Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 2

Numbers written on restaurant bills within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe. This single statement took the scientific world by storm. It completely revolutionized it. So many mathematical conferences got held in such good restaurants that many of the finest minds of a generation died of obesity and heart failure and the science of math was put back by years. (Douglas Adams in Life, the Universe and Everything. 1952-2001)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

2.1. Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ ein geordneter Körper.

(a) Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (a + kb) = (n + 1)(a + nb/2).$$

(b) Zeigen Sie die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{K}$, $x \geq -1$. Unter welchen Vorraussetzungen gilt die strikte Ungleichung, d.h. mit “$>$” anstelle von “$\geq$”?

2.2. Zeigen Sie für eine Abbildung $f : A \to B$ und Teilmengen $C, C_1, C_2 \subseteq A$ und $D \subseteq B$, dass

(a) $f(C_1 \cap C_2) \subseteq f(C_1) \cap f(C_2)$,
(b) $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$,
(c) $C \subseteq f^{-1}(f(C))$,
(d) $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$.

Finden Sie für die Gleichheit in **(a)** ein Gegenbeispiel.

Votieraufgaben

2.3. Sei $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n'$ die Nachfolgerfunktion auf den natürlichen Zahlen. Auf $\mathbb{N}$ seien eine Addition $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und eine Multiplikation $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} n + 1 &:= S(n), \\ n + S(m) &:= S(n + m), \\ n \cdot 1 &:= n, \\ n \cdot S(m) &:= n \cdot m + n. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$1 + 1 = 2, \quad 2 + 3 = 5, \quad 2 \cdot 2 = 4.$$

2.4. Zeigen Sie: Jede nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.
(*Hinweis:* Nehmen Sie an M habe kein kleinstes Element und zeigen Sie induktiv, dass $M = \emptyset$.)

2.5. **(a)** Formulieren Sie eine Version des Induktionsprinzips mit welcher sich die Aussage in Aufgabenteil **(b)** zeigen lässt.

(b) Seien

$$a_0 := 0,\ a_1 := 2 \text{ und } a_{n+1} := 4 \cdot (a_n - a_{n-1}) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie induktiv, dass $a_n = n \cdot 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt.

2.6. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv (bzw. surjektiv), so auch ihre Komposition $g \circ f$.

(b) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

(c) Finden Sie eine nicht surjektive Funktion $f : A \to B$ und eine nicht injektive Funktion $g : B \to C$, sodass $g \circ f$ bijektiv ist.