_{n+1}|a_{n+1}| = D_n\,|a_{n+1}| > d|a_{n+1}| > 0 \qquad (*)$

Insbesondere $\forall n > N : b_n|a_n| > b_{n+1}|a_{n+1}|$, d.h. $(b_n|a_n|)$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt durch 0, also konvergent

$$\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \big(b_k|a_k| - b_{k+1}|a_{k+1}|\big) \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} b_1|a_1| - b_{n+1}|a_{n+1}| \ \to\ b_1|a_1| - \lim_{n\to\infty} b_n|a_n|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{n} \big(b_k|a_k| - b_{k+1}|a_{k+1}|\big) \text{ ist konvergent.} \\ (*)\ \Rightarrow\ |a_{n+1}| < \frac{1}{d}\big(b_n|a_n| - b_{n+1}|a_{n+1}|\big) \end{array}\right\} \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ ist konvergent.}$$

2) Sei $n > N$.

$D_n \le 0 \ \Rightarrow\ b_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - b_{n+1} \le 0 \ \Rightarrow\ b_n|a_{n+1}| \le b_{n+1}|a_{n+1}|$

$\Rightarrow\ b_{n+1}|a_{n+1}| \ge b_n|a_n| \ge b_{n-1}|a_{n-1}| \ldots \ge b_{N+1}|a_{N+1}|$

$\Rightarrow\ \forall n > N : b_n|a_n| \ge b_{N+1}|a_{N+1}| =: c$ (c konstant bezüglich n)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow\ \forall n > N : |a_n| \ge \frac{c}{b_n} > 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} \text{ div.} \ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c}{b_k} \text{ div.} \end{array}\right\} \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ ist divergent.}$$

$\square$

8.22 Kriterium von Raabe: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$, und sei

$$D_n \ := \ n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right).$$

1) $\liminf\limits_{n\to\infty} D_n > 1 \ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

2) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : D_n \le 1 \ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist divergent.

Beweis: Wende Kummer an mit $b_n := n$. Beachte

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) = 1 \ \Leftrightarrow\ \underbrace{n}_{=b_n} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - \underbrace{(n+1)}_{b_{n+1}} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

$\square$

8.4 Reihen mit positiven Summanden

8.23 Verdichtungskriterium von Cauchy: Sei (a_n) monoton fallende Folge positiver Zahlen. Dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \, a_{2^k} \text{ konvergent.}$$

Beweis in Übungen

8.24 Satz: Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit

$$\Big(\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : a_n, b_n > 0\Big) \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \;>\; 0.$$

Dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent.}$$

Beweis: Sei $l := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.
Vorüberlegung: $0 < \frac{l}{2} < l < 2l \;\Rightarrow\; \exists N' \in \mathbb{N} \; \forall n > N' : \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2l$
$\Rightarrow\; \forall n > \max\{N, N'\} : 0 < a_n < 2l \, b_n \;\wedge\; 0 < b_n < \frac{2}{l} \, a_n$.

"$\Rightarrow$": $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} a_k$ konvergent $\underset{|b_n| = b_n < \frac{2}{l} a_n}{\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent.

"$\Leftarrow$": $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2l b_k$ konvergent $\underset{|a_n| = a_n < 2l b_n}{\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

$\square$

8.25 Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^3 - 4k^2 - 8}{k^4 + 3k^3 + 10}\right)^s$ konvergent $\;\Leftrightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^s$ konvergent $\;\Leftrightarrow\; s > 1$.

8.5 Das Produkt von Reihen

8.26 Vorüberlegung: Zur Berechnung des Produkts der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ müssen alle Produkte

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0\,b_0 & a_0\,b_1 & a_0\,b_2 & a_0\,b_3 & a_0\,b_4 & a_0\,b_5 & \ldots \\
a_1\,b_0 & a_1\,b_1 & a_1\,b_2 & a_1\,b_3 & a_1\,b_4 & a_1\,b_5 & \ldots \\
a_2\,b_0 & a_2\,b_1 & a_2\,b_2 & a_2\,b_3 & a_2\,b_4 & a_2\,b_5 & \ldots \\
a_3\,b_0 & a_3\,b_1 & a_3\,b_2 & a_3\,b_3 & a_3\,b_4 & a_3\,b_5 & \ldots \\
a_4\,b_0 & a_4\,b_1 & a_4\,b_2 & a_4\,b_3 & a_4\,b_4 & a_4\,b_5 & \ldots \\
a_5\,b_0 & a_5\,b_1 & a_5\,b_2 & a_5\,b_3 & a_5\,b_4 & a_5\,b_5 & \ldots \\
\vdots & \vdots & & & & &
\end{array}$$

summiert werden.

8.27 Definition: Die Reihe

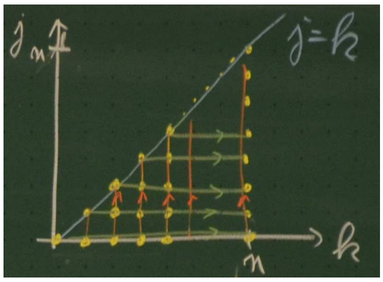
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}\,b_j\right) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\,b_{k-j}\right)$$

heißt **Cauchy-Produkt** der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

8.28 Satz (Mertens): $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent. Dann konvergiert das Cauchy-Produkt, und für die Grenzwerte gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_k\,b_{k-j}\right) \;=\; \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Beweis: Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} b_k,\ s := \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Damit



$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k\, b_{k-j} &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_j\, b_{k-j} \\
&\overset{l:=k-j}{=} \sum_{j=0}^{n} a_j \underbrace{\sum_{l=0}^{n-j} b_l}_{=s_{n-j}} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j\,(s_{n-j}-s) + s\sum_{j=0}^{n} a_j \\
&\underset{j=n-k}{\overset{k:=n-j}{=}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\,(s_k - s)}_{\overset{\text{zu zeigen}}{\to} 0} + \underbrace{s\sum_{j=0}^{n} a_j}_{\to s\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)}
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall k > N : |s_k - s| < \frac{\varepsilon}{2\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|}$. Für $n > N$ folgt

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\,(s_k - s)\right| &\le \sum_{k=0}^{N} |a_{n-k}|\,\underbrace{|s_k - s|}_{\le \max\{|s_j - s| : 1\le j\le N\}} + \sum_{k=N+1}^{n} |a_{n-k}|\,\underbrace{|s_k - s|}_{\le \varepsilon/2\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|} \\
&< \max_{1\le j\le N} |s_j - s| \sum_{k=0}^{N} |a_{n-k}| + \frac{\varepsilon}{2\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|}\sum_{k=N+1}^{n} |a_{n-k}| \\
&\underset{k=n-l}{\overset{l:=n-k}{<}} \max_{1\le j\le N} |s_j - s| \sum_{l=n-N}^{n} |a_l| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Wähle $N' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n > N' : \sum_{l=n}^{\infty} |a_l| < \frac{\varepsilon}{2\max_{1\le j\le N} |s_j - s|}.$$

Für $n > N + N'$ gilt dann $n - N > N'$ und

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\,(s_k - s)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

8.29 Satz: Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, so ist das Cauchy-Produkt der beiden Reihen absolut konvergent.

Beweis: $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|,\ \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ absolut konvergent $\overset{\text{letzter Satz}}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} |a_k|\,|b_{k-j}|$ konvergent.

□

8.30 Beispiele: 1) Die komplexe Exponentialfunktion:

$$\mathrm{e}^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Wir wissen: **a)** Reihe konvergiert absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$ (siehe 8.19).

b) Für $z \in \mathbb{R}$ ist e^z gleich dem Reihengrenzwert (siehe 7.34).

Für $z, w \in \mathbb{C}$ folgt aus dem letzten Satz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{j!\,(k-j)!}}_{=\binom{k}{j}} z^j\, w^{k-j} \\
&\overset{\text{Binom. Satz}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z+w)^k \\
&= \mathrm{e}^{z+w}
\end{aligned}$$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ ist bedingt konvergent.

Cauchy-Produkt mit sich selber:

$$c_k := \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}} \frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k-j+1}} = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{j+1}\,\sqrt{k-j+1}}.$$

Die Produktreihe $\sum c_k$ ist divergent:

$$c_{3n} \geq \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{j+1}\,\sqrt{3n-j+1}} \geq \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\,\sqrt{2n+1}} = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \neg(c_n \to 0)$

$\Rightarrow \sum c_n$ ist divergent.

9 Folgen und Reihen von Funktionen

9.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

9.1 Prinzip der Gleichmäßigkeit: Sei P Menge. Eine Aussageform $H(p)$ ist gleichmäßig erfüllt bezüglich $p \in P$, falls:

1) $\forall p \in P : H(p)$,

2) Die Konstanten in $H(p)$ hängen nicht von $p \in P$ ab.

9.2 Beispiel: Seien M_1, M_2 metrische Räume, $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$.
f heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x \in D(f)\ \forall x' \in D(f) : d_1(x, x') < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ d_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

$\uparrow$ δ_ε hängt nicht von x ab

f heißt stetig, wenn

$$\forall x \in D(f)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x' \in D(f) : d_1(x, x') < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ d_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

$\uparrow$ δ_ε kann von x abhängen

Im Kontext von 9.1 entspricht dies: $P = M$, $p = x$ und

$$H(x) \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x' \in D(f) : d_1(x, x') < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ d_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

Die Eigenschaft $H(x)$ ist für alle $x \in M$ erfüllt. Bei der gleichmäßigen Konvergenz hängt δ_ε nicht von x ab.

9.3 Definition: Sei (M, d) metrischer Raum, $a : \mathbb{N} \times P \to M$ eine Folge in M, die von $p \in P$ abhängt: $\big(a_n(p)\big)_{n \in \mathbb{N}}$, und $u : P \to M$.

1) $\big(a_n(p)\big)$ heißt **punktweise konvergent** gegen $u(p)$, falls

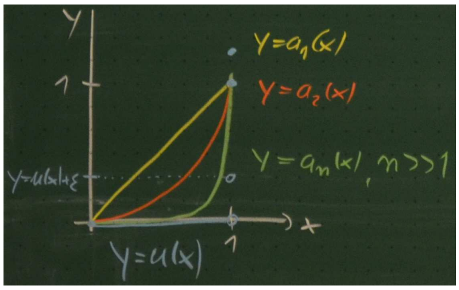
$$\forall p \in P\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_{\varepsilon,p} \in \mathbb{N}\ \forall n > N_{\varepsilon,p} : d\big(a_n(p), u(p)\big) < \varepsilon.$$

2) $\big(a_n(p)\big)$ heißt **auf P gleichmäßig konvergent** gegen $u(p)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : d\big(a_n(p), u(p)\big) < \varepsilon.$$

9.4 Beispiel: $a_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$:

$$a_n(x) \to a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1[\,, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases} \quad \text{punktweise.}$$



Kann $\big(a_n(x)\big)$ gleichmäßig konvergieren?

Falls $a_n(x) \to v(x)$ gleichmäßig, dann auch punktweise $\Rightarrow$ $v(x) = u(x)$

$\big(a_n(x)\big)$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen $u(x)$, denn sei $\varepsilon > 0$ und $x < 1$:

$$|a_n(x) - u(x)| < \varepsilon \overset{x<1}{\Leftrightarrow} \underbrace{|x^n - 0|}_{\to 1 \text{ für } x \to 1-0 \; \lightning} < \varepsilon.$$

Aber $a_n(x) \to u(x)$ gleichmäßig auf $[0, \frac{1}{2}]$, denn

$$|a_n(x) - u(x)| < \varepsilon \overset{x \le 1/2}{\Leftrightarrow} |x^n| < \varepsilon \Leftarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \text{ für } n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}.$$

9.5 Satz: Sei (M,d) metrischer Raum, $a : \mathbb{N} \times P \to M$, $u : P \to M$. Dann

$$a_n(p) \to u(p) \text{ für } n \to \infty \text{ gleichmäßig bezüglich } p \in P \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{p \in P} d\big(a_n(p), u(p)\big) \right) = 0.$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_{\varepsilon/2} \; \forall n > N_{\varepsilon/2} \; \underbrace{\forall p \in P : d\big(a_n(p), u(p)\big) < \frac{\varepsilon}{2}}_{\Rightarrow \; \sup_{p\in P} d\left(a_n(p), u(p)\right) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon}$

"$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_\varepsilon \; \forall n > N_\varepsilon : \underbrace{\sup_{p \in P} d\big(a_n(p), u(p)\big) < \varepsilon}_{\Rightarrow \; \forall p \in P : d\left(a_n(p), u(p)\right) < \varepsilon}$ $\square$

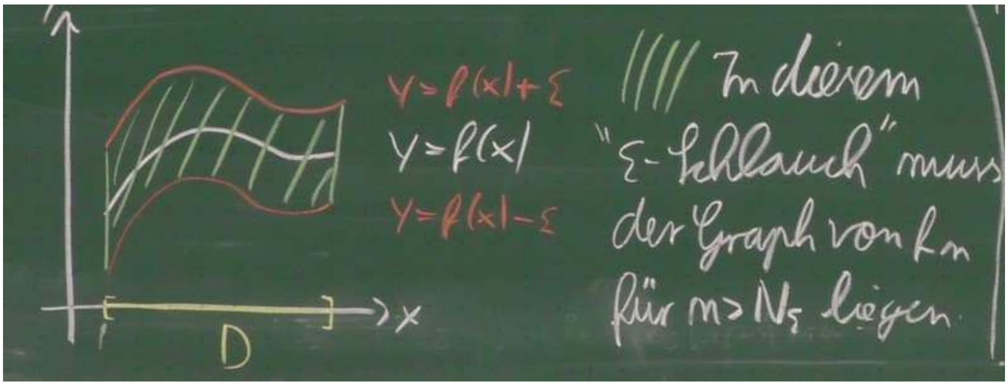
9.6 Zum Beispiel 9.4:

$$\sup_{x \in [0,1]} \big|a_n(x) - u(x)\big| \ge \sup_{x \in [0,1[} |x^n| = 1 \qquad \Rightarrow \text{ keine gleichmäßige Konvergenz auf } [0,1].$$

$$\sup_{x \in [0,1/2]} \big|a_n(x) - u(x)\big| = \sup_{x \in [0,1/2]} |x^n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \Rightarrow \text{ gleichmäßige Konvergenz auf } [0, \tfrac{1}{2}].$$

9.7 Veranschaulichung: Seien $f, f_n : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$:

$$f_n(x) \to f(x) \text{ gleichmäßig auf } D \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in D : \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$$



9.8 Bemerkung: Direkt aus der Definition folgt:

$$a_n(p) \to u(p) \text{ gleichmäßig auf } P \;\Rightarrow\; a_n(p) \to u(p) \text{ punktweise für } p \in P$$

9.9 Stetigkeit der Metrik: Sei M metrischer Raum, $a_n \to a$ und $b_n \to b$ in M. Dann

$$d(a,b) \;=\; \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \big|d(a_n,b_n) - d(a,b)\big| &\overset{\triangle\text{-Ungl. in } \mathbb{R}}{\leq} \big|d(a_n,b_n) - d(b_n,a)\big| + \big|d(b_n,a) - d(a,b)\big| \\ &\overset{\triangle\text{-Ungl. nach unten für } d}{\leq} d(a_n,a) + d(b_n,a) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

□

9.10 Kriterium von Cauchy: Sei (M,d) vollständiger metrischer Raum, $a : \mathbb{N} \times P \to M$. Dann sind äquivalent:

(i) $\big(a_n(p)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent auf P,

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m,n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : d\big(a_n(p), a_m(p)\big) < \varepsilon$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $u : P \to M$ die Grenzfunktion und $\varepsilon > 0$.

(i) $\Rightarrow\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : d\big(a_n(p), u(p)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow\ \forall m,n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : d\big(a_m(p), a_n(p)\big) \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} d\big(a_m(p), u(p)\big) + d\big(u, a_n(p)\big) < \varepsilon.$

"$\Leftarrow$": Sei zunächst $p \in P$ fest gewählt.

(ii) $\Rightarrow$ $\big(a_n(p)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in M $\overset{M \text{ vollständig}}{\Rightarrow}$ konvergent.

Setze $u(p) := \lim\limits_{n\to\infty} a_n(p)$ für $p \in P$.

Nun sei $p \in P$ variabel.

Sei $\varepsilon > 0 \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m,n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : d\big(a_n(p), \underbrace{a_m(p)}_{\to u(p) \text{ für } m\to\infty}\big) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\Rightarrow\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : d\big(a_n(p), u(p)\big) \overset{9.9}{=} \lim\limits_{m\to\infty} d\big(a_n(p), a_m(p)\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$ □

9.11 Definition: Sei $a : \mathbb{N} \times P \to \mathbb{K}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, die von $p \in P$ abhängt.
Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(p)$ heißt **punktweise/gleichmäßig konvergent auf P**, falls die Teilsummenfolge $\big(s_n(p)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise/gleichmäßig auf P konvergiert ($s_n(p) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(p)$).

9.12 Kriterium von Cauchy: Sei $a : \mathbb{N} \times P \to \mathbb{K}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, die von $p \in P$ abhängt. Dann sind äquivalent:

(i) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(p)$ ist gleichmäßig konvergent auf P.

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon > 0\ \forall m,n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : \left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k(p)\right| < \varepsilon.$

Beweis: $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k(p)\right| = \big|s_m(p) - s_{n-1}(p)\big| = d\big(s_m(p), s_{n-1}(p)\big)$. Anwendung von 9.10 (beachte: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind vollständig. □

9.13 Majorantenkriterium von Weierstraß: Seien $a : \mathbb{N} \times P \to \mathbb{K}$ und (b_n) Folgen in $\mathbb{K}$. Gilt

$$\Big(\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall p \in P : \big|a_n(p)\big| \leq b_n\Big) \ \wedge\ \sum_{k=0}^{\infty} b_n \text{ konvergent,}$$

so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(p)$ gleichmäßig konvergent auf P. Die Folge (b_n) heißt **Majorante** für $\big(a_n(p)\big)$.

Beweis: $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k(p)\right| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} \big|a_k(p)\big| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon$ für $m,n > N_\varepsilon$ und $m,n > N$. Dann 9.12. □

9.14 Beispiel: Betrachte $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$. Für jedes feste $q \in]0,1[$ gilt

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-q,q] : |x^n| \le q^n\Big) \ \wedge\ \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ konvergiert.}$$

Also ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ auf $[-q,q]$ gleichmäßig konvergent (gegen $\frac{1}{1-x}$).

Genauso folgt: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sin(kx)\, x^k$ ist gleichmäßig konvergent auf $[-q,q]$.

9.2 Vertauschen von Grenzwerten

9.15 Beispiel: Doppelfolgen:

$$a_{n,p} = \frac{n}{1+n\cdot p}: \quad \left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{n\to\infty} a_{n,p} & = & \frac{1}{p} \\ \lim\limits_{p\to\infty} a_{n,p} & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{p\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} a_{n,p}\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{p\to\infty} a_{n,p}\big)$$

$$a_{n,p} = \frac{n}{1+n+p}: \quad \left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{n\to\infty} a_{n,p} & = & 1 \\ \lim\limits_{p\to\infty} a_{n,p} & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{p\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} a_{n,p}\big) \ne \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{p\to\infty} a_{n,p}\big)$$

9.16 Satz: Sei M vollständiger metrischer Raum, $a : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to M$, $u, v : \mathbb{N} \to M$ und

$$a_{n,p} \to u_p \quad \text{für } n \to \infty \text{ gleichmäßig bezüglich } p \in \mathbb{N}, \tag{$*$}$$

$$a_{n,p} \to v_n \quad \text{für } p \to \infty \text{ punktweise für } n \in \mathbb{N}. \tag{$**$}$$

Dann konvergieren (u_p) für $p \to \infty$, (v_n) für $n \to \infty$, und es gilt

$$\lim_{p\to\infty} u_p = \lim_{n\to\infty} v_n \quad \text{bzw.} \quad \lim_{p\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} a_{n,p}\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{p\to\infty} a_{n,p}\big). \tag{$***$}$$

Beweis: **1)** Zeige: (u_p) ist Cauchy-Folge. $\Big(\overset{M \text{ vollständig}}{\Rightarrow} (u_p)$ konvergent.$\Big)$

Es gilt:

$$d(u_p, u_q) \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\le} d(u_p, a_{n,p}) + d(a_{n,p}, a_{n,q}) + d(a_{n,q}, u_q).$$

Sei $\varepsilon > 0$.

$(*) \ \Rightarrow\ \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall p \in P : d(a_{N,p}, u_p) < \frac{\varepsilon}{4}$.

$(**) \ \Rightarrow\ (a_{N,p})_{p\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge $\Rightarrow\ \exists P_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall p, q > P_\varepsilon : d(a_{N,p}, a_{N,q}) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow\ \forall p > P : d(u_p, u_q) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$

2) Sei $u := \lim\limits_{p\to\infty} u_p$, $\varepsilon > 0$. Zeige: $v_n \to u$.

$(*) \ \Rightarrow\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : d(a_{n,p}, u_p) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\overset{9.9}{\Rightarrow}\ \forall n > N_\varepsilon : d(v_n, u) = \lim\limits_{p\to\infty} d(a_{n,p}, u_p) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ $\square$

9.17 Satz: Sei M metrischer Raum, $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M$, $u, v : \mathbb{N} \to M$, und es gelten $(*)$, $(**)$ und

$$(u_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert } \quad \vee \quad (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert.}$$

Dann folgt $(***)$.

Beweis: 1) Es sei (u_p) konvergent. Dann beweist Teil 2) des vorigen Beweises die Gültigkeit von $(***)$.

2) Sei (v_n) konvergent, $v := \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$d(u_p, v) \le d(u_p, a_{n,p}) + d(a_{n,p}, v_n) + d(v_n, v).$$

$$(*) \ \wedge \ v_n \to v \ \Rightarrow \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall p \in P : d(u_p, a_{N,p}) < \frac{\varepsilon}{3} \ \wedge \ d(v_N, v) < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$(**) \ \Rightarrow \ \exists P_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall p > P_\varepsilon : d(a_{N,p}, v_N) < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\Rightarrow \ \forall p > P_\varepsilon : d(u_p, v) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

9.18 Satz: M_1, M_2 metrische Räume, M_2 vollständig, $f_n : M_1 \supseteq D \to M_2$, $\xi \in H(D)$. Gilt

1) $f_n(x) \to \varphi(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf D und

2) $\forall n \in \mathbb{N} : \lim\limits_{x\to\xi} f_n(x) = a_n$ existiert,

so existeren die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x)$, und es gilt

$$\lim_{x\to\xi} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to\xi} \big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\lim_{x\to\xi} f_n(x)\big)$$

Beweis: Sei (x_p) in D mit $x_p \to \xi$, $x_p \ne \xi$.
Zeige: $\lim\limits_{p\to\infty} \varphi(x_p)$ existiert und ist unabhängig von (x_p).
Setze $c_{n,p} := f_n(x_p)$. Dann

1) $\Rightarrow$ $c_{n,p} \to \underbrace{\varphi(x_p)}_{\hat{=} u_p}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig bezüglich $p \in \mathbb{N}$.

2) $\Rightarrow$ $c_{n,p} \to \underbrace{a_n}_{\hat{=} v_n}$ für $p \to \infty$ punktweise für $n \in \mathbb{N}$.

9.16 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{p\to\infty} \varphi(x_p) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{\text{unabhängig von } (x_p)}$.

Da die Folge (x_p) beliebig war, folgt $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

□

9.3 Eigenschaften der Grenzfunktion

9.19 Satz: Seien M_1, M_2 metrische Räume, $f_n : M_1 \supseteq D \to M_2$ stetig und $f_n(x) \to \varphi(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf D. Dann ist $\varphi : D \to M_2$ stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in D$. Zeige $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \overset{6.57}{\Rightarrow} \varphi$ stetig in x_0.
Sei (x_p) in D mit $x_p \to x_0$, $x_p \neq x_0$. Setze $c_{n,p} := f_n(x_p)$. Dann

- $f_n(x) \to \varphi(x)$ gleichmäßig auf D $\Rightarrow$ $c_{n,p} \to \varphi(x_p)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig bezüglich $p \in \mathbb{N}$,
- $\forall n : f_n$ stetig $\Rightarrow$ $c_{n,p} \to f_n(x_0)$ für $p \to \infty$ punktweise für $n \in \mathbb{N}$.
- $f_n(x_0) \to \varphi(x_0)$ für $n \to \infty$.

9.17 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{p\to\infty} \varphi(x_p) = \lim\limits_{p\to\infty} \big(\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,p}\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \big(\lim\limits_{p\to\infty} c_{n,p}\big) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \varphi(x_0)$.
$\overset{(x_p) \text{ beliebig}}{\Rightarrow}$ $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$. $\square$

9.20 Satz: Seien $f_n : \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$ stetig und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent auf D. Dann ist $f(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_n(x)$ stetig auf D.

Beweis: $\forall n \in \mathbb{N} : s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ ist stetig (endliche Summe stetiger Funktionen).
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent $\Leftrightarrow$ $\big(s_n(x)\big)$ gleichmäßig konvergent
9.19 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ ist stetig. $\square$

9.21 Beispiel: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \mathrm{e}^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist stetig:
Letzter Satz ist nicht direkt anwendbar, da die Reihe auf $\mathbb{C}$ nicht gleichmäßig konvergiert: Für $z = R > 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k!} \right| \overset{z=R}{\geq} \frac{R^n}{n!} \to \infty \text{ für } R \to \infty.$$

Betrachte $f\big|_{B_R(0)}$ für festes $R > 0$. Dann

- $\forall z \in B_R(0) : \left|\frac{z^k}{k!}\right| \leq \frac{R^k}{k!}$,

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$ ist konvergent $(= \mathrm{e}^R)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Weierstraß} \;\Rightarrow\; \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \text{ ist gleichmäßig konvergent auf } B_R(0). \\ \forall n \in \mathbb{N} : z \mapsto \dfrac{z^k}{k!} \text{ ist stetig.} \end{array}\right\} \overset{9.20}{\Rightarrow} f \text{ ist stetig auf } B_R(0).$$

Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$. Wähle $R > |z_0|$. $\Rightarrow$ $f\big|_{B_R(0)}$ ist stetig in z_0.
z_0 innerer Punkt von $B_R(0)$ $\Rightarrow$ f stetig in z_0.
$\Rightarrow$ $z \mapsto \mathrm{e}^z f$ ist stetig auf $\mathbb{C}$.

9.22 Satz: Sei $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f_n'(x) \to g(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $]a,b[$, und $\exists x_0 \in]a,b[: \big(f_n(x_0)\big)$ ist konvergent. Dann:

1) $\big(f_n(x)\big)$ konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$ und

2) $f :]a,b[\to \mathbb{R} : x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ist differenzierbar auf $]a,b[$, und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)'(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f'(x).$$

Beweis: 1) Vorüberlegung: Für $x \in]a,b[\setminus \{x_0\}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\exists \xi \in]a,b[: \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)}{x - x_0} = (f_n - f_m)'(\xi)$$

$$\text{bzw. } f_n(x) - f_m(x) - \big(f_n(x_0) - f_m(x_0)\big) = (x - x_0)\big(f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\big).$$

Die letzte Gleichung gilt auch für $x = x_0$ mit beliebigem $\xi \in]a,b[$.

2) Für $x \in]a,b[$ folgt

$$\begin{aligned} \big|f_n(x) - f_m(x)\big| &\le \big|f_n(x) - f_m(x) - \big(f_n(x_0) - f_m(x_0)\big)\big| + \big|f_n(x_0) - f_m(x_0)\big| \\ &= |x - x_0|\,\big|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\big| + \big|f_n(x_0) - f_m(x_0)\big| \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall m, n > N : \sup_{x \in]a,b[} \big|f_n'(x) - f_m'(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \;\wedge\; \big|f_n(x_0) - f_m(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Rightarrow \forall n, m > N \; \forall x \in]a,b[: \big|f_n(x) - f_m(x)\big| < |x - x_0| \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ $\big(f_n(x)\big)$ konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$. Setze $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

3) Sei $x \in \,]a,b[$ fest, (x_p) Folge in $]a,b[\,\setminus\{x\}$ mit $x_p \to x$.
Zeige $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{f(x_p)-f(x)}{x_p-x} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x'\to x} \dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$
Setze

$$c_{n,p} := \frac{f_n(x_p)-f_n(x)}{x_p-x}.$$

Dann gilt

$$c_{n,p} \to \frac{f(x_p)-f(x)}{x_p-x} \text{ für } n\to\infty \underbrace{\text{gleichmäßig}}_{\text{noch zu zeigen}} \text{ auf }]a,b[\,,$$

$$c_{n,p} \to f_n'(x) \text{ für } p\to\infty \text{ punktweise für } n\in\mathbb{N}.$$

$$9.16 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} \frac{f(x_p)-f(x)}{x_p-x} = \lim_{p\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} c_{n,p}\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{p\to\infty} c_{n,p}\big) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)$$

Die Folge (x_p) war beliebig und der Grenzwert $g(x)$ ist unabhängig von der Folge
$\Rightarrow$ f ist in x differenzierbar mit $f'(x) = g(x)$.

4) Zur gleichmäßigen Konvergenz von $c_{n,p}$:

$$\begin{aligned}
|c_{n,p} - c_{m,p}| &= \left|\frac{f_n(x_p)-f_n(x)}{x_p-x} - \frac{f_m(x_p)-f_m(x)}{x_p-x}\right| \\
&= \left|\frac{f_n(x_p)-f_m(x_p)-\big(f_n(x)-f_m(x)\big)}{x_p-x}\right| \\
&\underset{\text{Differentialrechnung}}{\overset{\text{Mittelwertsatz}}{=}} \left|f_n'(\xi_p)-f_m'(\xi_p)\right| \\
&\le \underbrace{\sup_{\xi\in\,]a,b[} \left|f_n'(\xi)-f_m'(\xi)\right|}_{\text{unabhängig von } p} \\
&< \varepsilon \text{ für } m,n > N_\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

9.23 Satz: Sei $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar. Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ in einem Punkt $x_0 \in \,]a,b[$, und konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k'(x)$ gleichmäßig auf $]a,b[$, dann:

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$ und

2) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ist differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n'(x) \quad \text{bzw.} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_n'(x).$$

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt für $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$:

- $\big(s_n(x_0)\big)$ ist konvergent,
- s_n ist differenzierbar und $\big(s_n'(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$.

Nach letztem Satz: $s_n(x) \to s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig auf $]a,b[$, s ist differenzierbar und

$$s'(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_n'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n'(x).$$

□

9.4 Potenzreihen

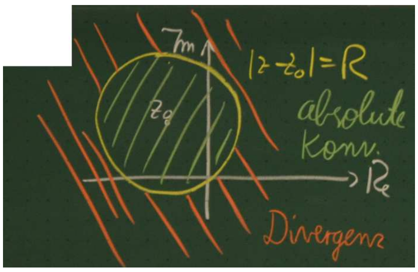
9.24 Definition: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und (a_n) eine komplexe Folge. Dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ **Potenzreihe um z_0** mit den **Koeffizienten** a_n.
Falls $z_0 \in \mathbb{R}$, (a_n) reelle Folge und nur $z \in \mathbb{R}$ betrachtet werden, heißt die Potenzreihe **reell**.

9.25 Satz: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ gegeben.

1) Es gibt eine eindeutig bestimmte Größe $R \in [0,\infty[\,\cup\{\infty\}$, so dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{falls } |z-z_0| < R, \\ \text{divergent} & \text{falls } |z-z_0| > R. \end{cases}$$

(Für $|z-z_0| = R$ kann alles passieren.) R heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.



2) Formel von Cauchy-Hadamard: Es gilt

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}},$$

wobei im Fall $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ $R = \infty$ und im Fall $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty$ $R = 0$ zu setzen ist.

Beweis: Wende das Wurzelkriterium an:

1) Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < \infty$: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n(z-z_0)^n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z-z_0|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{absolute Konvergenz} & \text{falls } |z-z_0| \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1 \\ \text{Divergenz} & \text{falls } |z-z_0| \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 1 \end{cases}$$

2) Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty$: Für $z \neq z_0$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n(z-z_0)^n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z-z_0| = \infty$$

$\Rightarrow$ Divergenz für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

$\square$

9.26 Bemerkung: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert $\Rightarrow$ $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ (siehe 8.20).

2) Sei $z_1 \in \mathbb{C}$, so dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z_1-z_0)^k$ konvergiert

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R \geq |z_1 - z_0|$

$\Rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < |z_1 - z_0| \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ ist absolut konvergent.

Sei $z_1 \in \mathbb{C}$, so dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z_1-z_0)^k$ divergiert

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R \leq |z_1 - z_0|$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ divergiert für $|z-z_0| > |z_1 - z_0|$.

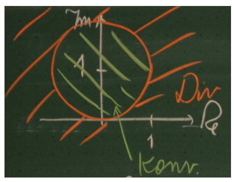
9.27 Beispiele: 1) $\sum \frac{z^k}{k!}$: $a_n = \frac{1}{n!}$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0$ $\Rightarrow$ $R = \infty$.

2) $\sum k^2\,(z-\mathrm{i})^k$: $a_n = n^2$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$ $\Rightarrow$ $R = 1$.

$\Rightarrow$ absolute Konvergenz für $|z-\mathrm{i}| < 1$, Divergenz für $|z-\mathrm{i}| > 1$.

$|z-\mathrm{i}| = 1 \Rightarrow |n^2(z-\mathrm{i})^n| = n^2 \to \infty$

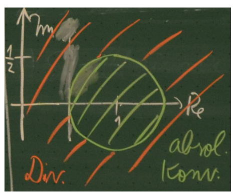
$\overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Rightarrow}$ Divergenz für $|z-\mathrm{i}| = 1$.



3) $\sum \frac{2^k}{k^2}(z-1)^k$: $a_n = \frac{2^n}{n^2}$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2}2 \to 2$ $\Rightarrow$ $R = \frac{1}{2}$.

$|z-1| = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{2^n}{n^2}\,(z-1)^n\right| = \frac{1}{n^2}$ $\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}$ absolute Konvergenz.

$\Rightarrow$ absolute Konvergenz für $|z-1| \leq \frac{1}{2}$, Divergenz für $|z-1| > \frac{1}{2}$.



4) $\sum \left(3+(-1)^k\right)^k z^k$: $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 2, & n \text{ ungerade} \\ 4, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{1}{4}.$

$|z| = \dfrac{1}{4}$: $|(3+(-1)^n)^n \, z^n| = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \text{ ungerade,} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases} \overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Rightarrow}$ Divergenz.

Also: Absolute Konvergenz für $|z| < \dfrac{1}{4}$, Divergenz für $|z| \geq \dfrac{1}{4}$.

9.28 Satz: Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \, (z-z_0)^k$ gegeben mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann

$$\forall r \in \,]0, R[\, : \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (z-z_0)^k \text{ ist gleichmäßig konvergent auf } B_r(z_0).$$

Beweis: Beachte: Wähle z_1 mit $|z_1 - z_0| = r \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \, (z_1 - z_0)^k$ ist absolut konvergent

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| \, r^k$ ist konvergent.

Für $z \in B_r(z_0)$ gilt $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n (z-z_0)^n| < |a_n| \, r^n$.

$\overset{\text{Weierstraß-Kriterium}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \, (z-z_0)^k$ ist gleichmäßig konvergent auf $B_r(z_0)$.

□

9.29 Satz: Sei $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \, (z-z_0)^k$ gegeben mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f stetig (auf ganz $B_R(z_0)$).

Beweis: Sei $z_1 \in B_R(z_0)$. Wähle $r \in \,]0, R[$, so dass $z_1 \in B_r(z_0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \, (z-z_0)^k \text{ gleichmäßig konvergent auf } B_r(z_0) \\ \forall n \in \mathbb{N} : z \mapsto a_n \, z^n \text{ ist stetig} \end{array} \right\} \Rightarrow \; f\big|_{B_r(z_0)} \text{ ist stetig.}$$

z_1 innerer Punkt von $B_r(z_0)$ und $B_r(z_0) \subseteq B_R(z_0) \;\Rightarrow\; f$ ist stetig in z_1.

□

9.30 Identitätssatz: Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$, $z \in B_R(z_0)$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(z-z_0)^k$, $z \in B_{R'}(z_0)$ mit $R, R' > 0$. Existiert eine Folge (z_n) mit

$$z_n \to z_0, \ \wedge \ \forall n \in \mathbb{N} : z_n \neq z_0 \ \wedge \ f(z_n) = g(z_n),$$

so folgt $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = b_n$ bzw. $f = g$.

Insbesondere: Jede Funktion ist auf höchstens eine Weise als Potenzreihe um z_0 darstellbar.

Beweis: O.B.d.A. $z_0 = 0$.
Setze $h(z) := f(z) - g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) z^k$ für $z \in B_{R''}(0)$ mit $R'' := \min\{R, R'\} > 0$.
$\Rightarrow$ h ist stetig und $\forall n \in \mathbb{N} : h(z_n) = 0$.
Zeige $a_m = b_m$ durch Induktion nach m:
Induktionsanfang $m = 0$: $a_0 - b_0 = h(0) = \lim_{n\to\infty} h(z_n) = 0$.
Induktionsschritt: Es sei $a_0 = b_0, \ldots, a_m = b_m$ bereits bewiesen (Induktionsvoraussetzung).
Zeige $a_{m+1} = b_{m+1}$.

$$h(z) \stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} \sum_{k=m+1}^{\infty} (a_k - b_k) z^k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h(z)}{z^{m+1}} = \sum_{k=m+1}^{\infty} (a_k - b_k) z^{k-m-1} \text{ ist stetig auf } B_{R''}(0), \text{ da Potenzreihe.}$$

$$\Rightarrow \quad a_{m+1} - b_{m+1} = \left.\frac{h(z)}{z^{m+1}}\right|_{z=0} = \lim_{n\to\infty} \frac{h(z_n)}{z_n^{m+1}} = 0.$$

□

9.31 Multiplikation: Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k \text{ für } z \in B_R(z_0), \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(z-z_0)^k \text{ für } z \in B_{R'}(z_0),$$

$R, R' > 0$. Dann gilt wenigstens für $z \in B_{R''}(z_0)$ mit $R'' := \min\{R, R'\}$:

$$f(z) \cdot g(z) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j} \right) (z-z_0)^k.$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius der letzten Reihe mindestens R''.

Beweis: $f(z), g(z)$ sind absolut konvergent für $|z - z_0| < R''$. Cauchy-Produkt

$$8.28 \Rightarrow \ f(z)\,g(z) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j\,(z-z_0)^j\, b_{k-j}\,(z-z_0)^{k-j} \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \sum_{j=0}^{k} a_j\ b_{k-j}\,.$$

□

9.5 Reelle Potenzreihen

9.32 Bemerkung: Reelle Potenzreihen sind komplexe Potenzreihen (mit reellen Koeffizienten), deren Definitionsbereich auf $\mathbb{R}$ eingeschränkt ist. Der Konvergenzkreis wird zu einem Konvergenzintervall: Mit $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k \text{ ist auf } \begin{cases}]x_0-R, x_0+R[& \text{absolut konvergent,} \\ ]-\infty, x_0-R[\,\cup\,]x_0+R,\infty[& \text{divergent.} \end{cases}$$

Die Sätze des letzten Abschnittes gelten entsprechend. Z.B.

$$r \in]0,R[\;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k \text{ ist gleichmäßig konvergent auf }]x_0-r, x_0+r[\,.$$

9.33 Satz: Sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ für $x \in]x_0-R, x_0+R[$ mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1}$ hat denselben Konvergenzradius R.

2) f ist differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1} \text{ für } x \in]x_0-R, x_0+R[\,.$$

3) f ist beliebig oft differenzierbar (auf $]x_0-R, x_0+R[$).

Beweis: **1)** $\limsup\limits_{n\to\infty} |n\,a_n|^{1/n} = \limsup\limits_{n\to\infty} n^{1/n}\,|a_n|^{1/n} = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ und

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\,a_k(x-x_0)^{k-1}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\,a_k(x-x_0)^{k}$ konvergiert.

2) Zu $x \in]x_0-R, x_0+R[$ wähle $r \in]0,R[$ mit $x \in I_r :=]x_0-r, x_0+r[\,$.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1}$ sind gleichmäßig beide konvergent auf I_r.

$$\Rightarrow\; f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k\right)' \overset{9.23}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k\,(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1} \text{ auf } I_r.$$

3) Wende 2) iterativ an (vollständige Induktion). □

9.34 Beispiel: Für $-1 < x < 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^k \;=\; x\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^{k-1} \;\overset{9.33}{=}\; x\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' \;=\; x\left(\frac{1}{1-x}\right)' \;=\; x\,\frac{1}{(1-x)^2}.$$

9.35 Bemerkung: Satz 9.33 gilt auch für komplexe Ableitung komplexer Potenzreihen (später).

9.36 Satz: Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ für $x \in\,]x_0 - R, x_0 + R[\,,\ R > 0$. Dann:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k.$$

D.h.: Die Potenzreihe stimmt mit der Taylorreihe überein. Insbesondere konvergiert die Taylorreihe auf $]x_0 - R, x_0 + R[$ gegen f.

Beweis:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1}\\
f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,a_k\,(x-x_0)^{k-2}\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\,a_k\,\underbrace{(x-x_0)^{k-n}}_{=0 \text{ für } x = x_0 \text{ und } k > n}\\
\Rightarrow\ f^{(n)}(x_0) &= n(n-1)\cdots(n-n+1)\,a_n \;=\; n!\,a_n.
\end{aligned}$$

$\square$

9.37 Abelscher Grenzwertsatz: Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k$ für $-1 < x < 1$ $(R = 1)$. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to 1}\left(a_k\,x^k\right).$$

Beweis: **1)** Spezielle Darstellung von f:

Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k,\ s_{-1} := 0 \ \Rightarrow\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : a_k = s_k - s_{k-1}$.

Für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n}(s_k - s_{k-1})x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} s_k\,x^k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k\,x^{k+1} \;=\; (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} s_k\,x^k + \underbrace{s_n\,x^n}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}.$$

$$\Rightarrow\ f(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k\,x^k.$$

2) Spezielle Darstellung von $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$:

$$s = s(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{für } |x| < 1.$$

3) Eigentlicher Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Zeige: $\exists \delta > 0\ \forall x \in\,]1-\delta, 1[\, : \big|f(x) - s\big| < \varepsilon$.
Wähle $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N_\varepsilon : |s_n - s| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Für $0 \leq x < 1$ gilt

$$\begin{aligned}
|f(x) - s| &= \left|(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k\, x^k - s(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right| \\
&\leq (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} |s_k - s|\, x^k \\
&= (1-x)\sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s|\, \underbrace{x^k}_{\leq 1} + (1-x)\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \underbrace{|s_k - s|}_{<\varepsilon/2}\, x^k \\
&< (1-x)\sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s| + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^k.
\end{aligned}$$

Wähle $\delta := \dfrac{\varepsilon}{2\sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s|}$. Für $x \in\,]1-\delta, 1[$ folgt

$$|f(x) - s| < \delta \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

9.38 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{x\to 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k = \lim_{x \to 1-0} \ln(1+x) = \ln 2.$

9.39 Satz: Sind $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und das Cauchy-Produkt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}$ konvergent, so gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}.$$

Beweis: Setze

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k, \quad g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k, \quad h(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}\right) x^k.$$

9.26, 2) $\Rightarrow$ Alle drei Potenzreihen haben Konvergenzradius $R \geq 1$
9.31 $\Rightarrow$ $f(x) \cdot g(x) = h(x)$ für $-1 < x < 1$.
Mit dem Abelschen Grenzwertsatz folgt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \lim_{x\to 1} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x \to 1} h(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}.$$

$\square$

9.40 Ausblick: Summierung divergenter Reihen: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gegeben, $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ habe Konvergenzradius $R = 1$, und es existiere $\lim_{x\to 1} f(x)$. Dann kann man

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \;:=\; \lim_{x\to 1} f(x)$$

setzen, auch wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert. Der Abelsche Grenzwertsatz garantiert, dass für konvergente Reihen derselbe Wert wie beim normalen Grenzwert herauskommt.

Z.B.: $\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k \overset{\text{geom.Reihe}}{=} \frac{1}{1+x} \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k := \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$

$\sum_{k=0}^{\infty} k\,(-x)^k \overset{9.34}{=} \frac{-x}{(1+x)^2} \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} k\,(-1)^k := \lim_{x\to 1}\frac{-x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{4}$

9.6 Spezielle Funktionen

9.41 Definition:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z &:= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} && \text{für } z\in\mathbb{C},\\
\sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,z^{2k+1} && \text{für } z\in\mathbb{C},\\
\cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,z^{2k} && \text{für } z\in\mathbb{C}.
\end{aligned}$$

9.42 Bemerkung: Alle drei Potenzreihen haben Konvergenzradius $R = \infty$.
Z.B. für die Sinus-Reihe: Betrachte $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}w^k$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \left|\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\right| \;=\; \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \;\to\; 0.$$

$\Rightarrow\; R = \infty$, Konvergenz für alle $w\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow\; \sin z = z\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}w^k\right]_{w=z^2}$ ist konvergent für alle $z\in\mathbb{C}$, also $R=\infty$

9.43 Eigenschaften: **1)** Alle drei Funktionen sind stetig auf $\mathbb{C}$ (siehe 9.29).

2) Für $z = x\in\mathbb{R}$ stimmen die Reihen mit den reellen Taylorreihen überein.

3) $\forall z,w\in\mathbb{C} : \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\cdot\mathrm{e}^w$, insbesondere gilt $\mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^z}$ (vgl. 8.30).

4) $\forall z\in\mathbb{C} : \sin(-z) = -\sin z \;\wedge\; \cos(-z) = \cos z$.

5) $\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$ (Eulersche Formel), denn

$$\cos z + \mathrm{i}\sin z \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \underbrace{(-1)^k z^{2k}}_{=(\mathrm{i}z)^{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \underbrace{\mathrm{i}(-1)^k z^{2k+1}}_{=(\mathrm{i}z)^{2k+1}} \;=\; \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^k}{k!} \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}z},$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}}{2} = \cos z, \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}}{2\mathrm{i}} = \sin z.$$

Insbesondere gilt die Formel von Moivre:

$$(\cos z + \mathrm{i}\sin z)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nz} = \cos(nz) + \mathrm{i}\sin(nz) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

6) $\forall z \in \mathbb{C} : \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$

$$\sin^2 z + \cos^2 z \;=\; \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)^2 \;=\; \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{-4} + \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{4} \;=\; 1.$$

7) Additionstheoreme: $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2,$
$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$

$$\begin{aligned}
\cos z_1 \cdot \cos z_2 &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1-z_2)} + \mathrm{e}^{(z_2-z_1)}}{4} \\
\sin z_1 \cdot \sin z_2 &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1-z_2)} - \mathrm{e}^{(z_2-z_1)}}{4}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2).$$

8) Aus $\sin(x + 2\pi) = \sin x,\ \cos(x + 2\pi) = \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt:

a) $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi) = \cos(0) + \mathrm{i}\sin(0) = 1,$

b) $\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$: Die Exponentialfunktion hat die Periode $2\pi\mathrm{i}$.

c) $\forall z \in \mathbb{C} : \sin(z + 2\pi) = \sin z \ \wedge\ \cos(z + 2\pi) = \cos z$:
Additionstheoreme: $\sin(z + 2\pi\mathrm{i}) = \sin z \cdot \cos(2\pi) + \cos z \cdot \sin(2\pi) = \sin z$

9) Warnung: $\sin(z), \cos(z)$ sind nicht beschränkt: $\sin(\mathrm{i}x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\underbrace{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}_{\to-\infty \text{ für } x\to\infty}\big).$

Inhaltsverzeichnis