Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 17. November - 23. November 2014

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 5

Do not worry about your difficulties in Mathematics.
I can assure you mine are still greater.
(Albert Einstein; 1879-1955)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

5.1. Gegeben sei die folgende Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j 10^{-j} \quad (= 0, a_1 a_2 a_3 \dots)\ ,$$

wobei $a_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass diese Reihe in $\mathbb{R}$ konvergiert.

5.2. Für $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ sei

$$I_n := [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} | a_n \le x \le b_n\}, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zusätzlich gelte für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Eigenschaft

$$a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n.$$

Beweisen Sie, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Votieraufgaben

5.3. Zeigen Sie, dass die Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ monton fallend und beschränkt ist.

5.4. Man bestimme folgende Grenzwerte

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n-1}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{6n}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n}$.

5.5. Man beweise die Konvergenz der folgenden Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5.6. **(a)** Gegeben sei eine relle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweisen Sie: Wenn die beiden Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den selben Grenzwert konvergieren, dann konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Beweisen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

konvergiert.