Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 12

Die Mathematik ist dem Liebestrieb nicht abträglich.
(Paul Julius Möbius; 1853-1907; Neurologe und Psychiater)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

12.1. Seien f, g in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ n-fach differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f \cdot g$ in einer Umgebung von x_0 n-fach differenzierbar ist und

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0)$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt.

12.2. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen dort, wo sie differenzierbar sind:

(a) $f(x) = x^{3/2}$ **(b)** $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ **(c)** $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

(d) $f(x) = \ln(x^2)$ **(e)** $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ **(f)** $f(x) = \ln(x^2\, \mathrm{e}^{2x-1})$

(g) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ **(h)** $f(x) = x^x$ **(i)** $f(x) = x^{\ln x}$

Votieraufgaben

12.3. Analysieren Sie die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$ und fertigen Sie eine geeignete[1] Skizze des Graphen an.

12.4. Zeigen Sie, dass

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

für alle $x > 0$, $x \neq 1$. Verwenden Sie die Ungleichung um $2 \cdot \ln 3 - 3 \cdot \ln 2$ nach unten und oben abzuschätzen.

12.5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweifach differenzierbar und $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)\, f(a) + t\, f(b)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ und $t \in [0, 1]$.
(*Bemerkung:* Eine Funktion, für die obige Ungleichung für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, 1]$ erfüllt ist, nennt man *konvex.*)

[1] Eine vollständige Skizze beinhaltet u.a. die Schnitte mit allen Koordinatenachsen sowie die Extrem- und Wendepunkte (mit Wendetangenten), die Darstellung der Monotonie- und Konvexitätsbereiche und alle auftretenden Asymptoten.

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
bartosch.ruszkowski@mathematik.uni-stuttgart.de

12.6. (a) Wir betrachten die Funktion

$$f : [-1,\infty[\to [-1/\mathrm{e},\infty[: \qquad x \mapsto x\,\mathrm{e}^x.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(b) Die inverse Abbildung von f bezeichnen wir als die *Lambertsche W-Funktion*,

$$W : [-1/\mathrm{e},\infty[\to [-1,\infty[: \qquad x \mapsto f^{-1}(x).$$

Berechnen Sie die Ableitung von W.

(c) Wir betrachten die Gleichung $y = x^y$ für $x \in [1, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$. Zeigen Sie, dass für deren Lösung

$$y = -\frac{W(-\ln x)}{\ln x}$$

gilt. Zeigen Sie ferner, dass $y \geq 1$ ist.

(d) Sei $f_1(x) := x$ und

$$f_{n+1}(x) := x^{f_n(x)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in [1, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$ konvergiert und ermitteln Sie den Grenzwert der Folge.

(e) Sei nun

$$f(x) = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}.$$

für $x \in [1, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$. Berechnen Sie die Ableitung von f.