Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 4

Pauca sed matura.
(Wahlspruch von Johann Carl Friedrich Gauß; 1777-1855)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

4.1. Entscheiden Sie, ob folgende Reihen konvergieren:

$$\textbf{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right), \qquad \textbf{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \qquad \textbf{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right).$$

4.2. **(a)** Sei $(\mathbb{K},\leq)$ ein geordneter Körper und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

der Mittelwerte gegen a konvergiert.

(b) Gilt die Umkehrung der Aussage aus Teilaufgabe **(a)**, d.h. Folgt aus der Konvergenz der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Votieraufgaben

4.3. Zeigen Sie: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen für welche die Ungleichung

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

für alle n ab einem gewissen Startindex N_0 erfüllt ist. Konvergieren nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den selben Grenzwert a, so ist auch

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

4.4. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen derart, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen derart, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Dann divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.5. Für $c \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Folge rationaler Zahlen durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $a_n^2 \geq c$ und $a_n > 0$ für alle $n \geq 2$ gilt.

(b) Wir betrachten nun eine Hilfsfolge, welche durch $b_n := a_n^2 - c$, $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Verwenden Sie Teilaufgabe **(a)** um zu zeigen, dass

$$0 \leq b_{n+1} \leq \frac{1}{4} \cdot b_n$$

für alle $n \geq 2$ erfüllt ist.

(c) Schließen Sie aus Teilaufgabe **(b)**, dass $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = c$.

(d) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent?

4.6. Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ ein geordneter Körper und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \gamma |a_n - a_{n-1}|$$

für alle $n \geq 2$ und einem $\gamma \in [0, 1[$. Zeigen Sie, dass dann

$$|a_{n+k} - a_n| \leq \frac{\gamma^{n-1}}{1-\gamma} |a_2 - a_1|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ erfüllt ist und damit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist.