Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 2. Feber - 8. Feber 2015

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 14

The important thing in science is not so much to obtain new facts
as to discover new ways of thinking about them.
(Sir William Bragg; 1862-1942)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

14.1. Prüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+4n^2+7n+1}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(4+(-1)^n)^n}$ **(e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2+n}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(2n)}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ **(h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ **(i)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

14.2. Seien $a, b > 0$. Wir betrachten die Reihe

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \cdots + a^nb^{n-1} + a^nb^n + \ldots$$

Verwenden Sie das Wurzel- und Quotientenkriterium um zu untersuchen für welche $a, b > 0$ die Reihe konvergiert.

Votieraufgaben

14.3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Untersuchen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ folgende Reihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\,\left(\frac{x}{n}\right)^n$

14.4. Zeigen Sie: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ positiver Glieder konvergiert, falls es ein $s > 1$ gibt, so dass die Ungleichung

$$-\frac{\ln a_n}{\ln n} \geq s$$

für alle $n \geq N \geq 2$ mit einem Startindex $N \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Gilt hingegen

$$-\frac{\ln a_n}{\ln n} \leq 1$$

für alle $n \geq N \geq 2$ mit einem $N \in \mathbb{N}$, so divergiert die Reihe.
(*Hinweis:* Aufgabe **13.1**.)

14.5. **(a)** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen und $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = A_N b_N + \sum_{k=1}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

mit $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(b) Zusätzlich zu den Vorausetzungen aus Teilaufgabe **(a)** sei nun $|A_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

konvergiert.

14.6. Aus den Vergleichskriterien ergibt sich die Frage nach der Existenz einer universellen Vergleichsfolge, an Hand derer man über die Konvergenz jeder gegebenen Reihe nichtnegativer Summanden entscheiden kann. Die folgenden Sätze beantworten diese Frage negativ:

(a) Zeigen Sie: Für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ positiver Zahlen gibt es eine bestimmt nach $+\infty$ divergente Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty.$$

(*Hinweis:* Eine mögliche Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt sich z.B. aus $a_n b_n = \sqrt{A_{n-1}} - \sqrt{A_n}$ mit $A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.)

(b) Zeigen Sie: Für jede divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ positiver Zahlen gibt es eine Nullfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen, sodass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

immer noch divergiert.