Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Scheinklausur 2

Termin:	*14.02.2015*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Bei **Aufgabe 6** und **Aufgabe 7** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung jeweils ein Extrablatt.* *Bei allen anderen Aufgaben wird nur die Abgabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.* *Bei den Aufgaben mit dem Hinweis* **J** *für "ja" und* **N** *für "nein" werden für richtige Antworten Pluspunkte, für falsche Antworten entsprechend viele Minuspunkte und für fehlende Antworten keine Punkte gegeben.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*90 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	Σ

DON'T PANIC

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
bartosch.ruszkowski@mathematik.uni-stuttgart.de

Aufgabe 1 (3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x-\frac{x^2}{2}}{\mathrm{e}^{x^2}-1} = \boxed{-1}$$

Korrekturanmerkung:

- **Jeder richtige Grenzwert ergibt einen Punkt.**

Aufgabe 2 (11 Punkte) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x}.$$

(a) Geben Sie alle Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen an:

Es ist $f(x) = (\mathrm{e}^x - 2)\mathrm{e}^x$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$, also $(\ln 2, 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -1$, also $(0, -1)$

(b) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von f

$f'(x) = \boxed{2\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x = 2(\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{e}^x}$ $\quad f''(x) = \boxed{4\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x = 2(2\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{e}^x}$

(c) Geben Sie alle Extrema von f an:

Es ist $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Setzen wir diesen Wert in die zweite Ableitung ein, so erhalten wir $f''(0) = 2 > 0$.
Der Graph von f hat also bei $(0, -1)$ einen Tiefpunkt.

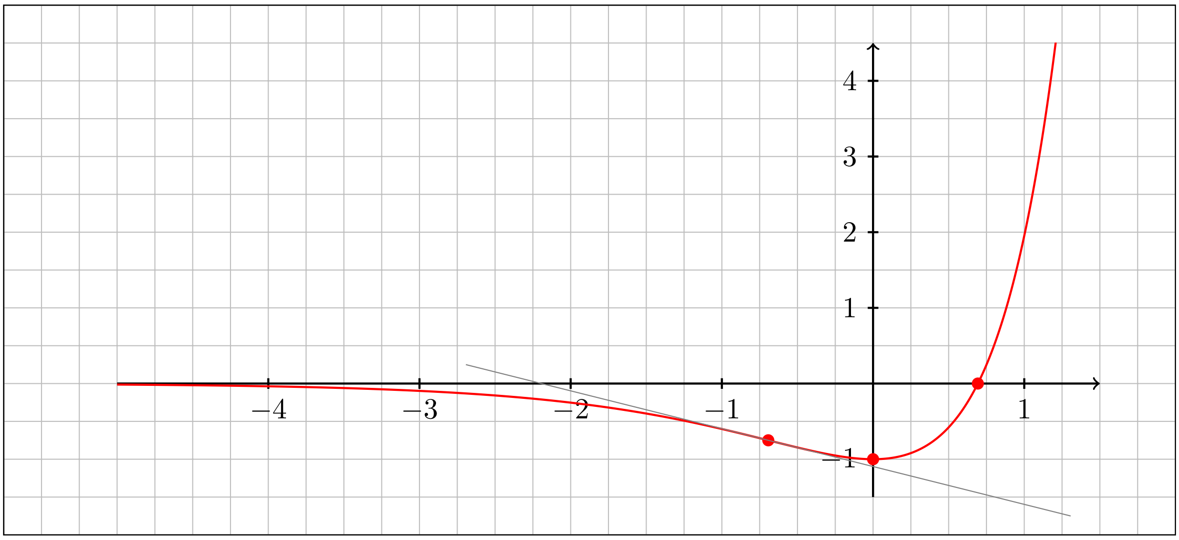
(d) Geben Sie alle Wendepunkte mit den Steigungen der Wendetangenten an:

Es ist $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \ln(1/2) = -\ln 2$.
Setzen wir diesen Wert in die dritte Ableitung ein, so erhalten wir $f'''(-\ln 2) \neq 0$.
Der Graph von f hat also bei $(-\ln 2, -3/4)$ einen Wendepunkt.
Die Steigung der Wendetangenten beträgt $f'(-\ln 2) = -1/2$.

(e) Geben Sie das asymptotische Verhalten von f für $|x| \to \infty$ an.

Für $x \to +\infty$ strebt f bestimmt gegen $+\infty$ bzw. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
Es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(f) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.
(*Hinweise*: $\ln 2 \approx 0,69$; **Achsen geeignet skalieren**; **kein Bleistift!**)



Korrekturanmerkung:

(a) **Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt einen Punkt.**
Ist genau die richtige Nullstelle angegeben, so ergibt dies einen weiteren Punkt.

(b) **Jede richtige Ableitung ergibt einen Punkt.**

(c) **Die Funktion f besitzt genau ein Minimum. Einen Punkt gibt es für dessen richtige Koordinaten, einen für die richtige Klassifikation.**
Eventuell sind Folgefehler aus Teilaufgabe (b) zu beachten.

(d) **Die Funktion f besitzt genau einen Wendepunkt. Einen Punkt gibt es für dessen richtige Koordinaten, einen für die richtige Tangentensteigung in diesem Punkt.**
Eventuell sind Folgefehler aus Teilaufgabe (b) zu beachten.

(e) **Es ist das asymptotische Verhalten für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ zu untersuchen.**
Jede richtige Aussage ergibt $0,5$ Punkte.

(f) **Jeweils $1/3$ Punkte gibt es für:**

- **die zum Ergebnis aus (a) passende Lage der Nullstelle;**
- **die zum Ergebnis aus (c) passende Lage des Tiefpunkts;**
- **die zum Ergebnis aus (d) passende Lage des Wendepunktes;**
- **die zum Ergebnis aus (e) passende Asymptotik für $x \to \infty$;**
- **die zum Ergebnis aus (e) passende Asymptotik für $x \to -\infty$;**
- **ein ordentliches Gesamtbild (saubere Darstellung, Koordinatenachsen korrekt beschriftet, etc.)**

Zusammenfassend können in diesem Aufgabenteil maximal 2 Punkte erziehlt werden.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Finden Sie Beispiele von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g nicht identisch Null, welche die angegebenen Bedingungen erfüllen:

(a) g ist stetig in $x_0 = 1$, f ist nicht stetig in x_0 und $f \cdot g$ ist stetig in x_0.

z.B. wähle man $g(x) = x - 1$ und $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 1 \\ 0, & \text{für } x < 1 \end{cases}$.

(b) f ist nirgendwo stetig aber $f \cdot g$ ist in $x_0 = 0$ differenzierbar.

z.B. wähle man $g(x) = x^2$ und $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

(c) f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$ aber f^2 ist in x_0 differenzierbar mit Ableitung 0.

z.B. wähle man $f(x) = |x|$.

Korrekturanmerkung:

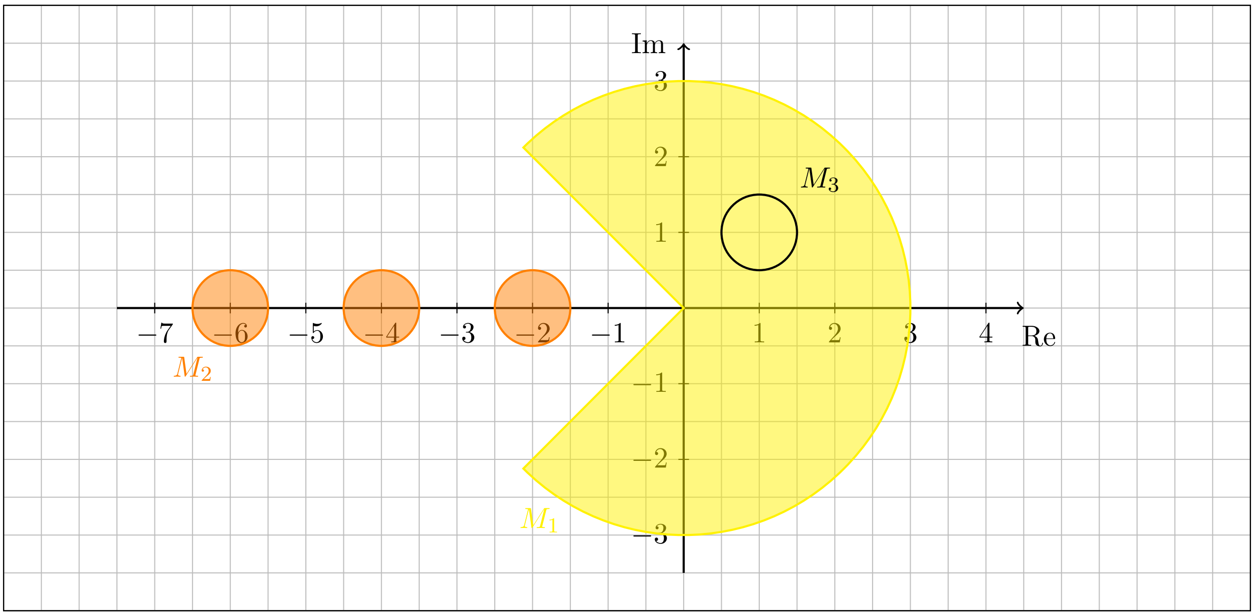
- **Jedes Paar offensichtlich richtiger Beispiele ergibt einen Punkt.**

Aufgabe 4 (4 Punkte) Skizzieren Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlen, nutzen Sie dazu den untenstehenden karierten Kasten.
(*Hinweise:* **Achsen geeignet skalieren; kein Bleistift!**)

(a) $M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 3 \wedge \arg(z) \notin \left] \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right[\right\}$

(b) $M_2 := \bigcup_{n=1}^{3} \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z + 2n| \leq \frac{1}{2} \right\}$

(c) $M_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z - 1/2 - \mathrm{i}} \right) = 1 \right\}$



Korrekturanmerkung:

- **Die Teilaufgaben (a) und (b) ergeben jeweils einen Punkt.**
- **Teilaufgabe (c) ergibt zwei Punkte.**

Aufgabe 5 (5 Punkte) Tragen Sie jeweils ein, ob die angegebenen Mengen in $\mathbb{R}$ offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt sind (**J** für "ja", **N** für "nein"):

Menge	offen	abgeschlossen	beschränkt	kompakt
$[2,3] \cup [5,8]$	N	J	J	J
$]2,3[\cup]5,8[$	J	N	J	N
$[2,3] \cup]5,8[$	N	N	J	N
$\mathbb{R}$	J	J	N	N
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[1+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}\right]$	J	N	J	N

Korrekturanmerkung:

- **Jede korrekte Zeile ergibt einen Punkt.**
- **Die ersten 3 Spalten sind unabhängig voneinander, bei der letzten Spalte sind Folgefehler aus der zweiten und dritten Spalte zu beachten.**

Aufgabe 6 (5 Punkte) Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, für die die folgenden Potenzreihen konvergieren.

(a)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$	konvergiert für alle $x \in$	$]-1,1]$
(b)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{3n}\right)(x+1)^n$	konvergiert für alle $x \in$	$]-2,0[$
(c)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}\,(x-4)^n$	konvergiert für alle $x \in$	$[3,5]$
(d)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3^n+2^n)\,x^n$	konvergiert für alle $x \in$	$]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}[$

Korrekturanmerkung:

- **Die Teilaufgaben (a) und (c) ergeben jeweils 1,5 Punkte.**
  (Einen für das richtige Intervall, 0,5 für die richtigen Ränder)
- **Die Teilaufgaben (b) und (d) ergeben jeweil 1 Punkt.**

Aufgabe 7 (6 Punkte) Geben sie an, ob folgende Reihen konvergieren (**J** für "ja", **N** für "nein").

(a)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)}{(n+1)^3}$	J
(b)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{5^n}$	N
(c)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$	J
(d)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$	J
(e)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+1}$	N
(f)	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2+n}{n}^{-\frac{1}{n}}$	N

Korrekturanmerkung:

- **Für jede richtige Antwort werden $+1$ Punkte vergeben, für jede falsche Antwort -1 Punkte.**

Aufgabe 8 (3 Punkte)

(a) Geben Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an.

(b) Es sei $\alpha > 1$. Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x \text{ für } x \in]0, \infty[$$

durch Anwendung des Mittelwertsatzes.

Lösung:

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a, b[$. Dann gilt:

$$\exists \xi \in]a, b[: f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(b) Setze $f(x) := (1 + x)^\alpha$.
Mittelwertsatz im Intervall $[0, x]$ angewandt liefert

$$\exists \xi \in]0, x[: \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x - 0} = \alpha(1+\xi)^{\alpha-1} > \alpha \text{ (da } (1+\xi) > 1 \text{ und } \alpha - 1 > 0).$$

Multiplikation mit $x > 0$ liefert $(1 + x)^\alpha - 1 > \alpha x$.

Korrekturanmerkung:

- **Die korrekte Formulierung des Mittelwertsatzes aus Teilaufgabe (a) ergibt einen Punkt.**
- **Teilaufgabe (b) ergibt 2 Punkte, einen für die korrekte Wahl der Funktion, einen für die korrekte Folgerung aus dem Mittelwertsatz.**

Aufgabe 9 (3 Punkte) Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade, so gilt

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot f^{(n)}(-x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade und beliebig oft differenzierbar, so treten in der Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ nur gerade Potenzen auf.

Lösung:

(a) Vollständige Induktion nach n:
Induktionsanfang $n = 0$: $f^{(0)}(x) = f(x) = f(-x) = (-1)^0 f^{(0)}(x)$
Induktionsschluss: Es sei $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot f^{(n)}(-x)$ bereits bewiesen (Induktionsvoraussetzung). Dann folgt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n)}(x) &\overset{\text{Ind.vorauss.}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((-1)^n \cdot f^{(n)}(-x)\big) \\ &\overset{\text{Kettenregel}}{=} (-1)^n \big(f^{(n)}\big)'(-x) \cdot (-1) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(-x) \end{aligned}$$

(b) Ist f gerade, so folgt für die n-te Ableitung in $x_0 = 0$ nach der Formel aus Teilaufgabe (a), dass

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

Ist n ungerade, so erhalten wir, dass $f^{(n)}(0) = -f^{(n)}(0)$, d.h. $f^{(n)}(0) = 0$. Da der n-te Taylorsummand bei Entwicklung in $x_0 = 0$ aber durch $f^{(n)}(0)/n! \cdot x^n$ gegeben ist verschiwnden alle Koeffizienten der ungeraden Potenzen.

Korrekturanmerkung:

- **Der Induktionsbeweis in Teilaufgabe (a) ergibt 2 Punkte, diese verteilen sich wie folgt:**
  - **der Induktionsanfang ergibt $0,5$ Punkte,**
  - **das Kenntlichmachen der Induktionsvorausetzung im Induktionsschritt ergibt $0,5$ Punkte,**
  - **die Verwendung / das Zitieren der Kettenregel im Induktionsanfang bzw. Induktionsschritt ergibt $0,5$ Punkte,**
  - **wenn der Induktionsschhritt insgesammt richtig ist werden nochmals $0,5$ Punkte vergeben.**
- **Teilaufgabe (b) ergibt einen Punkt ($0,5$ Punkte für die korrekte Nennung des n-ten Taylorsummanden, $0,5$ für die korrekte Folgerung aus Teilaufgabe (a)).**

Aufgabe 10 (2 Punkte) Ordnen Sie folgenden Funktionen ihre Taylorreihen im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ zu. Verbinden Sie dabei einfach die entsprechenden Kästchen duch eine deutliche Linie.

$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sin x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$\cos x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$
e^x	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
$\ln(x+1)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Korrekturanmerkung:

- **Jede korrekte Vergindung ergibt 0,5 Punkte.**
- **Die letzte Verbindung ergibt sich dabei aus dem Schubfachprinzip und ist 0 Punkte wert.**
- **Es muss deutlich erkennbar sein wie die Linien verlaufen, ist dies nicht der Fall so werden entsprechend viele Punkte abgezogen.**