Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Tag: 23.03.2015**

Analysis I (WS 2014/15) — Prüfungsvorbereitung 1

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

1.1. Eine reelle Folge konvergiert genau dann wenn sie beschränkt ist und genau einen Verdichtungspunkt hat. (Tipp: Bolzano-Weiertraß)

1.2. Bestimmen Sie alle Verdichtungspunkte der folgenden rellen Folgen und untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz

(a) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{(2n+3)^2}$,

(b) $a_n = (1-(-1)^n)\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

1.3. **(a)** Zeigen Sie: Konvergiert eine relle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a > 0$, dann sind nur endlich viele $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ negativ.

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, so dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge sei und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $b > 0$ konvergiere. Zeigen Sie, dass $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

1.4. Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := 1 - \frac{1}{2+a_n}$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie Ihren Grenzwert.

1.5. Gegeben sei $R \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ durch

$$xRy \;\Leftrightarrow\; xy \geq 0.$$

Entscheiden Sie, ob R eine Äquivalenzrelation ist.

1.6. Entscheiden Sie, ob folgende Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

(a) $f : \mathbb{N}\to\mathbb{N},\ n \mapsto n+1$,

(b) $f : \mathbb{N}\to\mathbb{N},\ (n,m) \mapsto n+m$,

(c) $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \mapsto x^5 + x^3 + 1$,

(d) $f : \mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z \mapsto \mathrm{i}(2z)^2$,

(e) $f : \mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z \mapsto \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)$.

1.7. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen

$$\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
bartosch.ruszkowski@mathematik.uni-stuttgart.de