Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Scheinklausur 1

Termin:	*06.12.2014*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Bei **Aufgabe 6** und **Aufgabe 7** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung jeweils ein Extrablatt.* *Bei allen anderen Aufgaben wird nur die Abgabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.* *Bei den Aufgaben mit dem Hinweis* **J** *für "ja" und* **N** *für "nein" werden für richtige Antworten Pluspunkte, für falsche Antworten entsprechend viele Minuspunkte und für fehlende Antworten keine Punkte gegeben.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*90 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	Σ

DON'T PANIC

Aufgabe 1 (2 Punkte)

(a) Vervollständigen Sie folgende Wahrheitswerttabelle, tragen Sie **w** für "wahr" und **f** für "falsch" ein.

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$	$p \wedge (\neg p \to q)$
f	**f**			
f	**w**			
w	**f**			
w	**w**			

(b) Zu welcher Aussage ist $p \wedge (\neg p \to q)$ äquivalent?

$$p \wedge (\neg p \to q) \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Handelt es sich bei den folgenden Relationen $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ um Äquivalenzrelationen bzw. Ordnungsrelationen (**J** für "ja", **N** für "nein")?

	ist Äquivalenzrelation	ist Ordnungsrelation
$m \,\mathcal{R}\, n :\Leftrightarrow m = n$		
$m \,\mathcal{R}\, n :\Leftrightarrow m^2 = n^2$		
$m \,\mathcal{R}\, n :\Leftrightarrow m \geq n$		
$m \,\mathcal{R}\, n :\Leftrightarrow m < n$		

Aufgabe 3 (6 Punkte) Tragen Sie die gesuchten Werte in die folgende Tabelle ein:

	$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$	$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$	$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$	$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$
$a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$				
$a_n := \frac{(-1)^n}{n}$				
$a_n := (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1 + (-1)^n)$				

Aufgabe 4 (6 Punkte) Geben Sie an, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind. (**J** für "ja", **N** für "nein")

Abbildung	ist injektiv	ist surjektiv	ist bijektiv
$f : \mathbb{R} \to [1, \infty[\; : x \mapsto 1 + x^4$			
$f : [1, \infty[\to [2, \infty[\; : x \mapsto 1 + x^4$			
$f : [-1, \infty[\to [0, \infty[\; : x \mapsto 1 + x^4$			
$f : [1, \infty[\to \mathbb{R} \; : x \mapsto 1 + x^4$			

Aufgabe 5 (4 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \boxed{}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} = \boxed{}$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \boxed{}$$

(d) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \boxed{}$$

(e) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2 - 4} = \boxed{}$$

(f) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := 1 + \frac{a_n}{2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.

(b) Zeigen Sie, dass $a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 7 (5 Punkte) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Zeigen Sie, dass dann die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n := \max\{a_n, b_n\}$$

gegen den Grenzwert $\max\{a, b\}$ konvergiert.