Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Tag: 12.01.2015**

Analysis I (WS 2014/15) — Vortragsübung 2

There are things which seem incredible to most men who have not studied mathematics.
(Aristoteles; 384-322 B.C.)

Aufgaben zur Vortragsübung

2.1. Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium für Stetigkeit, dass für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$

(a) $f(x) = x$ stetig in $x_0 = 2$ ist,

(b) $f(x) = x^2$ stetig in $x_0 = 2$ ist,

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig auf $[0, \infty[$ ist.

2.2. Geben Sie den maximalen reellen Definitionsbereich an, damit die folgenden Funktionen

(a) $\dfrac{x-4}{x^2-16}$, **(b)** $\dfrac{|x+3|}{x+3}$, **(c)** $f(x) = \ln\left(x^{-1}\right)$,

stetig auf diesem Definitionsbereich sind und begründen Sie. Setzen Sie falls möglich die Funktion f in ihren Definitionslücken stetig fort.

2.3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 3x+3 & \text{, für } x < -1, \\ (x+1)^2 & \text{, für } -1 \leq x \leq 1, \\ 6-5x & \text{, für } 1 < x. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

2.4. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x - 3x$ mindestens zwei Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzt.

2.5. Es sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f in seinen isolierten Punkten stetig ist, wobei ein Punkt $a \in D$ ein isolierter Punkt ist, wenn ein $\delta > 0$ existiert mit $U_\delta(a) \cap D = \{a\}$.

2.6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion. Das heißt, es gibt ein $T > 0$

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Falls folgender Grenzwert existiert

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
bartosch.ruszkowski@mathematik.uni-stuttgart.de