Mittelwertsatz für mehrere Variablen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in D$, so dass

$$S := \{x_1 + t(x_2 - x_1) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq D.$$

Ist f in jedem Punkt $x_0 \in S$ differenzierbar, dann $\exists \xi \in]0,1[$:

$$f(x_1) - f(x_2) = \Big\langle \nabla f\Big(x_1 + \xi(x_2 - x_1)\Big), x_2 - x_1 \Big\rangle.$$

Banachscher Fixpunktsatz:
Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, $f : M \to M$ eine **Kontraktion**, d.h.

$$\exists c \in [0,1[\ \ \forall x, y \in M : d\Big(f(x), f(y)\Big) \leq c\, d(x,y).$$

Dann besitzt f genau einen **Fixpunkt** x_0, d.h.

$$\exists! x_0 \in M : f(x_0) = x_0.$$