Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Prüfungsklausur — Analysis I (WS 2014/15)

Termin:	*02.04.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen. Verwendete Sätze sind zu benennen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

Aufgabe 1. (7 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ durch

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{xy}$$

eine Metrik definiert ist.
Hinweis: Für $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ gilt $d(x,y) = \frac{|xz-yz|}{xyz}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge der natürlichen Zahlen, $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}_+, d)$ ist, und dass sie in $(\mathbb{R}_+, d)$ nicht konvergiert.

(c) Ist $(\mathbb{R}_+, d)$ vollständig?

Aufgabe 2. (5 Punkte)

(a) Geben Sie den *Nullstellensatz* an.

(b) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften, dass $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $\forall \xi \in \,]0,1[\, : f(\xi) \neq \xi$ gilt. Beweisen Sie, dass daraus folgt:

$$\big(\forall \xi \in \,]0,1[\, : f(\xi) > \xi\big) \;\vee\; \big(\forall \xi \in \,]0,1[\, : f(\xi) < \xi\big).$$

(c) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften, dass $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und

$$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}} = \mathrm{id}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Hierbei bezeichnen id die identische Abbildung auf $[0,1]$ und $\circ$ die Verkettung von Funktionen.
Zeigen Sie, dass es mindestens ein $\xi \in \,]0,1[$ mit der Eigenschaft $f(\xi) = \xi$ gibt.

Aufgabe 3. (7 Punkte)

Eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f^{(n+2)} = f^{(n)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f bezeichnet.

(a) Geben Sie das Taylorpolynom $T_n(0,x)$ von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an. Stellen Sie auch das (Lagrange-) Restglied $R_n(0,x)$ für die Funktion f auf.

(b) Sei $a > 0$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass $T_n(0,x)$ für $n \to \infty$ für jedes $x \in [-a,a]$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Folge von Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{n^2 x}{1 + n^4 x^4}.$$

(a) Geben Sie die Art und Lage aller Extrema von f_n für beliebiges aber fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ an.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Funktionenfolge für $n \to \infty$? Geben Sie die Grenzfunktion an. Untersuchen Sie ob f_n für $n \to \infty$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 5. (6 Punkte)

(a) Formulieren Sie das *Majorantenkriterium von Weierstraß* für die gleichmäßige Konvergenz von Reihen.

(b) Beweisen Sie Ihre Formulierung des Majorantenkriteriums aus Teilaufgabe **(a)**.

(c) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz.