Prüfungsklausur — Analysis I (WS 2014/15)

Termin:	*02.04.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen. Verwendete Sätze sind zu benennen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

Aufgabe 1. (7 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ durch

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{xy}$$

eine Metrik definiert ist.
Hinweis: Für $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ gilt $d(x,y) = \frac{|xz-yz|}{xyz}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge der natürlichen Zahlen, $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}_+, d)$ ist, und dass sie in $(\mathbb{R}_+, d)$ nicht konvergiert.

(c) Ist $(\mathbb{R}_+, d)$ vollständig?

Lösung 1.

(a) Wegen $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt $xy \neq 0$: Somit ist $d(x,y)$ wohldefiniert.
Positivitt und Definitheit: Wegen $x, y \in \mathbb{R}_+$ ist $d(x,y) = |x-y|/(xy) \geq 0$, zudem ist

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{xy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x-y| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$ 1

Die Symmetrie folgt mit 0,5

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{xy} = \frac{|y-x|}{yx} = d(y,x).$$ 0,5

Es bleibt also nur die Dreiecksungleichung zu zeigen. Seien dazu $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, dann folgt 0,5

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \frac{|x-y|}{xy} = \frac{|xz-yz|}{xyz} = \frac{|xz-xy+xy-yz|}{xyz} \\ &\leq \frac{x|z-y| + y|x-z|}{xyz} = \frac{|z-y|}{yz} + \frac{|x-z|}{xz} = d(z,y) + d(x,z). \end{aligned}$$ 1,5

(b) Der Übersicht halber wählen wir für die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Symbol $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. es ist $c_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es soll gezeigt werden, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}_+, d)$ ist, d.h.

$$d(c_n, c_m) < \varepsilon$$

für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ und $n, m \geq N_\varepsilon$ ist.
Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben, dann wählen wir $N_\varepsilon = \lceil 2/\varepsilon \rceil$. Sind $m, n \geq N_\varepsilon$, so erhalten wir, dass

$$d(c_n, c_m) = \frac{|n-m|}{nm} \leq \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$ 1

Es bleibt zu zeigen, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert. Sei $c \in \mathbb{R}_+$, so erhalten wir, dass

$$d(c, c_n) = \frac{|c-n|}{c \cdot n} = \frac{\left|\frac{c}{n} - 1\right|}{c} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{c}.$$ 1

D.h. der Abstand $d(c, c_n)$ kann nie gegen Null konvergieren, kein $c \in \mathbb{R}_+$ kann also jemals der Grenzwert von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein.

(c) Diese Frage ist mit Hilfe der Aussagen aus Teilaufgabe **(b)** einfach zu beantworten: Wir haben eine nicht konvergente Cauchyfolge gefunden, d.h. $(\mathbb{R}_+, d)$ ist nicht vollständig. 1

Aufgabe 2. (5 Punkte)

(a) Geben Sie den *Nullstellensatz* an.

(b) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften, dass $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $\forall \xi \in]0,1[: f(\xi) \neq \xi$ gilt. Beweisen Sie, dass daraus folgt:

$$\big(\forall \xi \in]0,1[: f(\xi) > \xi\big) \ \vee \ \big(\forall \xi \in]0,1[: f(\xi) < \xi\big).$$

(c) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften, dass $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und

$$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}} = \mathrm{id}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Hierbei bezeichnen id die identische Abbildung auf $[0,1]$ und $\circ$ die Verkettung von Funktionen.
Zeigen Sie, dass es mindestens ein $\xi \in]0,1[$ mit der Eigenschaft $f(\xi) = \xi$ gibt.

Lösung 2.

(a) Wir formulieren den Nullstellensatz wie im Vorlesungsskript:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann existiert mindestens ein $x \in]a,b[$ mit $f(x) = 0$. 1

(b) Annahme: $\big(\exists \xi_1 \in]0,1[: f(\xi_1) \leq \xi_1\big) \ \wedge \ \big(\exists \xi_2 \in]0,1[: f(\xi_2) \geq \xi_2\big)$. 1
Falls $f(\xi_1) = \xi_1$ oder $f(\xi_2) = \xi_2$ widerspricht dies der Voraussetzung.
Falls $f(\xi_1) > \xi_1 \ \wedge \ f(\xi_2) < \xi_2$ liefert Anwendung des Nullstellensatzes auf $g(x) := f(x) - x$ im Intervall $[\xi_1, \xi_2]$ bzw. $[\xi_2, \xi_1]$ die Existenz mindestens eines $x \in]\xi_1, \xi_2[\cup]\xi_2, \xi_1[$ mit $g(x) = 0$.
Daraus folgt $f(x) = x$ im Widerspruch zu Voraussetzung. 1

(c) Wir nehmen das Gegenteil der Aussage an und konstruieren einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass $f^n = \mathrm{id}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Annahme: $\forall \xi \in]0,1[: f(\xi) \neq \xi$. Nach Aufgabenteil **(b)** folgt dann: Entweder es gilt $f(x) < x$ für alle $x \in]0,1[$, oder es gilt $f(x) > x$ für alle $x \in]0,1[$. 1
Dann ist im ersten Fall auch $f^2(x) = f(f(x)) \leq f(x) < x$ (falls $f(x) = 0$ gilt $f^2(x) = 0$). und iterativ

$$f^n(x) \leq f^{n-1}(x) \leq \cdots \leq f(x) < x, \ \text{also } f^n(x) < x.$$ 1

Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $f^n(x) = x$ gilt. Im Fall $f(x) > x$ für alle $x \in]0,1[$ folgt analog $f^n(x) > x$ und damit ein Widerspruch.

Aufgabe 3. (7 Punkte)

Eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f^{(n+2)} = f^{(n)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f bezeichnet.

(a) Geben Sie das Taylorpolynom $T_n(0, x)$ von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an. Stellen Sie auch das (Lagrange-) Restglied $R_n(0, x)$ für die Funktion f auf.

(b) Sei $a > 0$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass $T_n(0, x)$ für $n \to \infty$ für jedes $x \in [-a, a]$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Lösung 3.

(a) Wir bemerken zunächst, dass die n-te Ableitung von f im Punkt 0 durch

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade}, \\ 0 & n \text{ gerade}. \end{cases}$$ 1

gegeben ist.
Beweis dieser Behauptung: Wegen $f^{(n+2)} = f^{(n)}$ ist auch $f^{(n+2)}(0) = f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ 1
und die Aussage kann induktiv bewiesen werden. Den Induktionsanfang bilden dann die beiden Voraussetzungen $f^{(0)} = f(0) = 0$ und $f^{(1)}(0) = f'(0) = 1$, der Induktionsschritt $n \to n + 2$ ist dann

$$f^{(n+2)}(0) = f^{(n)}(0) \overset{\text{I.V.}}{=} \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade}, \\ 0 & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Mit dieser Hilfe ist das Taylorpolynom gegeben durch

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \overset{l=2k+1}{=} \sum_{l=0}^{n} \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}.$$ 0,5

Wegen $f^{(2n)}(0) = 0$ gilt $T_{2n}(0, x) = T_{2n-1}(0, x)$. 0,5
Das (Lagrange-) Restglied ist durch

$$R_{2n}(0, x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n} = \frac{f'(\xi)}{(2n)!} x^{2n}$$ 1

$$R_{2n+1}(0, x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+1} = \frac{f(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+1}$$ 1

gegeben.

(b) Wir zeigen, dass das Restglied aus Teilaufgabe **(a)** für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Dazu bemerken wir, dass das Intervall $[-a, a]$ kompakt ist und die stetigen Funktionen $|f|, |f'|$ ihr Maximum auf $[-a, a]$ annehmen. Damit folgt

$$|R_{2n}(0, x)| \leq \underbrace{\max\{|f'(x)| : -a \leq x \leq a\}}_{\text{konstant}} \cdot \frac{a^{2n}}{(2n+1)!} \to 0$$ 1

$$|R_{2n+1}(0, x)| \leq \underbrace{\max\{|f(x)| : -a \leq x \leq a\}}_{\text{konstant}} \cdot \frac{a^{2n+1}}{(2n+2)!} \to 0$$ 1

Nach Übungen gilt $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Folge von Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{n^2 x}{1 + n^4 x^4}.$$

(a) Geben Sie die Art und Lage aller Extrema von f_n für beliebiges aber fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ an.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Funktionenfolge für $n \to \infty$? Geben Sie die Grenzfunktion an. Untersuchen Sie ob f_n für $n \to \infty$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Lösung 4.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Notwendig für die Existenz eines (lokalen) Extremums ist das Verschwinden der ersten Ableitung. Wir bilden daher

$$f_n'(x) = \frac{n^2(1 + n^4x^4) - 4n^6x^4}{(1 + n^4x^4)^2} = \frac{n^2 - 3n^6x^4}{(1 + n^4x^4)^2}.$$ 1

Die Berechnng erfolgte dabei mit Hilfe der Quotientenregel. Da $1 + n^4x^4 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist

$$f_n'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 3n^6x^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = \frac{1}{3n^4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3} \cdot n}.$$ 1

Wir erhalten also zwei kritische Punkte, $x_1 = -1/(\sqrt[4]{3}n)$ und $x_2 = 1/(\sqrt[4]{3}n)$. Für die Art der Extrema untersuchen wir den *Vorzeichenwechsel* in der ersten Ableitung in den kritischen Punkten. Anhand des Terms $n^2 - 3n^6x^4$ (der Nenner ist strikt positiv, vgl. obige Anmerkung) in f_n' sehen wir, dass

$$\begin{aligned} f_n'(x) &< 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| > 1/(\sqrt[4]{3}n), \\ f_n'(x) &> 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < 1/(\sqrt[4]{3}n). \end{aligned}$$ 1

Damit hat f_n' in x_1 einen Vorzeichenwechsel "von $-$ nach $+$" und in x_2 "von $+$ nach $-$". In $(x_1, f_n(x_1))$ erhalten wir somit ein lokales Minimum, in $(x_2, f_n(x_2))$ ein lokales Maximum. Für die genaue Lage der Extrema haben wir noch

$$f_n(x_1) = f_n(x_2) = \frac{3n}{4 \cdot \sqrt[4]{3}}$$ 1

zu berechnen.

(b) Für die Konvergenz der Funktionenfolge bemerkt man zunächst, dass $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist $x \neq 0$, so konvergiert

$$\frac{x}{\frac{1}{n^4} + x^4} \to \frac{1}{x^3}$$

für $n \to \infty$, bzw.

$$f_n(x) = \frac{n^2x}{1 + n^4x^4} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{x}{\frac{1}{n^4} + x^4} \to 0.$$ 1

Die Grenzfunktion der Folge f_n ist also die konstante Nullfunktion $x \mapsto 0$.
Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig, da

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - 0 \right| = \frac{4n}{3 \cdot \sqrt[4]{3}} \to \infty \text{ für } n \to \infty$$ 1

gilt.
Hier noch ergänzend eine Charakterisierung der Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf denen f_n gleichmäßig konvergiert: Problem dabei sind die beiden lokalen Extrema, deren Ordinaten für $n \to \infty$ divergieren, wobei die Abszissen jeweils gegen Null konvergieren. Wir vermuten bzw. behaupten daher, dass die Funktionenfolge f_n auf allen Mengen, welche keine Umgebung der Null beinhalten gleichmäßig bzgl. x konvergiert. Auf allen Umgebungen der Null ist die Konvergenz hingegen nicht gleichmäßig.
Sei $U \subset \mathbb{R}$ also eine (offene) Umgebung der Null, d.h. $0 \in \operatorname{int}(U)$. Wegen

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}n}\right) = \frac{4n}{3 \cdot \sqrt[4]{3}} \to \infty$$

mit $1/(\sqrt[4]{3}n) \to 0$ für $n \to \infty$ kann eine Ungleichung der Form

$$|f_n(x)| < \varepsilon$$

nicht für alle $x \in U$ und genügend große $n \in \mathbb{N}$ erfüllt werden. Wir zeigen nun die gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R} \setminus U$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Bezeichne ξ denjenigen der Randpunkte von U, welcher den kleinsten Betrag besitzt und wähle N_ε so groß, dass

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}n} \leq |\xi|$$

für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Dann ist für alle $n \geq N_\varepsilon$

$$\max_{x\in\mathbb{R}\setminus U} f_n(x) = f_n(\xi).$$

Als nächstes wählen wir $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$|f_n(|\xi|)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N'_\varepsilon$ gilt, dies geht wegen der Punktweisen Konvergenz. Ist $n \geq \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$, so folgt

$$|f_n(x)| \leq |f_n(|\xi|)| < \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus U$, d.h. die Funktionenfolge konvergiert gleichmäßig bzgl. $x \in \mathbb{R} \setminus U$.

Aufgabe 5. **(a)** Formulieren Sie das *Majorantenkriterium von Weierstraß* für die gleichmäßige Konvergenz von Reihen.

(b) Beweisen Sie Ihre Formulierung des Majorantenkriteriums aus Teilaufgabe **(a)**.

(c) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz.

Lösung 5.

(a) Wir formulieren das Majorantenkriterium von Weierstraß wie im Vorlesungsskript:
Seien P eine Menge, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ein Körper,

$$a_k : P \to \mathbb{R}, \qquad p \mapsto a_k(p)$$

eine Folge von Funktionen und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_k(p)| \leq b_k$$

für alle $p \in P$ und $k \geq N$ erfüll ist, und ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(p).$$

gleichmäßig bzgl. $p \in P$. 2

(b) Wir wollen die Aussage auf das Cauchykriterium für die gleichmäßige Konvergenz von Reihen zurückführen. Dafür haben wir zu zeigen, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε gibt, sodass die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k(p) \right| < \varepsilon$$ 0,5

für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ und $p \in P$ erfüllt ist.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben so können wir wegen der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ein N_ε derart wählen, dass

$$\sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon$$ 1

für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ gilt (man beachte, dass nach Vorrausetzung alle b_k positiv sind). Seien nun $m, n \geq \max\{N, N_\varepsilon\}$ so erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass 0,5

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k(p) \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k(p)| \leq \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon.$$ 1

(c) Wegen $(n^2+x^2)^{-1} \leq n^{-2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$ folgt die gleichmäßige Konvergenz der gegebenen Reihe bzgl. $x \in \mathbb{R}$ nach dem Majorantenkriterium aus Teilaufgabe **(a)**. 1