Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 7

We have shown the symbol $\sqrt{-a}$ to be void of meaning, or rather self-contradictory and absurd. Nevertheless, by means of such symbols, a part of algebra is established which is of great utility.
(Augustus de Morgan; 1806-1871)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

7.1. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der Zahlen

$$\frac{3}{2+\mathrm{i}}, \qquad \frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}, \qquad \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3, \qquad \frac{(5+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})+2\mathrm{i}}{(2+3\mathrm{i})^2-4+\mathrm{i}}, \qquad \left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{2014}.$$

Geben Sie ferner das komplexe Konjugat an.

7.2. Schraffieren Sie die Mengen in der komplexen Ebene:

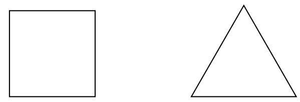
$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(\mathrm{i}z) < 1\},$$
$$M_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-4+3\mathrm{i}| \le |z+2-\mathrm{i}|\},$$
$$M_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z-\mathrm{i}| \le \operatorname{Im}(z+\mathrm{i})\},$$
$$M_4 = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \operatorname{Re}(1/z) \in [-1,1]\}.$$

Votieraufgaben

7.3. Beweisen Sie geometrisch:

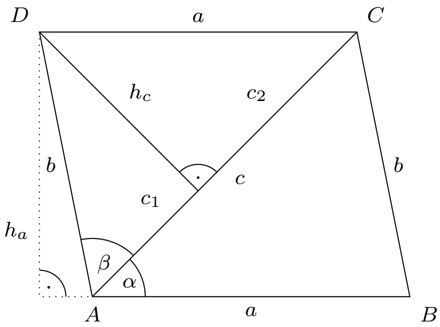
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\varphi$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\varphi$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	"∞"

Hierfür können Sie z.B. die folgenden beiden Figuren nutzen:



© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
bartosch.ruszkowski@mathematik.uni-stuttgart.de

7.4. Der Flächeninhalt des Parallelogramms



lässt sich auf zwei verschiedene Arten berechnen, es ist

$$A = a \cdot h_a = c \cdot h_c.$$

Drücken Sie h_a mit Hilfe von b und $\alpha + \beta$, sowie c_1, c_2 und h_c mit Hilfe von a, b, α und β aus um

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

zu zeigen. *(Hinweis: nutzen Sie, dass* $\sin(\pi - \varphi) = \sin(\varphi)$*)*

7.5. Bekantlich hat die Gleichung $w^2 = z$ für beliebige $z \in \mathbb{C}$ genau zwei Lösungen. Diejenige Lösung mit $\mathrm{Re}\,(w) > 0$ (bzw. $\mathrm{Im}\,(w) \geq 0$ falls $\mathrm{Re}\,(w) = 0$) bezeichnen wir als den *Hauptwert* der Wurzel, geschrieben $\sqrt{z}$.
Zeigen Sie, dass die Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ für $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ die beiden Lösungen

$$z_1 = \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right), \qquad z_2 = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

besitzt.

7.6. Sei $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ der Einheitskreis in der Komplexen Ebene und $\mathrm{i}\mathbb{R} := \{iy : y \in \mathbb{R}\}$ die imaginäre Achse. Wir betrachten eine Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \frac{z-1}{z+1}.$$

Zeigen Sie, dass

$$f(\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}) \subseteq \mathrm{i}\mathbb{R},$$

d.h. $|z| = 1 \wedge z \neq -1 \Rightarrow \mathrm{Re}\,(f(z)) = 0$.
Zusatz:
Schließen Sie daraus den *Satz des Thales*:

Liegen sich zwei Ecken eines Dreiecks auf dem Umkreis gegenüber,
so ist das Dreieck rechtwinklig.