Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 9

Die Mathematik ist doch die angenehmste Wissenschaft;
sie und die Astronomie vertreten bei mir Tanzgesellschaften, Konzerte
und andere derartige Belustigungen, die ich nur dem Namen nach kenne.
(Friedrich Wilhelm Bessel; 1784-1846 im Alter von 18 Jahren!)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

9.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \qquad x, y \in X.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\tilde{d}$ wieder eine Metrik auf X definiert und $\tilde{d}(x, y) < 1$ für alle $x, y \in X$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann in (X, d) konvergiert, wenn sie auch in $(X, \tilde{d})$ konvergiert.
Zeigen Sie ferner, dass im Falle der Konvergenz beide Grenzwerte miteinander übereinstimmen.

9.2. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$ bzgl. der gewöhnlichen Metrik ist.

Votieraufgaben

9.3. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Vereinigung und Schnitt zweier abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(b) Abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(c) Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

9.4. Bezeichne $H(M)$ die Menge aller Häufungspunkte einer Menge M. Zeigen Sie, dass

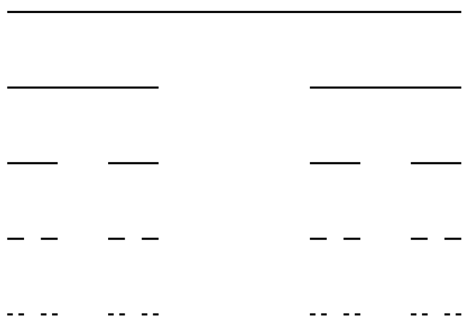
$$H(M \cup N) = H(M) \cup H(N).$$

Gilt die gleiche Aussage auch für den Schnitt?

9.5. Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume und $f : M_1 \to M_2$ stetig.

- **(a)** Zeigen Sie, dass das Urbild $X = f^{-1}(Y)$ jeder offenen Menge $Y \subset M_2$ in M_1 offen ist.
- **(b)** Zeigen Sie, dass das Urbild $\overline{X} = f^{-1}(\overline{Y})$ jeder abgeschlossene Menge $\overline{Y} \subset M_2$ in M_1 abgeschlossen ist.

9.6. Die Menge C_1 entsteht aus dem Intervall $C_0 = [0,1]$ durch Entfernen des mittleren Drittels, d.h. $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Aus C_1 erhalten wir wiederum C_2 durch Entfernen der mittleren Drittel der Intervalle in C_1, d.h. $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$.
Setzen wir diese Vorschrift weiter fort, so erhalten wir eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen, welche jeweils aus ihrem Vorgänger durch Entfernen der mittleren Drittel in allen Intervallen entsteht:



$C_0 = [0,1]$

$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$

$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$

$\vdots$

$\vdots$

Der Schnitt

$$\mathcal{C} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

wird als die *Cantormenge* bezeichnet.

- **(a)** Zeigen Sie, dass $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ nichtleer und kompakt (d.h. beschränkt und abgeschlossen) ist.
- **(b)** Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ keine inneren Punkte besitzt.
- **(c)** Zeigen Sie, dass jeder Punkt in $\mathcal{C}$ ein Häufungspunkt ist.
- **(d)** Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ überabzählbar ist.
  (Hinweis: Finden Sie eine Bijektion $\mathcal{C} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und verwenden Sie Aufgabe 8.5.)