Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Scheinklausur 3

Termin:	*27.03.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen. Verwendete Sätze sind zu benennen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*90 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	Σ

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition der *Kompaktheit* für Teilmengen von $\mathbb{R}$ an.

(b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass das Bild $f([a,b])$ kompakt ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte) Wir betrachten die rekursiv gegebene Folge mit

$$a_1 := 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := \ln(1 + a_n).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie deren Grenzwert.

(b) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent?

Aufgabe 3 (8 Punkte)

(a) Formulieren Sie den *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche stetig auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und differenzierbar auf $I \setminus \{a\}$ für ein $a \in I$ ist. Desweiteren existiere der Grenzwert $c := \lim_{x\to a} f'(x)$. Zeigen Sie, dass f auch in a differenzierbar ist und $f'(a) = c$ gilt.

(c) Bleibt die Aussage aus Teilaufgabe **(b)** gültig, wenn wir auf die Voraussetzung der Stetigkeit verzichten? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 4 (8 Punkte) Gegeben Sei eine Folge von Funktionen

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x \cdot (1-x)^n.$$

(a) Geben Sie die Definition der punktweisen Konvergenz auf $[0,1]$ an.

(b) Bestimmen Sie die punktweise Grenzfunktion der Funktionenfolge f_n für alle $x \in [0,1]$.

(c) Zeigen Sie, dass f_n gleichmäßig bzgl. $x \in [0,1]$ konvergiert.