Im Folgenden: $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Def: $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar** in $x_0 \in D$, falls eine $m \times d$-Matrix A existiert, so dass

$$f(x_0 + v) \;=\; f(x_0) + Av + o(\|v\|) \text{ für } v \to 0$$

bzw.

$$f(x) \;=\; f(x_0) + A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

für $x \to x_0$.

$f'(x_0) := A$ heißt **Ableitung** von f in x_0.

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$, so dass alle partiellen Ableitungen $\partial_j f(x)$ ($j = 1, \ldots d$) in $B_\varepsilon(x_0)$ existieren und ...

1) ... beschränkt sind, dann ist f stetig in x_0.

2) ... stetig in x_0 sind, dann ist f differenzierbar in x_0, und es gilt

$$f'(x_0) \;=\; \Big(\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_d f(x_0)\Big).$$

Kettenregel: Sind f in x_0 und g in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; g'\Big(f(x_0)\Big) \circ f'(x_0).$$

Produktregel:
$f : D \to \mathbb{R}^m$ und $\varphi : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ diffbar
$\Rightarrow \;\; \varphi f : D \to \mathbb{R}^m : x \mapsto \varphi(x) \cdot f(x)$
ist in x_0 differenzierbar mit

$$\begin{aligned}(\varphi \cdot f)'(x_0)(v) \;&=\; \varphi(x_0) \cdot f'(x_0)(v) \\ &\quad + \varphi'(x_0)(v) \cdot f(x_0)\end{aligned}$$

für $v \in \mathbb{R}^d$ bzw. kurz

$$(\varphi \cdot f)'(x_0) \;=\; \varphi(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot \varphi'(x_0).$$