Def: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, falls es eine Folge (t_n) in $\mathcal{T}([a,b])$ gibt, so dass $t_n \to f$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[a,b]$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n > N_\varepsilon \ \forall x \in [a,b] : \Big| f(x) - t_n(x) \Big| < \varepsilon.$$

Def und Satz: Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und (t_n) in $\mathcal{T}([a,b])$ mit $t_n \to f$ gleichmäßig. Dann existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f \ := \ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ := \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n$$

und ist unabhängig von der gewählten Folge (t_n).

Charakterisierung von Regelfunktionen: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann:

$f \in \mathcal{R}([a,b])$ (f ist Regelfunktion)

$\Leftrightarrow$

$\forall x_0 \in \,]a,b] : f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ existiert

$\wedge \ \forall x_0 \in [a,b[\,: f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ ex.

Def: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion** auf $[a,b]$, falls es eine **Zerlegung**

$$Z = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n : a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = b\}$$

von $[a,b]$ gibt, so dass

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} : f\Big|_{]\xi_{k-1},\xi_k[} = \text{konstant.}$$

Satz: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Treppenfunktion $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\exists m \in \mathbb{N}\ \exists c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\ \exists$offene Intervalle

$$I_1, \ldots, I_m \subseteq [a,b] : f = \sum_{k=1}^{m} c_k\, \chi_{I_k} \text{ f.ü.}$$

Def: Ist f Treppenfunktion auf $[a,b]$ und $f = \sum_{k=1}^{m} c_k\, \chi_{]a_k,b_k[}$ f.ü., so heißt

$$\int_a^b f \;:=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \sum_{k=1}^{m} c_k(b_k - a_k)$$

das (bestimmte) **Integral** von f.