Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 24. November - 30. November 2014

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 6

Mathematics consists in proving the most obvious thing in the least obvious way.
(G. Pólya; 1887-1985)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

6.1. Im Folgenden sollen weder die Existenz noch irgendwelche Eigenschaften der Quadratwurzel als bekannt vorausgesetzt werden.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ die Menge

$$\mathcal{Q}(a) := \{x \geq 0 \,:\, x^2 \leq a\}$$

nicht leer und nach oben beschränkt ist.

(b) Wir definieren nun

$$\sqrt{a} := \sup\left(\mathcal{Q}(a)\right).$$

für alle $a \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann $\sqrt{a} \geq 0$ (bzw. $\sqrt{a} > 0$ für $a \neq 0$) und

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

gelten.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

für alle $a, b \geq 0$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{c^2} = |c|$$

für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt.

6.2. **(a)** Zeigen Sie:
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und S eine obere Schranke an M. Angenommen es gibt eine Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M welche gegen S konvergiert, so folgt

$$S = \sup\left(M\right).$$

(b) Gilt die Umkehrung der Aussage aus Teilaufgabe **(a)**?

(c) Formulieren Sie eine den Aussagen in **(a)** und **(b)** entsprechende Aussage für das Infimum.

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
bartosch.ruszkowski@mathematik.uni-stuttgart.de

Votieraufgaben

6.3. Geben Sie das Supremum und Infimum der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$ an:

$$M_1 = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,:\, n, m \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_2 = \left\{ (-1)^n \left(\frac{1+n}{n} \right)^n \,:\, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ \frac{(-1)^m}{n} \,:\, n, m \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_4 = \left\{ \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

6.4. Seien A, B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Beweisen oder Widerlegen Sie:

(a) $\sup(-A) = -\inf(A)$, wobei $-A := \{-a \,:\, a \in A\}$;
(b) $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$, wobei $A + B := \{a + b \,:\, a \in A, b \in B\}$;
(c) $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$, wobei $A \cdot B := \{ab \,:\, a \in A, b \in B\}$;
(d) $\sup(A^{-1}) = (\inf(A))^{-1}$, wobei $A^{-1} := \{a^{-1} \,:\, a \in A\}$ falls $0 \notin A$ und $\inf(A) \neq 0$.
(e) $\inf(A \cap B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$, falls $A \cap B \neq \emptyset$.

6.5. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$.
(Hinweis: Drücken Sie a_{n+1} durch a_n aus.)

6.6. **(a)** Zeigen Sie, dass der Kettenbruch

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert des Kettenbruchs aus Teilaufgabe **(a)**.

Zusatzaufgaben

6.7. Finden Sie die Grenzwerte aus den Aufgaben **6.5** und **6.6** in folgendem Bild: