Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 26. Jänner - 1. Feber 2015

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 13

$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{2n}CQ + etc.$
(Aufschrift am Sarkophag Newtons in der Westminster Abbey)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

13.1. **(a)** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver Zahlen. Zeigen Sie, dass dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty,$$

d.h. eine der Reihen konvergiert genau dann, wenn auch die andere Reihe konvergiert.

(b) Verwenden Sie das Kriterium aus (a) um das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 0$$

(in Abhängigkeit von s) zu untersuchen.

13.2. Es sei f in $x_0 \in D(f)$ zweimal differenzierbar. Man zeige mit Hilfe der Regel von *Bernoulli-de L'Hôpital*, dass

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}.$$

Votieraufgaben

13.3. Bestimmen Sie (für alle $a > 0$) die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{e^x - e^{-x}}$ **(b)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-x^4} - \sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}$ **(c)** $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x-1)}{\ln(x+1)}$

(d) $\lim_{x\to 0} x^a \ln x$ **(e)** $\lim_{x\to 0} x^{x^a}$ **(f)** $\lim_{x\to 0} |\ln x|^x$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ **(h)** $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **(i)** $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$

13.4. Seien $f(x) = x + \sin x \cos x$ und $g(x) = f(x)\, e^{\sin x}$.
Überzeugen Sie sich davon, dass $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ nicht existiert und dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cos x}{x + \sin x \cos x + 2\cos x}\, e^{-\sin x} = 0.$$

Haben wir hier ein Gegenbeispiel für die Regel von *Bernoulli-de L'Hôpital* gefunden?

13.5. **(a)** Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit Grenzwert $A \in \mathbb{R}$. Desweiteren gebe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in]0,1[$, so dass

$$A - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = t_n a_n.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\sum_{k=0}^{2n-1} a_k \leq A \leq \sum_{k=0}^{2n} a_k \qquad \text{oder} \qquad \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \geq A \geq \sum_{k=0}^{2n} a_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Verwenden Sie Teilaufgabe **(a)** um e^{-x} und $\ln(x+1)$ für $x > 0$ mit Hilfe der zugehörigen Taylorreihen abzuschätzen.

Aus der Rubrik "Aufgaben mit dem Taschenrechner"

13.6. **(a)** Berechnen Sie die Taylorreihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Punkt $x_0 = 0$. Sie dürfen hierfür verwenden, dass $(\sin(x))' = \cos(x)$ und $(\cos(x))' = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Es soll ein neuer Taschenrechner entwickelt werden[1]. Dieser soll u.a. auch in der Lage sein für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}$ möglichst genaue Werte von $\sin x$ und $\cos x$ auszugeben. Hierfür benötigen die Ingenieure Ihre Mithilfe[2]. Die Designabteilung hat sich bereits auf ein Modell mit einem 8-stelligen Display festgelegt[3]. Für die Berechnung von $\sin x$ und $\cos x$ genügt es (neben eingespeicherten Standardwerten) sin bzw. cos für $x \in (0, \pi/2)$ zu approximieren (warum eigentlich?), dies soll wiederum mit Hilfe der Taylorreihe aus Teilaufgabe **(a)** geschehen. Wie viele Reihenglieder müssen hierfür berechnet werden?[4]

[1] Es gibt ja noch nicht genug.
[2] Keine Ahnung warum, wahrscheinlich in HM nicht richtig aufgepasst.
[3] Sieht einfach cool aus.
[4] Alternativ können Sie auch gleich das fertige Programm einreichen.