Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Scheinklausur 1

Termin:	*06.12.2014*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Bei* ***Aufgabe 6*** *und* ***Aufgabe 7*** *sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung jeweils ein Extrablatt.* *Bei allen anderen Aufgaben wird nur die Abgabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.* *Bei den Aufgaben mit dem Hinweis* **J** *für "ja" und* **N** *für "nein" werden für richtige Antworten Pluspunkte, für falsche Antworten entsprechend viele Minuspunkte und für fehlende Antworten keine Punkte gegeben.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*90 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	Σ

DON'T PANIC

Aufgabe 1 (2 Punkte)

(a) Vervollständigen Sie folgende Wahrheitswerttabelle, tragen Sie **w** für "wahr" und **f** für "falsch" ein.

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$	$p \wedge (\neg p \to q)$
f	**f**	**w**	**f**	**f**
f	**w**	**w**	**w**	**f**
w	**f**	**f**	**w**	**w**
w	**w**	**f**	**w**	**w**

(b) Zu welcher Aussage ist $p \wedge (\neg p \to q)$ äquivalent?

$$p \wedge (\neg p \to q) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\quad p \quad}$$

Korrekturanmerkung:

- **Jede korrekt ausgefüllte Spalte gibt $0,5$ Punkte.**
  - **Bei Fehlerfortpflanzung sind Folgefehler zu beachten. Angenommen es ist z.B. $\neg p$ falsch bestimmt. Wenn aus dem falschen $\neg p$ dann aber $\neg p \to q$ auf korrekte Weise folgt, so wird für die falsche Spalte $\neg p \to q$ trotzdem die volle Punktzahl gegeben.**
- **Der Kasten in Teilaufgabe (b) gibt $0,5$ Punkte.**

Aufgabe 2 (4 Punkte) Handelt es sich bei den folgenden Relationen $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ um Äquivalenzrelationen bzw. Ordnungsrelationen (**J** für "ja", **N** für "nein")?

	ist Äquivalenzrelation	ist Ordnungsrelation
$m\,\mathcal{R}\,n :\Leftrightarrow m = n$	**J**	**J**
$m\,\mathcal{R}\,n :\Leftrightarrow m^2 = n^2$	**J**	**N**
$m\,\mathcal{R}\,n :\Leftrightarrow m \geq n$	**N**	**J**
$m\,\mathcal{R}\,n :\Leftrightarrow m < n$	**N**	**N**

Korrekturanmerkung:

- **Jeder richtige Eintrag ergibt $0,5$ Punkte.**
- **Jeder falsche Eintrag ergibt $-0,5$ Punkte.**
- **Ein leeres Kästchen ergibt 0 Punkte.**
- **Alle Einträge sind voneinander unabhängig, es werden daher keine Folgefehler berücksichtigt.**

Aufgabe 3 (6 Punkte) Tragen Sie die gesuchten Werte in die folgende Tabelle ein:

	$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$	$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$	$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$	$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$
$a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$	$\frac{3}{2}$	-1	1	-1
$a_n := \frac{(-1)^n}{n}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	0
$a_n := (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}(1+(-1)^n)$	2	-2	2	-2

Korrekturanmerkung:

- **Jeder richtige Eintrag ergibt $0,5$ Punkte.**
- **Jeder falsche Eintrag ergibt 0 Punkte.**
- **Alle Einträge sind voneinander unabhängig, es werden daher keine Folgefehler berücksichtigt.**

Aufgabe 4 (6 Punkte) Geben Sie an, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind. (**J** für "ja", **N** für "nein")

Abbildung	ist injektiv	ist surjektiv	ist bijektiv
$f : \mathbb{R} \to [1, \infty[\ : x \mapsto 1 + x^4$	**N**	**J**	**N**
$f : [1, \infty[\ \to [2, \infty[\ : x \mapsto 1 + x^4$	**J**	**J**	**J**
$f : [-1, \infty[\ \to [0, \infty[\ : x \mapsto 1 + x^4$	**N**	**N**	**N**
$f : [1, \infty[\ \to \mathbb{R}\ : x \mapsto 1 + x^4$	**J**	**N**	**N**

Korrekturanmerkung:

- **In den Spalten "injektiv" und "surjektiv" werden**
  - **für jeden richtigen Eintrag $0,5$ Punkte gegeben,**
  - **für jeden falschen Eintrag $-0,5$ Punkte gegeben**
  - **und für leere Kästchen 0 Punkte gegeben.**
- **In der letzten Spalte sind Folgefehler zu beachten. Passt der Eintrag zu den ersten beiden Spalten, so werden $0,5$ Punkte gegeben. Passt der Eintrag nicht werden $-0,5$ Punkte gegeben. Ein leeres Kästchen ergibt 0 Punkte.**
- **Wurde bei der Bearbeitung offensichtlich geraten, d.h. immer J oder immer N eingetragen entfällt die Betrachtung von Folgefehlern.**

Aufgabe 5 (4 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \boxed{3}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} = \boxed{0}$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \boxed{\mathrm{e}^2}$$

(d) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(e) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2 - 4} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

(f) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Korrekturanmerkung:

- **Jeder falsche Eintrag ergibt 0 Punkte.**
- **Bei den Teilaufgaben (d) und (f) ergibt jeder richtige Eintrag 1 Punkt.**
- **Bei allen übrigen Tailaufgaben ergibt jeder richtige Eintrag $0,5$ Punkte.**
- **Alle Einträge sind voneinander unabhängig, es werden daher keine Folgefehler berücksichtigt.**

Aufgabe 6 (3 Punkte) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := 1 + \frac{a_n}{2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.

(b) Zeigen Sie, dass $a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Lösung 6.

(a) Wir zeigen $a_{n+1} \geq a_n$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

I.A.: Es ist

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 = a_1.$$

I.S.: Nach Induktionsvorrausetzung ist $a_{n+1} \geq a_n$. Daraus folgt $a_{n+1}/2 \geq a_n/2$ bzw.

$$a_{n+2} = 1 + \frac{a_{n+1}}{2} \overset{\text{I.V.}}{\geq} 1 + \frac{a_n}{2} = a_{n+1}.$$

(b) Wir zeigen $a_n \leq 3$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

I.A.: Es ist

$$a_1 = 1 \leq 3.$$

I.S.: Nach Induktionsvorrausetzung folgt

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2} \overset{\text{I.V.}}{\leq} 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \leq \frac{6}{2} = 3.$$

(c) Wir haben in den Teilaufgaben **(a)** und **(b)** gezeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigt und nach oben beschränkt ist. Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Monotoniekriterium konvergent.
Der Grenzwert laßst sich direkt aus der Rekursionsvorschrift berechnen. Es ist

$$\begin{array}{ccccl} a_{n+1} & = & 1 + \frac{a_n}{2} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \text{für } n \to \infty \\ a & = & 1 + \frac{a}{2}. & & \end{array}$$

und es folgt $a = 2$.

Korrekturanmerkung:

- **Ist einer der Induktionsbeweise in Teilaufgabe (a) oder (b) korrekt ausgeführt, d.h.:**
  - **der Induktionsanfang bei $n = 1$ ist vorhanden,**
  - **der Induktionsschritt ist korrekt**

  - **im Induktionsschritt ist gekennzeichnet an welcher Stelle die Induktionsvoraussetzung eingeht**

  So ergibt dieser $1,5$ Punkte (jeder Teilschritt ergibt dabei mit $0,5$ Punkte).

- **Der andere Induktionsbeweis ergibt dann weitere $0,5$ Punkte. Hierbei ist jediglich ausschlaggebend ob die Teilaufgabe "sinnvoll bearbeitet" wurde, technische Fehler bleiben unberücksichtigt.**

- **Die korrekte Begründung der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (man bemerkt, dass aus der Monotonie in (a) und der Beschränktheit in (b) die Konvergenz folgt) in Teilaufgabe (c) ergibt $0,5$ Punkte.**

- **Die korrekte Angabe des Grenzwertes in Teilaufgabe (c) ergibt $0,5$ Punkte.**

Aufgabe 7 (5 Punkte) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Zeigen Sie, dass dann die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n := \max\{a_n, b_n\}$$

gegen den Grenzwert $\max\{a, b\}$ konvergiert.

Lösung 7.
Variante 1: Wir betrachten zunächst den Fall $a = b$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, so finden wir, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergieren, $N_\varepsilon^{(a)}, N_\varepsilon^{(b)} \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon^{(a)}$, bzw. $|b_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon^{(b)}$ gilt. Setzen wir $N := \max\{N_\varepsilon^{(a)}, N_\varepsilon^{(b)}\}$, so folgt 1

$$|\max\{a_n, b_n\} - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ konvergiert ebenfalls gegen a.
Ist hingegen $a \neq b$, so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $a > b$ (andernfalls Vertauschen wir in der Argumentation die Rollen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Setzen wir nun $\varepsilon = (a-b)/3$, so finden wir, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a und b konvergieren, $N_\varepsilon^{(a)}, N_\varepsilon^{(b)} \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon^{(a)}$, bzw. $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon^{(b)}$ gilt. Setzen wir wieder $N := \max\{N_\varepsilon^{(a)}, N_\varepsilon^{(b)}\}$, so folgt 1 1

$$b_n \leq b + \varepsilon \leq a - \varepsilon \leq a_n$$

für alle $n \geq N$. D.h. es ist $\max\{a_n, b_n\} = a_n$ für $n \geq N$ und 1

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n = a = \max\{a, b\}.$$ 1

Variante 2: Wir zeigen zunächst eine kleine Hilfsaussage: Angenommen eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert a, so finden wir für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ erfüllt ist. Mit Hilfe der umgekehrten Dreiecksungleichung erhalten wir daraus, dass

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$ 1

für alle $n \geq N_\varepsilon$. Das bedeutet aber gerade, dass die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $|a|$ konvergiert. 1
Diese Hilsaussage zusammen mit den Grenzwertsätzen aus der Vorlesung liefert nun, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} &= \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{2}\left(a_n + b_n + |a_n - b_n|\right)\right) && 1\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n + |\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n|\right) && 1\\
&= \tfrac{1}{2}\left(a + b + |a - b|\right)\\
&= \max\{a, b\}.
\end{aligned}$$

Variante 3: Ohne Einschränkung ist $a \geq b$ (andernfalls Vertauschen wir in der Argumentation die Rollen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, so finden wir, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergieren, $N_\varepsilon^{(a)}, N_\varepsilon^{(b)} \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon^{(a)}$, bzw. $|b_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon^{(b)}$ gilt. Für alle $n \geq N := \max\{N_\varepsilon^{(a)}, N_\varepsilon^{(b)}\}$ sind beide Ungleichungen gleichzeitig erfüllt. Wegen 1

$$b_n < b + \varepsilon \leq a + \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N$$ 1

folgt zusammen mit $a_n < a + \varepsilon$ auch dass

$$\max\{a_n, b_n\} < a + \varepsilon, \qquad \text{für alle } n \geq N$$ 1

wegen $a_n > a - \varepsilon$ ist auch

$$\max\{a_n, b_n\} > a - \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$ 1

Beide Ungleichungen zusammen ergeben, dass

$$|\max\{a_n, b_n\} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N,$$

d.h. die Folge $(\max\{a_n, b_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\max\{a, b\}$. 1

Korrekturanmerkung:

- **Punkte werden entsprechend der Randbemerkungen im Lösungsvorschlag vergeben.**
- **Es wird vorwiegend eine Variante bei der Korrektur berücksichtigt.**
- **Ist die Aussage im Spezialfall für $a = b$ gezeigt, wird auf jeden Fall 1 Punkt gegeben.**