

Analysis I (WS 2014/15) — Scheinklausur 2

Termin: 14.02.2015

Hinweise: Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
Bei **Aufgabe 8** und **Aufgabe 9** sind die vollständigen Argumentations-
schritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung jeweils ein Ex-
trablatt.

Bei allen anderen Aufgaben wird nur die Abgabe von Endergebnissen ver-
langt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht einge-
sammelt.

Bei den Aufgaben mit dem Hinweis **J** für "ja" und **N** für "nein" werden für
richtige Antworten Pluspunkte, für falsche Antworten entsprechend viele
Minuspunkte und für fehlende Antworten keine Punkte gegeben.

Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einle-
gen.

Hilfsmittel: **Keine** außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Ta-
schenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.

Bearbeitungszeit: 90 min

Name:

Matrikel-Nr.:

Gruppen-Nr.:

Punkte:

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

Σ

DON'T PANIC

Aufgabe 1 (3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) =$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 - x^2}}{x^2} =$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x - \frac{x^2}{2}}{e^{x^2} - 1} =$

Aufgabe 2 (11 Punkte) Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{2x} - 2e^x.$$

(a) Geben Sie alle Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen an:

(b) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von f

$f'(x) =$

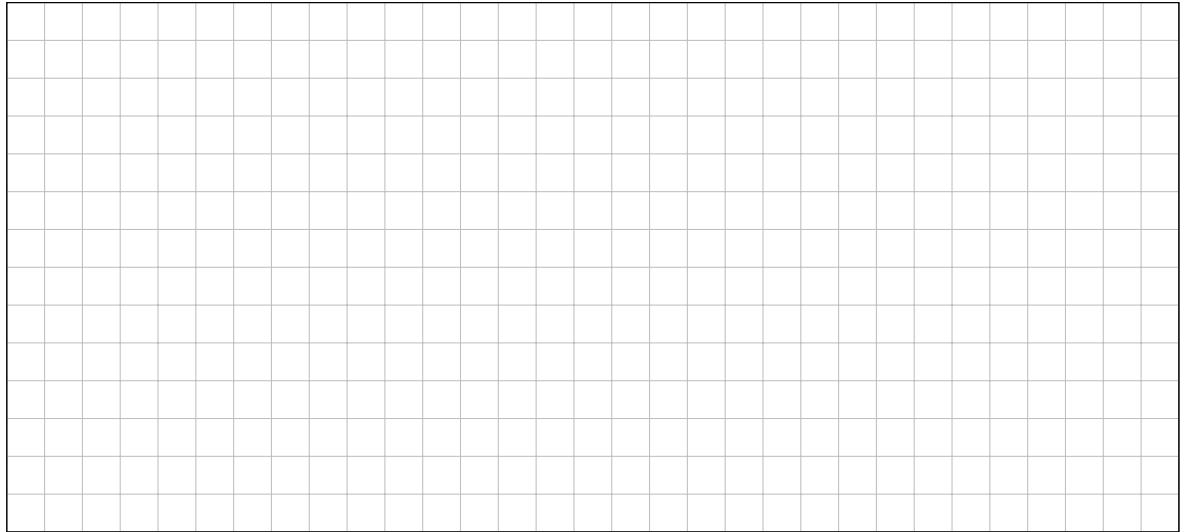
$f''(x) =$

(c) Geben Sie alle Extrema von f an:

(d) Geben Sie alle Wendepunkte mit den Steigungen der Wendetangenten an:

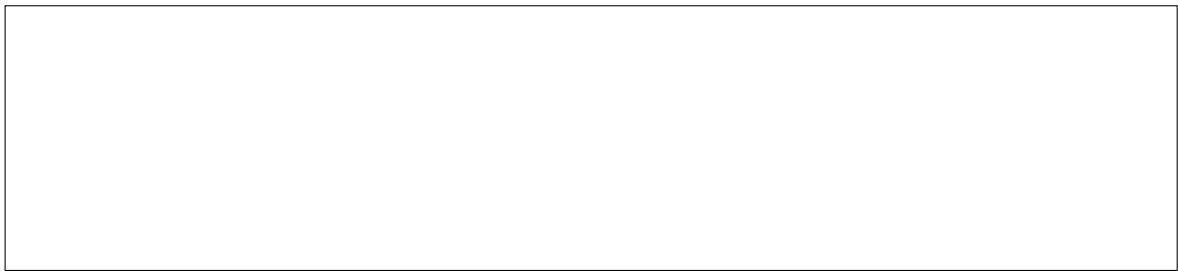
(e) Geben Sie das asymptotische Verhalten von f für $|x| \rightarrow \infty$ an.

- (f) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f .
(Hinweise: $\ln 2 \approx 0,69$; Achsen geeignet skalieren; kein Bleistift!)



Aufgabe 3 (3 Punkte) Finden Sie Beispiele von Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, g nicht identisch Null, welche die angegebenen Bedingungen erfüllen:

- (a) g ist stetig in $x_0 = 1$, f ist nicht stetig in x_0 und $f \cdot g$ ist stetig in x_0 .



- (b) f ist nirgendwo stetig aber $f \cdot g$ ist in $x_0 = 0$ differenzierbar.



- (c) f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$ aber f^2 ist in x_0 differenzierbar mit Ableitung 0.



Aufgabe 4 (4 Punkte) Skizzieren Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlen, nutzen Sie dazu den untenstehenden karierten Kasten.

(Hinweise: **Achsen geeignet skalieren; kein Bleistift!**)

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3 \wedge \arg(z) \notin]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[\}$

(b) $M_2 := \bigcup_{n=1}^3 \{z \in \mathbb{C} : |z + 2n| \leq \frac{1}{2}\}$

(c) $M_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z - 1/2 - i} \right) = 1 \right\}$



Aufgabe 5 (5 Punkte) Tragen Sie jeweils ein, ob die angegebenen Mengen in \mathbb{R} offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt sind (**J** für “ja”, **N** für “nein”):

Menge	offen	abgeschlossen	beschränkt	kompakt
$[2, 3] \cup [5, 8]$				
$]2, 3[\cup]5, 8[$				
$[2, 3] \cup]5, 8[$				
\mathbb{R}				
$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[1 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n} \right]$				

Aufgabe 6 (5 Punkte) Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, für die die folgenden Potenzreihen konvergieren.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$ konvergiert für alle $x \in$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^n}{3n} \right) (x+1)^n$ konvergiert für alle $x \in$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} (x-4)^n$ konvergiert für alle $x \in$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + 2^n) x^n$ konvergiert für alle $x \in$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Geben sie an, ob folgende Reihen konvergieren (**J** für "ja", **N** für "nein").

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)}{(n+1)^3}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{5^n}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+1}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2+n}{n}^{-\frac{1}{n}}$

Aufgabe 8 (3 Punkte), Bearbeiten Sie diese Aufgabe auf einem Extrablatt:

- (a) Geben Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an.
(b) Es sei $\alpha > 1$. Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x \text{ für } x \in]0, \infty[$$

durch Anwendung des Mittelwertsatzes.

Aufgabe 9 (3 Punkte), Bearbeiten Sie diese Aufgabe auf einem Extrablatt:

Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gerade und beliebig oft differenzierbar, so gilt

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot f^{(n)}(-x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gerade und beliebig oft differenzierbar, so treten in der Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ nur gerade Potenzen auf.

Aufgabe 10 (2 Punkte) Ordnen Sie folgenden Funktionen ihre Taylorreihen im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ zu. Verbinden Sie dabei einfach die entsprechenden Kästchen durch eine deutliche Linie.

$$\frac{1}{1-x^2}$$

$$\sin x$$

$$\cos x$$

$$e^x$$

$$\ln(x+1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$