Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 8

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.
(D. Hilbert; 1862-1943 in "Über das Unendliche", Mathematische Annalen, Vol. 95, 1926, S. 170)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

8.1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen und zeichnen Sie diese in der komplexen Ebene:

$$\textbf{(a)}\ z^5 = \mathrm{i}, \qquad \textbf{(b)}\ z^4 = (1+\mathrm{i})/4, \qquad \textbf{(c)}\ z^3 = -1+\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

8.2. **(a)** Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

(b) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Berechnen Sie

$$(z^4 + (2+\mathrm{i})z^3 - (3+2\mathrm{i})z^2 + (1-2\mathrm{i})z - 1 + 3\mathrm{i}) \,:\, (z-1).$$

Votieraufgaben

8.3. Seien M, N endliche Mengen. Zeigen Sie, dass es genau dann eine bijektive Abbildung $M \to N$ gibt, wenn $\#M = \#N$.

8.4. Geben Sie explizit eine bijektive Abbildung

(a) zwischen den Punkten zweier offener Intervalle,
(b) zwischen den Punkten zweier abgeschlossener Intervalle,
(c) zwischen den Punkten eines offenen und eines abgeschlossenen Intervalls,
(d) zwischen dem Intervall $[0,1]$ und $\mathbb{R}$ an.

8.5. Bezeichne

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,:\, a_n \in \{0,1\}\big\}$$

den Raum aller Folgen, welche nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Zeigen Sie, dass $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist.

8.6. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{für } p \in \mathbb{N}, \text{ bzw.} \quad d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|.$$

(a) Die so definierten Abbildungen sind Metriken auf dem $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie dies für d_1, d_2 und d_∞.
(Hinweis: Verwenden Sie, dass $\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$ *für alle* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.*)*

(b) Zeichnen Sie die 2-dimensionalen Einheitskreise

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, d_p(0,x) = 1\}$$

für $p \in \{1, 2, \infty\}$.