Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Blatt 15

[...] I'm very well acquainted, too, with matters mathematical,
I understand equations, both the simple and quadratical,
About binomial theorem I'm teeming with a lot o' news, (bothered for a rhyme)
With many cheerful facts about the square of the hypotenuse.
I'm very good at integral and differential calculus;
I know the scientific names of beings animalculous:
In short, in matters vegetable, animal, and mineral,
I am the very model of a modern Major-General. [...]
(Major-General's Song from "The Pirates of Penzance"; Gilbert and Sullivan)

15.1. **(a)** Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge mit

$$f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx^2}$$

auf $\mathbb{R}$ konvergiert und auf allen Intervallen der Form $[a, \infty[$ bzw. $]-\infty, -a]$ mit $a > 0$ gleichmäßig konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge mit

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

auf $\mathbb{R}$ konvergiert und auf allen Mengen der Form $\{x : |x| \leq a < 1\}$ oder $\{x : |x| \geq b > 1\}$ gleichmäßig konvergiert.

15.2. In Aufgabe **13.1** haben wir gesehen, dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1/n^s$ für alle $s \in (1, \infty)$ konvergiert. Die Abbildung, welche s auf diesen Grenzwert abbildet, bezeichnen wir als die *Riemannsche Zetafunktion*, d.h.

$$\zeta(s) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\zeta(s)$ auf $(1, \infty)$ stetig differenzierbar ist.

(b) Bezeichne $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen. Begründen Sie formal, dass

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

für alle $s \in (1, \infty)$.

(c) Schließen Sie aus Teilaufgabe **(a)**, dass die Reihe

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

divergiert.
(*Hinweis:* Verwenden Sie, dass $\lim_{s\to 1} (s-1)\zeta(s) = 1$. Den Beweis dieser Aussage verschieben wir in das Sommersemester.)

15.3. **(a)** Vergewissern Sie sich, dass

$$\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

bijektiv ist. Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit arctan, zeigen Sie, dass

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe von $(\arctan x)'$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und schließen Sie daraus auf die Taylorreihe von $\arctan x$.

15.4. Eine Abbildung welche einem Paar $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine reelle Zahl a_{mn} zuordnet bezeichnen wir als *Doppelfolge*. Eine Doppelfolge konvergiert gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, in Zeichen $a = \lim_{mn\to\infty} a_{mn}$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall m, n \geq N_\varepsilon \ : |a_{mn} - a| < \varepsilon.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = 0$ für

$$a_{mn} = (-1)^{m+n} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right).$$

(b) Zeigen Sie: Sei $(a_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge mit Grenzwert a. Existiert für alle $m \in \mathbb{N}$ der Grenzwert $b_m = \lim_{n\to\infty} a_{mn}$, so ist die Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{m\to\infty} b_m = a.$$

Eine entsprechende Aussage gilt, wenn die Rollen von m und n vertauscht werden. Zusammenfassend folgt

$$\lim_{m\to\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} a_{mn} \Big) = \lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty} \Big(\lim_{m\to\infty} a_{mn} \Big).$$

Dies war das letzte Übungsblatt (für dieses Semester). Zur Feier dieses Anlasses haben wir hier eine Bastelvorlage für Konfetti: Einfach alle Kreise ausmalen und ausschneiden. Das fertige Produkt kann dann bei der entsprechenden Feier in Ihrer Übungsgruppe verwendet werden.