Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 22. Dezember - 11. Januar 2015

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 10

Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.
(Jean-Baptist le Rond D'Alembert; 1717 - 1783)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

10.1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Untersuchen Sie diese Funktion auf Stetigkeit.

10.2. Sei (X, D) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in X$.

(a) Beweisen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x)| \geq (1 - \varepsilon)|f(a)|, \quad \text{für alle } x \in U_\delta(a).$$

(b) Sei nun zusätzlich $f(a) > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung um a gibt, so dass f auf dieser Umgebung strikt positiv ist.

Votieraufgaben

10.3. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Gesucht ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die ...

(a) ... in keinem Punkt auf I stetig ist.

(b) ... stetig auf I, aber nicht gleichmäßig stetig auf I ist.

Das Intervall I darf passend gewählt werden. Begründen Sie warum Ihre gewählten Funktionen die gewünschten Eigenschaften erfüllen.

10.4. Es sei $a > 1$. Leiten Sie die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln

(a) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad (x > 0, y > 0)$,

(b) $\log_a 1 = 0, \quad \log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x, \quad \log_a a = 1, \quad (x > 0)$,

(c) $\log_a(x^y) = y \log_a x, \quad (x > 0, y \in \mathbb{R})$

aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion her.

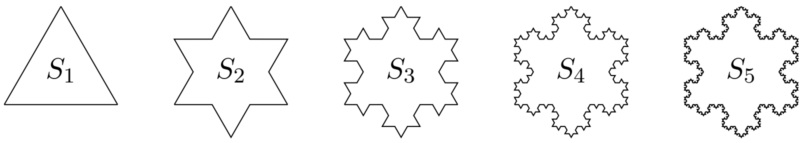
10.5. Es sei $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf I. Zeigen Sie, dass $f(I)$ ein Intervall ist.

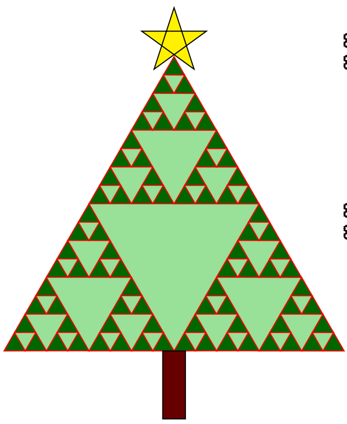
Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

10.6. Sei $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist f strikt monoton.

Zusatzaufgaben

10.7. Die Kochsche Schneeflocken S_n entstehen nach folgender Vorschrift: Anfangsfigur S_0 ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlnge 1cm; die Figur S_n nach dem n-ten Schritt entsteht aus S_{n-1}, indem auf dem mittleren Drittel jeder geradlinigen Berandungstrecke ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Berechnen Sie Umfang U_n und Flcheninhalt F_n der Figur S_n sowie den Grenzwert von U_n und F_n, wenn n gegen unendlich strebt.





μer^2y X-μas, $X \notin \mathbb{R}$
$\wedge$ 1 fröhliches neues Jahr $5 \cdot 13 \cdot 31$