Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Scheinklausur 3

Termin:	*27.03.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen. Verwendete Sätze sind zu benennen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*90 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	Σ

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition der *Kompaktheit* für Teilmengen von $\mathbb{R}$ an.

(b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass das Bild $f([a,b])$ kompakt ist.

Lösung 1.

(a) Verschiedene Definitionen sind denkbar: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn

- sie beschränkt und abgeschlossen ist.
- jede Folge in M eine konvergente Teilfolge enthält. 1
- jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält.

(b) Es sind drei Beweise denkbar:

- Das Bild jeder abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist wieder abgeschlossen. Dies haben wir in Aufgabe 9.5 (b) gezeigt: Betrachtet man das Komplement einer abgeschlossenen Menge, so ist dieses offen, bzw. dessen Urbild wieder offen. Das Komplement dieses offenen Urbildes ist aber gerade das gesuchte Urbild der abgeschlossenen Menge und ist damit abgeschlossen. D.h. $f([a,b])$ ist abgeschlossen. Da f auf dem 2
  kompakten Intervall $[a,b]$ beschränkt ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|f(x)| < M$ für alle
  $x \in [a,b]$. Damit ist $f([a,b])$ enthalten in $[-M, M]$, also beschränkt. 1
  Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass $f([a,b])$ beschränkt und abgeschlossen ist, damit
  ist $f([a,b])$ nach obiger Definition kompakt. 1
- f nimmt als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ ein Minimum $\check{f}$ und ein
  Maximum $\hat{f}$ an. Nach dem Zwischenwertsatz werden auch alle Werte zwischen $\check{f}$ und $\hat{f}$ 1
  mindestens einmal getroffen. Es ist damit 2

  $$f([a,b]) = \left[\check{f}, \hat{f}\right]$$

  und wir sehen insbesondere, dass $f([a,b])$ kompakt ist. 1
- Mit Folgenkompaktheit: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im Bild $f([a,b])$. Dann existiert eine Folge
  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$ mit der Eigenschaft, dass $f(x_n) = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $[a,b]$ aber 1
  kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x \in [a,b]$. Wegen 1
  Stetigkeit von f folgt nun

  $$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x),$$ 1

  d.h. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält ebenfalls eine konvergente Teilfolge und $f([a,b])$ ist kompakt. 1

Aufgabe 2 (8 Punkte) Wir betrachten die rekursiv gegebene Folge mit

$$a_1 := 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := \ln(1 + a_n).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie deren Grenzwert.

(b) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent?

Lösung 2.

(a) Wir zeigen, dass die gegebene Folge monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Die Konvergenz der Folge folgt dann aus dem Hauptsatz über monotone Folgen. 1
Zur Monotonie: Induktionsanfang: Es sind $a_1 = 1$ und $a_2 = \ln 2 < 1 = a_1$ (da $2 < \mathrm{e}$). Induktionsschritt: Sei nun $a_{n+1} < a_n$, dann ist auch $1 + a_{n+1} < 1 + a_n$ bzw. wegen Monotonie des Logarithmus

$$a_{n+2} = \ln(1 + a_{n+1}) < \ln(1 + a_n) = a_{n+1}.$$

Wir haben also induktiv gezeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt. 2
Zur Beschränktheit: Wir zeigen induktiv, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Induktionsanfang: Es ist $a_1 = 1 > 0$. Induktionsschritt: Falls $a_n > 0$ auch $1 + a_n > 1$ und damit

$$\ln(1 + a_n) > 0. \qquad 2$$

Für die Berechnung des Grenzwertes gehen wir in $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ zum Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ über und erhalten

$$a = \ln(1 + a). \qquad 0{,}5$$

Diese Gleichung besitzt nur die Lösung $a = 0$. Weitere Lösungen sind wegen

$$0 + a - \frac{a^2}{2(1+\xi)^2} < a \qquad 0{,}5$$

für $a \neq 0$ und ein $\xi \in (0, a)$ ausgeschlossen. Die verwendete Ungleichung erhält man z.B. mit Hilfe der Taylorreihe und dem Restglied nach Lagrange. 1

(b) In Teilaufgabe **(a)** haben wir gezeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt und eine Nullfolge ist. Die gegebene Reihe konvergiert also nach dem Leibnizkriterium. 1

Aufgabe 3 (8 Punkte)

(a) Formulieren Sie den *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche stetig auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und differenzierbar auf $I \setminus \{a\}$ für ein $a \in I$ ist. Desweiteren existiere der Grenzwert $c := \lim_{x\to a} f'(x)$. Zeigen Sie, dass f auch in a differenzierbar ist und $f'(a) = c$ gilt.

(c) Bleibt die Aussage aus Teilaufgabe **(b)** gültig, wenn wir auf die Voraussetzung der Stetigkeit verzichten? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung 3.

(a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, wobei $a < b$ sei und sei f auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$ so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ 2

gilt.

(b) Wir betrachten den Differenzenquotienten von f an der Stelle von a und verwenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für hinreichend kleines $|h| > 0$

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{a + h - a} = f'(\xi_h), \tag{1}$$ 1

wobei $\xi_h \in] \min\{a, a - h\}, \max\{a, a + h\}[$ ist. Aus dieser Information erhalten wir

$$a - |h| < \xi_h < a + |h|.$$ 1

Das Einschließungskriterium ergibt $\lim_{h\to 0} \xi_h = a$. Nun bilden wir den Limes auf beiden Seiten 1
von (1) und erhalten unter Verwendung der Voraussetzung $c := \lim_{x\to a} f'(x)$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(\xi_h) = c,$$ 1

was die Behauptung liefert.

(c) Die Aussage gilt nicht mehr. Wir betrachten hierfür

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{, falls } x = 0. \end{cases}$$ 1

Offensichtlich gilt $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, wobei $x \neq 0$ gelte. Die Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist auch klar. Jedoch ist f in 0 noch nicht einmal stetig, was bedeutet, dass f in 0 auch nicht differenzierbar sein kann. 1

Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Aufgabe 4 (8 Punkte) Gegeben Sei eine Folge von Funktionen

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x \cdot (1-x)^n.$$

(a) Geben Sie die Definition der punktweisen Konvergenz auf $[0,1]$ an.

(b) Bestimmen Sie die punktweise Grenzfunktion der Funktionenfolge f_n für alle $x \in [0,1]$.

(c) Zeigen Sie, dass f_n gleichmäßig bzgl. $x \in [0,1]$ konvergiert.

Lösung 4.

(a) f_n konvergiert punktweise auf $[0,1]$ gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,genau dann wenn folgende Aussage gelte

$$\forall x \in [0,1]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_{\varepsilon,x}\ \forall n > N_{\varepsilon,x} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$ 1

(b) Falls $x \in \{0,1\}$ ist $f_n(x) = 0$, was bedeutet $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 =: f(x)$. Nun sei $0 < x < 1$, dann betrachten wir

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| = |x| \cdot |1-x|^n \leq |1-x|^n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

da $|1-x| = 1-x < 1$ ist. Die Grenzfunktion ist somit $f(x) := 0$ für alle $x \in [0,1]$. 2

(c) Zuerst berechnen wir in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, dass Maximum von f_n auf $[0,1]$, welches existiert, weil f_n stetig auf dem kompakten Intervallen $[0,1]$ ist. Wir sehen, dass f_n unendlich oft differenzierbar ist auf $]0,1[$, weshalb wir die Ableitung berechnen

$$f_n'(x) = (1-x)^n - nx(1-x)^{n-1},$$ 1

um die Extremstellen von f_n zu bestimmen. Wir sehen

$$f_n'(x) = (1-x)^n - nx(1-x)^{n-1} = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{n,1} = 1 \text{ oder } x_{n,2} = \frac{1}{n+1}.$$ 1

An der Stelle $x_{n,2} = \frac{1}{n+1}$ muss das Maximum von f_n liegen, denn f_n ist positiv auf $[0,1]$ und an den Rändern null, was bedeutet, dass das Maximum im Inneren angenommen werden muss. Für die gleichmäßige Konvergenz müssen wir zeigen, dass 1

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Wir wissen schon, dass f_n an der Stelle $x_{n,2}$ sein Maximum annimmt, was folgendes ergibt

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |x||1-x|^n = \left|\frac{1}{n+1}\right| \left|1 - \frac{1}{n+1}\right|^n = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Die rechte Seite geht gegen null für $n \to \infty$, was die gleichmäßige Konvergenz von f_n auf $[0,1]$ beweist. 2