11.48: Der Satz von Taylor mit $k = 1$ besagt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\Big\langle \underbrace{H_f\big(x_0 + \tau(x - x_0)\big)}_{\text{Hessematrix}}(x - x_0), (x - x_0)\Big\rangle.$$

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$.

1) Hat f in x_0 ein relatives Minimum (Maximum), so ist $H_f(x_0)$ positiv (negativ) semidefinit.

2) Ist $H_f(x_0)$ positiv (negativ) definit, so hat f in x_0 ein relatives Minimum (Maximum).

Mittelwertsatz für mehrere Variablen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in D$, so dass

$$S := \{x_1 + t(x_2 - x_1) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq D.$$

Ist f in jedem Punkt $x_0 \in S$ differenzierbar, dann $\exists \xi \in]0, 1[\,:$

$$f(x_1) - f(x_2) = \Big\langle \nabla f\Big(x_1 + \xi(x_2 - x_1)\Big), x_2 - x_1\Big\rangle.$$