Satz über implizite Funktionen:
Gegeben ist ein Gleichungssytem

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ \vdots \\ F_m(x,y) \end{pmatrix} = 0$$

für m Unbekannte $y = (y_1, \ldots, y_m)$, das von d Parametern $x = (x_1, \ldots, x_d)$ abhängt.
Gesucht: Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, Abhängigkeit der Lösung y vom Parameter x.
Voraussetzungen:

1) $F(x_0, y_0) = 0$,

2) $F \in C^1(D_x \times D_y \to \mathbb{R}^m)$,

3) die $m \times m$-Matrix

$$\partial_y F(x_0,y_0) := \begin{pmatrix} \partial_{y_1} F_1(x_0,y_0) \ldots \partial_{y_m} F_1(x_0,y_0) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \partial_{y_1} F_m(x_0,y_0) \ldots \partial_{y_m} F_m(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

ist invertierbar.

Behauptung: Dann existieren $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass

$$\forall x \in B_{\delta_1}(x_0) \subseteq \mathbb{R}^d \ \exists! \varphi(x) \in B_{\delta_2}(y_0) \subseteq \mathbb{R}^m : \\ F(x, \varphi(x)) = 0.$$

Außerdem gilt $\varphi \in C^1\Big(B_{\delta_1}(x_0) \to \mathbb{R}^m\Big)$.

Kettenregel:

Seien V, W, U normierte Räume,
$D_f \subseteq V$ offen, $f : D_f \to W$, $x_0 \in D_f$,
$D_g \subseteq W$ offen, $g : D_g \to U$, $f(x_0) \in D_g$. Dann:

Sind f in x_0 und g in $f(x_0)$ Fréchet-differenzierbar, so ist $g \circ f$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; g'\Big(f(x_0)\Big) \circ f'(x_0).$$