Lösungsvorschlag zur Kurzklausur 1

Im Folgenden finden Sie Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der Kurzklausur 1 vom 31.10.2014. Am rechten Rand sind die Teilpunkte, welche für die jeweiligen Lösungsschritte vorgesehen sind rot gekennzeichnet. Grau sind Teilpunkte für alternative Lösungsschritte.

Aufgabe 1.1. (3 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die

(a) injektiv aber nicht surjektiv ist,

(b) surjektiv aber nicht injektiv ist,

(c) bijektiv aber nicht die Identität auf $\mathbb{N}$ ist.

Lösungsvorschlag:
Es genügt Beispiele anzugeben, welche das geforderte Kriterium offensichtlich erfüllen:

(a) Wir setzen

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \;\; n \mapsto n + 1.$$ 1

Da aus $n + 1 = m + 1$ auch $n = m$ folgt, ist f injektiv, wegen $1 \notin f(\mathbb{N})$ ist f nicht surjektiv.

(b) Wir setzen

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \;\; n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } n = 1 \\ n - 1 & \text{für } n \neq 1. \end{cases}$$ 1

Für ein gegebenes $m \in \mathbb{N}$ bemerken wir, dass $f(m + 1) = m + 1 - 1 = m \in f(\mathbb{N})$. Damit ist f surjektiv. Wegen $f(1) = f(2) = 1$ ist f nicht injektiv.

(c) Wir setzen

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \;\; n \mapsto \begin{cases} 2, & \text{für } n = 1 \\ 1, & \text{für } n = 2 \\ n & \text{für } n \neq 1, 2. \end{cases}$$ 1

f gleicht also der Identität mit Ausnahme der Zuordnungen $1 \mapsto 2$ und $2 \mapsto 1$ (hier werden die Bilder nur vertauscht). Damit ist f bijektiv, unterscheidet sich aber von der Identität.

Aufgabe 1.2. (2 Punkte)

Sei $q \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \begin{cases} n & \textbf{falls } q = 1, \\ \dfrac{1-q^n}{1-q} & \textbf{falls } q \neq 1. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag:
Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Sei $q = 1$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}} = n.$$ 0,5

nach Definition von n.

Fall 2: Sei $q \neq 1$. Wir führen den Beweis in diesem Fall durch vollständige Induktion. Für den *Induktionsanfang* bemerken wir, dass

$$\left.\sum_{k=0}^{n-1} q^k\right|_{n=1} = \sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \left.\frac{1-q^n}{1-q}\right|_{n=1}$$ 0,5

erfüllt ist. Angenommen es gilt nun

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ (*Induktionsvoraussetzung*) so folgt (*Induktionsschluss*)

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \overset{\text{(IV.)}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n = \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{q^n - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$ 0,5

Beim Induktionsschluss ist zu vermerken an welcher Stelle die Induktionsvoraussetzung eingeht. 0,5

Alternativ kann man auch die Eigenschaft einer Teleskopsumme ausnutzen. Es ist

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} q^k - \sum_{k=0}^{n-2} q^{k+1} + q^n \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} q^k - \sum_{k=1}^{n-1} q^k + q^n \\ &= 1 + q^n\end{aligned}$$ 1,5

und die Aussage folgt nach Division durch $1 - q$ auf beiden Seiten.