Lösungsvorschlag zur Kurzklausur 2

Im Folgenden finden Sie Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der Kurzklausur 2 vom 21.11.2014. Am rechten Rand sind die Teilpunkte, welche für die jeweiligen Lösungsschritte vorgesehen sind rot gekennzeichnet. Grau sind Teilpunkte für alternative Lösungsschritte.

Aufgabe 2.1. (3 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer Cauchyfolge in einem geordneten Körper an.

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Zeigen Sie, dass dann auch

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Nachfolgend finden Sie die Definition einer Cauchyfolge wie in der Vorlesung angegeben:
Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ ein geordneter Körper. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt Cauchyfolge, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m > N_\varepsilon :\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$ 1

(b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, finden wir ein $N_\varepsilon^{(a)} \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2$$

für alle $n, m > N_\varepsilon^{(a)}$ gilt. Genauso finden wir ein $N_\varepsilon^{(b)} \in \mathbb{N}$ sodass

$$|b_n - b_m| < \varepsilon/2$$

für alle $n, m > N_\varepsilon^{(b)}$ erfüllt ist. Setzen wir nun

$$N_\varepsilon := \max\{N_\varepsilon^{(a)}, N_\varepsilon^{(b)}\},$$ 1

so gilt für alle $n, m > N_\varepsilon$, dass

$$\begin{aligned}|a_n + b_n - (a_m + b_m)| = |a_n - a_m + b_n - b_m| &\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a_m| + |b_n - b_m| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$ 1

D.h. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls eine Cauchyfolge.

Aufgabe 2.2. (2 Punkte)

Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{1}$$

Berechnen Sie allein unter Verwendung dieses Grenzwertes und der Grenzwertsätze den Grenzwert der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n := \frac{n}{2 + n^2}.$$

Geben Sie dabei in jedem Schritt an welchen der Sätze Sie gerade verwenden.

Man beachte zu dieser Aufgabe auch die Hinweise:

Hinweise zu Aufgabe 2.2.

Folgende Grenzwertsätze sowie ihre Bezeichnungen können bei der Bearbeitung von Aufgabe 2.2. verwendet werden:

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Dann konvergieren auch $(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b. \tag{3}$$

Ist zusätzlich $b \neq 0$, so konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n := \begin{cases} \frac{a_n}{b_n}, & \textbf{falls } b_n \neq 0 \\ 0, & \textbf{falls } b_n = 0 \end{cases}$$

gegen den Grenzwert a/b, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{a}{b}. \tag{4}$$

Lösungsvorschlag:
Es werden nur dann Punkte vergeben, wenn explizit angegeben wurde welchen der Grenzwertsätze man im jeweiligen Teilschritt verwendet hat.
Wir formen die gegebene Folge um indem wir im Zähler und Nenner ein n^2 kürzen, es ist

$$c_n = \frac{n}{2+n^2} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun können wir mit Hilfe von (1) und der Grenzwertsätze den Grenzwert schrittweise berechnen:
Mit Hilfe von (1) und (3) erhalten wir zunächst

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) \overset{(3)}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \overset{(1)}{=} 0 \cdot 0 = 0. \tag{5}$$ 0,5

Damit folgt aus (2), dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \overset{(5)}{=} 0 + 0 = 0. \tag{6}$$ 0,5

Daraus lässt sich wiederum der Grenzwert des Zählers berechnen, es ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^2} + 1\right) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + 1 \overset{(6)}{=} 0 + 1 = 1. \tag{7}$$ 0,5

Dieser Grenzwert ist nicht Null, d.h. wir können (4) verwenden um letztendlich den Grenzwert von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}+1} \overset{(4)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^2}+1\right)} \overset{(1),(7)}{=} \frac{0}{1} = 0.$$ 0,5

Alternativ kann man bei (6) auch die Aussage (3) verwenden, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} \overset{(3)}{=} 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \overset{(5)}{=} 2 \cdot 0 = 0.$$ 0,5