Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 12. Jänner - 18. Jänner 2015

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 11

Natura non facit saltus.
(Gottfried Wilhelm Leibniz; 1646-1716)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

11.1. **(a)** Berechnen Sie die Ableitung der (reellwertigen) Funktion $f(x) = 1/x$ in allen Punkten, in denen f differenzierbar ist, mit Hilfe des Differenzenquotienten.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der (reellwertigen) Funktion $f(x) = x^y$ mit fest gewähltem $y \in \mathbb{R}$ in allen Punkten in denen die Funktion differenzierbar ist.

11.2. **(a)** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen *Fixpunkt* besitzt, d.h. dass es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = c$ gibt.

(c) Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f :]a, b[\to]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ nicht notwendig einen Fixpunkt besitzt.

Votieraufgaben

11.3. **(a)** Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(r) = g(r)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann $f \equiv g$, d.h. $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Verwenden Sie Teilaufgabe **(a)** um zu zeigen, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nicht stetig ist.

11.4. **(a)** Beweisen Sie folgende Aussage aus der Vorlesung:

$$f_1 = \mathcal{O}(g_1) \text{ für } x \to x_0 \ \wedge \ f_2 = o(g_2) \text{ für } x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2) \text{ für } x \to x_0.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{x^2 + 1} = \mathcal{O}(x)$ für $x \to \infty$ und $\sqrt{x^2 + 1} = \mathcal{O}(1)$ für $|x| \to 0$.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\ln x = o(x) \text{ für } x \to \infty,$$
$$\ln x = x - 1 + o(x - 1) \text{ für } |x| \to 1 \text{ und}$$
$$\ln x = o(1/x) \text{ für } |x| \to 0.$$

11.5. In dieser Aufgabe sollen alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gefunden werden, welche die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen:

(a) Zeigen Sie, dass für alle derartigen Funktionen die Bedingung

$$f(nx) = n\, f(x)$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

(b) Schließen Sie aus Teilaufgabe **(a)**, dass für alle derartigen Funktionen

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}\, f(x)$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für alle derartigen Funktionen die Bedingung

$$f(qx) = q\, f(x)$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{Q}$ erfüllen.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass $f(0) = 0$ bzw. $f(-x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ für alle derartigen Funktionen gilt.)

(d) Folgern Sie aus Teilaufgabe **(c)**, dass die Menge der gesuchten Funktionen gerade aus der Menge aller Funktionen der Form $f(x) = cx$ für ein $c \in \mathbb{R}$ besteht.

11.6. Es soll nun, wie in Aufgabe **11.5**, die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gefunden werden, welche die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen:

(a) Zeigen Sie, dass alle derartigen Funktionen die Bedingung $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, falls f eine Nullstelle besitzt.

(c) Wegen den Aussagen in den Teilaufgaben **(a)** und **(b)** können wir für jedes nichttriviale f die Hilfsfunktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \ln(f(x))$$

betrachten. Finden Sie die zugehörige Funktionalgleichung von g sowie deren Lösungen und verwenden Sie diese um die gegebene Funktionalgleichung zu lösen.

Zusatzaufgaben

11.7. Finden Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die

$$f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.