Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 3. November - 9. November 2014**

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 3

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen,
erwiesen sich viele von ihnen als falsch.
(Bertrand Russell; 1872-1970)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

3.1. Zeigen Sie, dass

$$\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3.2. Seien $(\mathbb{K}, \leq)$ ein geordneter Körper und $x \in \mathbb{K}$.
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

(a) $|x-1| \geq 2$ **(b)** $|2x-1| < x$ **(c)** $|x+1| \geq |4x-2|$

Votieraufgaben

3.3. **(a)** Seien $(\mathbb{K}, \leq)$ ein geordneter Körper und $x \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie:

(i) Ist $x \neq 0$, so ist auch $x^{-1} \neq 0$ und $(x^{-1})^{-1} = x$.
(ii) Ist $x \neq 0$, so ist $x^2 > 0$.
(iii) Ist $x > 0$, so ist auch $x^{-1} > 0$.
(iv) Sei $a > 0$, dann ist $|x| < a$ genau dann, wenn $x \in]-a, a[$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \ \forall y \in \mathbb{K} \ \exists! z \in \mathbb{K} : \ x \cdot z = y.$$

3.4. Seien $(\mathbb{K}, \leq)$ ein geordneter Körper, in dem für jede positive Zahl eine Wurzel $\sqrt{\cdot}$ definiert ist, und $x, y \in \mathbb{K}$, $x, y > 0$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Ungleichungen zwischen den verschiedenen Mittelwerten (*harmonisches*, *geometrisches*, *arithmetrisches* und *quadratisches* Mittel) gelten:

$$\min\{x, y\} \leq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \max\{x, y\}.$$

Unter welchen Bedingungen gilt jeweils die Gleichheit?

3.5. Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $x, y \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass

$$(x-y) \cdot \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = x^{n+1} - y^{n+1}.$$

3.6. Stellen Sie eine Vermutung über das Konvergenzverhalten der folgenden Folgen auf und beweisen Sie diese allein unter Verwendung der Definition für Konvergenz aus der Vorlesung:

$$a_n := \sin(n\pi/2)\left(1 - \frac{1}{n}\right), \qquad b_n := \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - n + 1/4}, \qquad c_n := n\sqrt{n+1}.$$