Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 1

[...] Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.
(Bertrand Russell; 1872-1970)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

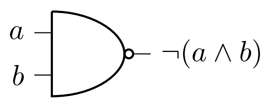
1.1. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen und B eine weitere Menge. Zeigen Sie, dass

(a) $B \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B \setminus A_i)$, **(b)** $B \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (B \setminus A_i)$.

1.2. Ein Logikgatter ist ein elektronisches Bauteil, welches logische Operationen wie z.B. $\wedge$, $\vee$ oder $\neg$ realisiert. Wir betrachten in dieser Aufgabe ein NAND-Gatter (**N**ot **AND**) welches durch folgende Wahrheitswerttabelle gegeben ist:

a	b	$a \,\mathrm{NAND}\, b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Zur Darstellung des entsprechenden Bauteils in Schaltplänen verwenden wir folgendes Symbol:



(a) Realisieren Sie allein durch Hintereinanderschaltung von NAND-Gattern die logischen Ausdrücke $\neg a$, $a \wedge b$ und $a \vee b$. Dies zeigt bereits das sich auch jeder komplexere logische Ausdruck allein mit Hilfe des NAND-Gatters realisieren lässt.

(b) Realisieren Sie allein unter Verwendung von NAND-Gattern die Ausdrücke $\neg a \vee b$ und $(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$. Versuchen sie dabei mit möglichst wenigen Bauteilen auszukommen.

Votieraufgaben

1.3. Beweisen Sie die Implikation **(a)** und mindestens zwei der Äquivalenzen **(b)**-**(f)**:

(a) $\big(p \wedge (p \to q)\big) \to q$
(b) $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
(c) $\big((p \to q) \wedge (p \to \neg q)\big) \Leftrightarrow \neg p$
(d) $(p \wedge \neg q \to f) \Leftrightarrow (p \to q)$
(e) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
(f) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

f bezeichnet dabei diejenige Aussage, welche stets den Wahrheitswert "falsch" annimt.
Aus welchen der Tautologien werden *direkter Beweis*, *Fallunterscheidung*, *Kontraposition* und *Widerspruch* abgeleitet?

Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

1.4. Wir schreiben $a \mid b$ (sprich a teilt b) für $a, b \in \mathbb{N}$, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot n = b$ gibt.
Für folgenden Beweis ist leider die Formulierung des zugehörigen Satzes verloren gegangen. Formulieren Sie also selbst einen Satz, welcher durch die folgende Argumentation bewiesen wird.

Beweis. Ist a gerade, dann folgt $2 \mid a$, und es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2 \cdot n = a$. Damit ist aber

$$a^2 = (2 \cdot n)^2 = 2 \cdot (2n^2)$$

mit $2n^2 \in \mathbb{N}$.
Ist a^2 gerade, dann folgt $2 \mid a^2$. Angenommen a ist ungerade, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a = 2 \cdot n + 1$. Damit ist aber

$$a^2 = (2n+1)^2 = 2 \cdot (2n^2 + 2n) + 1$$

mit $2n^2 + 2n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu $2 \mid a^2$. $\square$

1.5. **(a)** Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sei durch

$$(a, b) \sim (c, d) \qquad :\Leftrightarrow \qquad ad = bc$$

eine Relation gegeben.
Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Beschreiben Sie die zugehörigen Äquivalenzklassen.

(b) Sei M eine Menge mit Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$. Für $M_1, M_2 \in \mathcal{P}(M)$ setzen wir

$$M_1 \prec M_2 \qquad :\Leftrightarrow \qquad M_1 \subseteq M_2.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \prec)$ eine teilweise geordnete Menge ist. Ist $(\mathcal{P}(M), \prec)$ auch geordnet?

1.6. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$, **(b)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x(x-1)(x-2)$,
(c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/x$, **(d)** $f : [-\pi, \pi] \to [-\pi, \pi],\ x \mapsto \sin(x)$.

Zusatzaufgaben

1.7. Lernen Sie die Buchstaben des griechischen Alphabets, Sie werden diese noch oft benötigen.

Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ε, ϵ	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	ϑ, θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
My	μ	M
Ny	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omikron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	P
Sigma	ς, σ	Σ
Tau	τ	T
Ypsilon	υ	Υ
Phi	φ, ϕ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
bartosch.ruszkowski@mathematik.uni-stuttgart.de