

Analysis I (WS 2014/15) — Vortragsübung 1

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.

(John Louis von Neumann)

Aufgaben zur Vortragsübung

1.1. (a) Gegeben ist die Abbildung

$$f : [0, \infty[\rightarrow [0, 4] : x \mapsto \frac{4}{1+x^2}.$$

Untersuchen Sie f auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Gegeben ist die Abbildung

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + 1.$$

Für welche Parameter a, b ist $f_{a,b}$ injektiv, surjektiv oder bijektiv?

1.2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen für $x \in \mathbb{R}$:

(a) $x \leq x^2$,

(b) $|x - 3| - |x - 2| > 1$.

1.3. Man beweise, dass man jeden glatten Betrag größer als 7€ so mit Geldscheinen im Wert von 3€ und 5€ bezahlen kann, dass man kein Wechselgeld erhält.

1.4. Beweisen Sie mit Induktion, dass folgende Ungleichung

$$2n + 1 \leq 2^n$$

für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$ gilt. Was geht schief, wenn man als Induktionsanfang $n = 0$ wählt?

1.5. Beweisen Sie mit Induktion, dass folgende Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

1.6. Es sei folgende Relation $R_a \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ für $a \in \mathbb{N}$ gegeben, durch

$$xR_a y \Leftrightarrow x^a - y^a = ax - ay.$$

Überprüfen Sie für welche a , es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.