Def: Sei $f : V \supseteq D \to W$. Existiert der Grenzwert

$$\begin{aligned} Df(x_0)(v) &:= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + tv)\Big|_{t=0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(x_0 + hv) - f(x_0)\Big), \end{aligned}$$

so heißt $Df(x_0)(v)$ **Richtungsableitung** von f im Punkt x_0 in Richtung v.

Für $f : \mathbb{R}^d \supseteq D \to \mathbb{R}^m$:

$$\partial_{x_j} f(x_0) := \partial_j f(x_0) := Df(x_0)(e_j)$$

heißt **partielle Ableitung** von f nach x_j in x_0.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \quad \partial_1 f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \partial_2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix},$$

$$Df(x)(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$