Lösungsvorschlag zur Kurzklausur 3

Im Folgenden finden Sie Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der Kurzklausur 3 vom 16.01.2015. Am rechten Rand sind die Teilpunkte, welche für die jeweiligen Lösungsschritte vorgesehen sind rot gekennzeichnet. Grau sind Teilpunkte für alternative Lösungsschritte.

Aufgabe 3.1. (3 Punkte)

(a) Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume und $f : D(f) \to M_2$ mit $D(f) \subseteq M_1$. Geben Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit von f in $x_0 \in D(f)$ an.

(b) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto |x|.$$

Zeigen Sie, dass f in allen $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Nachfolgend finden Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit einer Funktion f in einem Punkt x_0 auf einem metrischen Raum wie in der Vorlesung angegeben:

Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume und $f : D(f) \to M_2$ mit $D(f) \subseteq M_1$. Für $x_0 \in D(f)$ heißt f stetig in x_0, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_{\varepsilon,x_0}\, \forall\, x \in D(f) \;:\; d_1(x, x_0) < \delta_{\varepsilon,x_0} \;\Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$ 1

(b) Auf $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Metrik ist für ein gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}$ zu zeigen, dass

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_{\varepsilon,x_0}\, \forall\, x \in D(f) \;:\; |x - x_0| < \delta_{\varepsilon,x_0} \;\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wählen wir für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ einfach $\delta_{\varepsilon,x_0} = \varepsilon$, so erhalten wir aus der umgekehrten Dreiecksungleichung, dass 1

$$|f(x) - f(x_0)| = \big|\, |x| - |x_0| \,\big| \le |x - x_0| < \varepsilon$$ 1

für alle $x \in D(f)$ mit $|x - x_0| < \varepsilon = \delta_{\varepsilon,x_0}$.

Aufgabe 3.2. (2 Punkte)

Wo ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \textbf{für } x = 0, \\ x & \textbf{für } x \le 1 \wedge x \ne 0, \\ \mathrm{e}^{1-x} & \textbf{für } 1 < x \le 2, \\ x^2 - 4x + 4 & \textbf{für } x > 2. \end{cases}$$

stetig, bzw. nicht stetig?
Die bloße Angabe aller entsprechender Puntktmengen ist hier ausreichend.

Lösungsvorschlag:
Eine Begründung der getroffenen Aussagen ist zwar nicht verlangt, soll im Folgenden aber trotzdem gegeben werden.
Es sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

- Für alle $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ ist $f(x) = x$, d.h. f entspricht auf $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ der identischen Abbildung. Diese ist aber laut Vorlesung stetig, d.h. f ist in allen diesen Punkten stetig. 0,5

- Wir betrachten die Stetigkeit in $x = 0$. Wir wählen wir eine beliebige Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (z.B. $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$). Ist der Folgenindex n hinreichend groß, so gilt $x_n < 1$ und $f(x_n) = x_n$. D.h.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \neq 1 = f(0)$$

  und f ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig.

- Als Summe stetiger Funktionen ist die Funktion $x \mapsto 1 - x$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Damit ist die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{1-x}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig als Verkettung zweier stetiger Funktionen. D.h. f ist stetig in allen $x \in]1, 2[$. 0,5

- Wir betrachten die Stetigkeit in $x = 1$. Die Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto \mathrm{e}^{1-x}$ sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$, d.h. insbesondere auch im Punkt $x = 1$. Desweiteren nehmen, wegen $\mathrm{e}^{1-1} = 1$, beide Funktionen an dieser Stelle den gleichen wert 1 an. Daraus sieht man leicht, dass auch f bei $x = 1$ stetig ist. 0,5

- Als Summe von Produkten der Identität bzw. der konstanten Funktion ist auch die Funktion $x \mapsto x^2 - 4x + 4$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$. D.h. f ist stetig in allen $x \in]2, \infty[$. 0,5

- Wir betrachten die Stetigkeit in $x = 2$ und wählen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche monoton fallend gegen 2 konvergiert (z.B. $(2 + 1/n)_{n\in\mathbb{N}}$). Dann ist $f(x_n) = x_n^2 - 4x_n + 4$ und wir erhalten mit Hilfe der Grenzwertsätze, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 - 4x_n + 4 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0 \neq 1 = f(2).$$

  D.h. f ist nicht stetig in $x = 2$.

Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass f in allen Punkten

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

stetig ist. Dies erkennt man auch leicht, wenn man sich die Funktion kurz skizziert: