Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Tag: 11.02.2015

Analysis I (WS 2014/15) — Vortragsübung 3

The divergent series are the invention of the devil, and it is a shame to base on them any demonstration whatsoever. By using them, one may draw any conclusion he pleases and that is why these series have produced so many fallacies and so many paradoxes.
(Niels Henrik Abel; 1802-1829)

Aufgaben zur Vortragsübung

3.1. Gegeben sind $M_1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq \operatorname{Im}(z+1) \}$ und $M_2 := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2} \}$. Skizzieren Sie $M_1 \cap M_2$.

3.2. **(a)** Untersuchen Sie die folgende Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$ auf Konvergenz.

(b) Erklären Sie anhand von anderen Reihen warum weder das Wurzelkriterium noch das Quotientenkritierum Aufschluss auf die Konvergenz der Reihe in (a) geben.

(c) Bestimmen Sie für welche $s \in \mathbb{R}$ die folgende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{n} - 1/2)^s}$$

konvergiert

3.3. Geben Sie, an für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+\sqrt{2})^n}{n!}$, **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$

und erklären Sie welche topologischen Eigenschaften die Mengen aufweisen, auf denen die Reihen konvergieren.

3.4. Geben Sie eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_k(x)$ an, wobei die rellen Koeffizienten $a_k(x)$ von $x \in \mathbb{R}$ abhängen dürfen, so dass diese Reihe für $x \in [0, 4[\cup \{5\}$ konvergiert und sonst divergiert.

3.5. Gegeben sei $f(x) = \ln(1 + x)$ für $x > -1$.

(a) Beweisen Sie folgende Formel

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!(-1)^{n+1}(1+x)^{-n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x > -1$.

(b) Geben Sie das Restglied $R_n(x, x_0)$ an für $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass für $|x| < 1$ das Restglied $|R_n(x, x_0)|$ gegen Null konvergiert für n gegen unendlich.

(c) Geben Sie die Taylorreihe von f an der Stelle $x_0 = 0$ an und geben Sie an für welche $x \in \mathbb{R}$ diese Reihe konvergiert.

3.6. Berechnen Sie folgende Grenzwerte sofern existent

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
bartosch.ruszkowski@mathematik.uni-stuttgart.de

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$, **(b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin(x))^2}{x^4}$, **(c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-\ln(x)^2}{x^2+\ln x}$.

3.7. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(a) > f(b), f'(b) > 0$. Zeigen Sie, dass dann ein $c \in]a,b[$ existiert mit $f'(c) = 0$.

3.8. Berechnen Sie die Lösungen von $z^3 = 1 + i$ und berechnen Sie $(1+i)^{42}$.

3.9. Untersuchen Sie folgende Mengen auf Beschränktheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit und Offenheit im $\mathbb{R}^2$

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x + y < 2\}$,
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$,
(c) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left(k-\dfrac{1}{k}, k+\dfrac{1}{k}\right)\times\left(k-\dfrac{1}{k}, k+\dfrac{1}{k}\right)$.

3.10. Es sei $\beta \ge 0$. Gegeben sei die folgende Funktion $f_\beta : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x|^\beta \sin(\frac{1}{|x|})$.

(a) Geben Sie die β an, so dass man f_β in $x_0 = 0$ stetig fortsetzen kann.
(b) Geben Sie die β an, so dass man f_β auf $\mathbb{R}$ differenzierbar fortsetzen kann.
(c) Geben Sie die β an, so dass man f_β auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar fortsetzen kann.

3.11. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = t^8 + at + b$$

für beliebige, aber festgewählte $a, b \in \mathbb{R}$ höchstens 2 Nullstellen besitzt.

3.12. Gegeben sei folgende Funkion $f(x) = \mathrm{e}^{2x}(3-4x)$ für $x \in \mathbb{R}$

(a) Berechnen Sie alle Hoch- und Tiefpunkt, falls vorhanden.
(b) Berechnen Sie alle Wendepunkte, falls vorhanden.
(c) Geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f an der Stelle $x_0 = 0$ an.

3.13. Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$ genau dann einen Fixpunkt hat, wenn $a \le \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ gilt.

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
bartosch.ruszkowski@mathematik.uni-stuttgart.de