Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Scheinklausur 2

Termin:	*14.02.2015*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Bei* ***Aufgabe 8*** *und* ***Aufgabe 9*** *sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung jeweils ein Extrablatt.* *Bei allen anderen Aufgaben wird nur die Abgabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.* *Bei den Aufgaben mit dem Hinweis* **J** *für "ja" und* **N** *für "nein" werden für richtige Antworten Pluspunkte, für falsche Antworten entsprechend viele Minuspunkte und für fehlende Antworten keine Punkte gegeben.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*90 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**	**A10**

Σ

DON'T PANIC

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
bartosch.ruszkowski@mathematik.uni-stuttgart.de

Aufgabe 1 (3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) =$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2} =$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x-\frac{x^2}{2}}{e^{x^2}-1} =$$

Aufgabe 2 (11 Punkte) Sei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto e^{2x}-2e^x.$$

(a) Geben Sie alle Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen an:

(b) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von f

$f'(x) =$ $\qquad$ $f''(x) =$

(c) Geben Sie alle Extrema von f an:

(d) Geben Sie alle Wendepunkte mit den Steigungen der Wendetangenten an:

(e) Geben Sie das asymptotische Verhalten von f für $|x|\to\infty$ an.

(f) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.
($Hinweise$: $\ln 2 \approx 0,69$; **Achsen geeignet skalieren**; **kein Bleistift!**)

Aufgabe 3 (3 Punkte) Finden Sie Beispiele von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g nicht identisch Null, welche die angegebenen Bedingungen erfüllen:

(a) g ist stetig in $x_0 = 1$, f ist nicht stetig in x_0 und $f \cdot g$ ist stetig in x_0.

(b) f ist nirgendwo stetig aber $f \cdot g$ ist in $x_0 = 0$ differenzierbar.

(c) f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$ aber f^2 ist in x_0 differenzierbar mit Ableitung 0.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Skizzieren Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlen, nutzen Sie dazu den untenstehenden karierten Kasten.
(*Hinweise:* **Achsen geeignet skalieren**; **kein Bleistift!**)

(a) $M_1 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 3 \wedge \arg(z) \notin \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\right\}$

(b) $M_2 := \bigcup_{n=1}^{3} \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z + 2n| \leq \frac{1}{2}\right\}$

(c) $M_3 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z - 1/2 - \mathrm{i}}\right) = 1\right\}$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Tragen Sie jeweils ein, ob die angegebenen Mengen in $\mathbb{R}$ offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt sind (**J** für "ja", **N** für "nein"):

Menge	offen	abgeschlossen	beschränkt	kompakt
$[2,3] \cup [5,8]$				
$]2,3[\cup]5,8[$				
$[2,3] \cup]5,8[$				
$\mathbb{R}$				
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[1 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$				

Aufgabe 6 (5 Punkte) Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, für die die folgenden Potenzreihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$ konvergiert für alle $x \in$ ☐

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{3n}\right)(x+1)^n$ konvergiert für alle $x \in$ ☐

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}\,(x-4)^n$ konvergiert für alle $x \in$ ☐

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + 2^n)\,x^n$ konvergiert für alle $x \in$ ☐

Aufgabe 7 (6 Punkte) Geben sie an, ob folgende Reihen konvergieren (**J** für "ja", **N** für "nein").

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)}{(n+1)^3}$ ☐

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{5^n}$ ☐

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$ ☐

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ☐

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+1}$ ☐

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2+n}{n}^{-\frac{1}{n}}$ ☐

Aufgabe 8 (3 Punkte), Bearbeiten Sie diese Aufgabe auf einem Extrablatt:

(a) Geben Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an.

(b) Es sei $\alpha > 1$. Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$(1+x)^{\alpha} > 1 + \alpha x \text{ für } x \in]0, \infty[$$

durch Anwendung des Mittelwertsatzes.

Aufgabe 9 (3 Punkte), Bearbeiten Sie diese Aufgabe auf einem Extrablatt:
Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade und beliebig oft differenzierbar, so gilt

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot f^{(n)}(-x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade und beliebig oft differenzierbar, so treten in der Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ nur gerade Potenzen auf.

Aufgabe 10 (2 Punkte) Ordnen Sie folgenden Funktionen ihre Taylorreihen im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ zu. Verbinden Sie dabei einfach die entsprechenden Kästchen duch eine deutliche Linie.

$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sin x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$\cos x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$
e^x	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
$\ln(x+1)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$