Prüfungsklausur — Analysis I (WS 2014/15)

Termin:	*01.06.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen. Verwendete Sätze sind zu benennen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	Σ

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Gegeben sind nichtleere Mengen $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die Definition einer unteren Schranke K für A an.

(b) Geben Sie die Definition des Infimums $\inf(A)$ an.

(c) Beweisen Sie: Sind B und C nach unten beschränkt, dann ist auch

$$D := \{x + y : x \in B \ \wedge \ y \in C\}$$

nach unten beschränkt, und es gilt $\inf(D) = \inf(B) + \inf(C)$.

Lösung 1.

(a) Eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ ist untere Schranke an eine Menge A genau dann, wenn für alle $x \in A$ gilt, dass $x \geq K$.

(b) Wir betrachten die Menge

$$M := \{K \in \mathbb{R} \, : \, K \text{ ist untere Schranke an } A\}$$

der unteren Schranken an A. Diese besitzt laut einem Satz der Vorlesung ein Maximum. Das Infimum $\inf A$ von A ist nun definiert als

$$\inf A := \max M.$$

(c) Wir zeigen zunächst, dass D nach unten beschränkt ist:
$x \geq \inf B$ für alle $x \in B$ und $y \geq \inf C$ für alle $y \in C$ folgt, dass

$$x + y \geq \inf B + \inf C.$$

Da alle Elemente von D die Form $x+y$ mit $x \in B$ und $y \in C$ haben, bedeutet diese Ungleichung gerade, dass $\inf B + \inf C$ eine untere Schranke an D ist und damit D nach unten beschränkt ist. Außerdem folgt

$$\inf(D) \ \geq \ \inf(B) + \inf(C).$$

Wir zeigen nun, dass $\inf(D) \leq \inf(B) + \inf(C)$.
Alternative 1:
Nach einer Charakterisierung des Infimums aus der Vorlesung gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B mit $x_n \to \inf B$ für $n \to \infty$. Genauso finden wir eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in C, welche gegen $\inf C$ konvergiert. Dann ist aber $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D, welche gegen $\inf B + \inf C$ konvergiert. Daraus folgt $\inf(D) \leq \inf(B) + \inf(C) \leq \inf D$.
Alternative 2:
Wir wählen ein $\varepsilon > 0$. Wegen der Definition des Infimums finden wir ein $x \in B$ mit $x < \inf B + \varepsilon$ und ein $y \in C$ mit $y < \inf C + \varepsilon$. Dann ist aber $x + y < \inf B + \inf C + 2\varepsilon$ bzw.

$$\inf D < \inf B + \inf C + 2\varepsilon.$$

Gehen wir auf beiden Seiten zum Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ über, so folgt $\inf D \leq \inf B + \inf C$.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Wir betrachten eine rekursiv gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reller Zahlen mit

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2}$$

und einem gewissen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Finden Sie den Grenzwert der Folge.

(b) Bezeichne $g \in \mathbb{R}$ den Grenzwert aus Teilaufgabe **(a)**. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $a_0 \in \mathbb{R}$ gegen g konvergiert.

Lösung 2.

(a) Angenommen es existiert $g = \lim_{n\to\infty} a_n$, dann folgt

$$g = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{a_n}{2} = 1 + \frac{g}{2}.$$

Dabei ist

$$g = 1 + \frac{g}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad g = 2.$$

D.h. der einzige mögliche Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist 2.

(b) Nach Teilaufgabe **(a)** genügt es zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jeden beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert.
Für $a_0 = 2$ folgt $a_n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge konvergiert offensichtlich.
Für $a_0 > 2$ folgt zunächst, dass

$$a_1 = 1 + \frac{a_0}{2} > 1 + \frac{2}{2} = 2 \qquad \text{und} \qquad a_1 = 1 + \frac{a_0}{2} < \frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{2} = a_0.$$

Angenommen es ist $a_n > 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir mit der gleichen Rechnung, dass

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2} > 1 + \frac{1}{2} = 2.$$

Gilt $a_{n-1} > a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt ähnliche Weise, dass

$$a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{2} > 1 + \frac{a_n}{2} = a_{n+1}.$$

Zusammenfassend haben wir induktiv gezeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine durch 2 nach unten beschränkte, monoton fallende Folge ist, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Bolzano-Weierstraß.
Der Beweis im Fall $a_0 < 2$ erfolgt analog.

Aufgabe 3. (5 Punkte)
Gegeben ist eine Funktion $f : [0, \infty[\to] -\infty, 1]$ mit folgenden Eigenschaften: f ist stetig, streng monoton fallend, $f(0) = 1$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

(a) Begründen Sie, warum f injektiv ist.

(b) Beweisen Sie, dass f surjektiv ist.

(c) Ist f^{-1} streng monoton? Beweisen Sie Ihre Aussage ohne Verwendung eine Satzes aus der Vorlesung.

Lösung 3.

(a) Wähle $x_1, x_2 \in [0, \infty[$ mit $x_1 \neq x_2$. OBdA ist $x_1 < x_2$ und es folgt, da f streng monoton fallend, dass $f(x_1) > f(x_2)$. Insbesondere ist damit $f(x_1) \neq f(x_2)$ und f injektiv.

(b) Wir wählen ein $y \in] - \infty, 1]$ und zeigen, dass es ein $x \in [0, \infty[$ gibt, sodass $f(x) = y$ gilt. Wegen $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ gibt es für alle $k < 1$ ein $x_k \geq 0$, sodass $f(x) < k$ für alle $x > x_k$. Wähle $k := y$ dann ist $f(x) < y$ für alle $x > x_k$. Sei nun $x_0 > x_k$, dann ist

$$f(0) = 1 \geq y > f(x_0)$$

bzw.

$$\min_{x \in [0, x_0]} f(x) \leq f(x_0) < y \leq 1 = \max_{x \in [0, x_0]} f(x).$$

Da f stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0, x_0]$ sodass $f(\xi) = y$.

(c) Wir zeigen, dass f^{-1} streng monoton fallend ist.
Sei $y_1 < y_2 \leq 1$, dann definieren wir $x_1 := f^{-1}(y_1)$ und $x_2 := f^{-1}(y_2)$. Angenommen es ist $x_1 \leq x_2$, dann folgt wegen Monotonie von f, dass

$$y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$$

im Widerspruch zu $y_1 < y_2$.

Aufgabe 4. (7 Punkte)

(a) Es sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Definieren Sie jede der folgenden Aussagen mit Hilfe der Quantorschreibweise:

(i) Die Funktion f besitzt ein globales Maximum.
(ii) Die Funktion f besitzt kein globales Maximum.
(iii) Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum.

(b) Formulieren Sie den *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

(c) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{e}^{\sin x} - 1 < \mathrm{e} \cdot x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Lösung 4.

(a) Wir formulieren die gegebenen Aussagen mit Hilfe von Quantoren:

(i) $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}\, \forall\, x \in \mathbb{R}\ :\ f(x) \leq f(x_0)$
(ii) $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\, \exists\, x \in \mathbb{R}\ :\ f(x) > f(x_0)$
(iii) $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}\, \exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, :\ f(x) \leq f(x_0)$

(b) Wir formulieren den Mittelwertsatz der Differentialrechnung im im Vorlesungsskript angegeben: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$, sodass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(c) Wir wenden den Mittelwertsatz aus Teilaufgabe **(b)** auf die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ mit

$$f'(x) = \cos x \cdot \mathrm{e}^{\sin x}$$

an. Diese ist als Komposition differenzierbarer Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar (und damit auch stetig). Für $x > 0$ liefert der Mittelwertsatz für f auf dem Intervall $[0, x]$, dass

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\mathrm{e}^{\sin x} - 1}{x} = \cos \xi \cdot \mathrm{e}^{\sin \xi} = f'(\xi).$$

Für alle $\xi > 0$ gilt: Entweder ist $\cos \xi < 1$ oder $\sin \xi < 1$. Wegen Monotonie der Exponentialfunktion folgt daraus

$$f'(\xi) < 1 \cdot \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

Zusammenfassend folgt für alle $x > 0$, dass

$$\mathrm{e}^{\sin x} - 1 < \mathrm{e} \cdot x.$$

Alternative mit Fallunterscheidung:
Fall $x > 1$: Dann folgt $\mathrm{e}^{\sin x} \leq \mathrm{e}$ und mit der Monotonie der Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^{\sin x} - 1 \leq \mathrm{e} - 1 < \mathrm{e} < \mathrm{e} \cdot x.$$

Fall $0 < x < \xi$: Mittelwertsatz auf f im Intervall $[0, x]$ angewandt ergibt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\mathrm{e}^{\sin x} - 1}{x} = \cos\xi \cdot \mathrm{e}^{\sin\xi} = f'(\xi).$$

Für $0 < x \leq$ gilt $\cos\xi < 1$. mit der Monotonie der Exponentialfunktion und $\sin\xi \leq 1$ folgt daraus

$$f'(\xi) < 1 \cdot \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

Zusammenfassend folgt für alle $x > 0$, dass

$$\mathrm{e}^{\sin x} - 1 < \mathrm{e} \cdot x.$$

Aufgabe 5. (3 Punkte)
Wir betrachten eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f_n(x) := \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{nx}}.$$

(a) Finden Sie die punktweise Grenzfunktion der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig?

Lösung 5.

(a) Bezeichne f die punktweise Grenzfunktion der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Angenommen es ist $x = 0$, dann ist

$$f_n(0) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^0} = \frac{1}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es ist $f(0) = 1/2$. Für $x < 0$ konvergiert $\mathrm{e}^{nx} \to 0$ für $n \to \infty$. d.h. $f_n(x) \to 1/(1 + 0) = 1$. Für $x > 0$ divergiert e^{nx} bestimmt gegen $+\infty$. Damit konvergiert aber $f_n(x) \to 0$. Zusammenfassend ist die Grenzfunktion f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0, \\ 1/2 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(b) Angenommen die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ würde gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergieren, so wäre die Grenzfunktion nach einem Satz aus der Vorlesung stetig. Dies ist aber aufgrund des Sprungs von f bei $x = 0$ hier nicht der Fall. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert damit nicht gleichmäßig gegen f.

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz:

$$\textbf{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n + x^2)} \qquad \textbf{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + nx^2} \qquad \textbf{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

Lösung 6.

(a) Wegen $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\frac{1}{n \cdot (n + x^2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergiert, konvergiert die gegebene Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ nach dem Weierstraß-Majorantenkriterium gleichmäßig.
Da die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, konvergiert sie auch für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Für $x = 0$ ist

$$\left. \frac{n}{1 + nx^2} \right|_{x=0} = n$$

keine Nullfolge. Die gegebene Reihe konvergiert in diesem Fall also nicht. Die Reihe ist in diesem Fall auch nicht gleichmäßig konvergent.
Ist $x \neq 0$, so konvergiert

$$\frac{n}{1 + nx^2} \to \frac{1}{x^2} \neq 0$$

für $n \to \infty$. D.h. auch in diesem Fall konvergiert die gegebene Reihe nicht, sie ist damit auch nicht gleichmäßig konvergent.

(c) Die gegebene Reihe ist eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius R mit Hilfe der Formel von Cauchy-Hadamard berechnet werden kann. Es ist $a_n = 1/(n^2 + 1)$ bzw.

$$R^{-1} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 + 1}} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^2 + 1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

D.h. für alle $x \in \mathbb{R} \setminus] - 1, 1[$ divergiert die gegebene Reihe. Für $x \in [-1, 1]$ folgt

$$\left| \frac{x^n}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2}$$

und es folgt die gleichmäßige Konvergenz der gegebenen Reihe für alle $x \in [-1, 1]$ nach dem Weierstraß-Majorantenkriterium.