PD. Dr. P.H. Lesky Universität Stuttgart
Wintersemester 2014/15

Analysis I

Warnung: Dies ist kein vollständiger Vorlesungsaufschrieb. Dieses Skript ist zur Erleichterung beim Mitschreiben gedacht, Ergänzungen sollen nachgetragen werden.

1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik und Beweise

1.1 Aussage: Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist (w/f).

1.2 Verknüpfung von Aussagen p, q:

Operation	in Worten	Definition durch Wahrheitstabelle
$\neg p$	nicht p, Negation von p	

p	$\neg p$
w	f
f	w

Operation	in Worten
$p \vee q$	p oder q, logisches Oder
$p \wedge q$	p und q, logisches Und
$p \to q$	wenn p dann q, Subjunktion
$p \leftrightarrow q$	genau dann p wenn q, Bijunktion

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

1.3 Beispiele: 1) Wir sind in Baden-Württemberg:

$$\text{Wenn } \underbrace{\text{es Mitternacht ist}}_{p}\text{, dann } \underbrace{\text{ist die Sonne nicht zu sehen}}_{q}.$$

2) Wenn $x < 3$, dann $x < 5$.

1.4 Definition: Die **Implikation** $p \Rightarrow q$ bedeutet: Aus p folgt q, die Aussage $p \to q$ ist wahr.
Also: Wenn p wahr ist, dann ist auch q wahr. Wenn p falsch ist, wird über q keine Aussage gemacht.
Man sagt: p ist **hinreichend** für q,
q ist **notwendig** für p.

1.5 Beispiel: $|x-4|<1 \;\Rightarrow\; x<5$.
Wenn $|x-4|<1$ erfüllt ist, ist das hinreichend für $x<5$.
$x<5$ muss notwendig erfüllt sein, damit $|x-4|<1$ wahr sein kann.

1.6 Definition: Die **Äquivalenz** $p \Leftrightarrow q$ bedeutet, dass die Aussage $p \leftrightarrow q$ wahr ist.
Also: Entweder sind beide Aussagen wahr oder beide falsch.

1.7 Beispiele: **1)**

$$\begin{aligned} (x-4)^2<1 &\Leftrightarrow |x-4|<1 \\ &\Leftrightarrow -1<x-4<1 \quad \Big| +4 \\ &\Leftrightarrow 3<x<5 \end{aligned}$$

2) $(p \to q) \;\Leftrightarrow\; (\neg q \to \neg p)$. Beweis durch Wahrheitstabelle:

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Die Bijunktion ist immer wahr $\Rightarrow$ Äquivalenz ist bewiesen.

3) De Morgansche Gesetze (Beweis in Übungen):

$$\begin{aligned} \neg(p \vee q) &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \\ \neg(p \wedge q) &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \end{aligned}$$

1.8 Beweisprinzipien: 1) Direkter Beweis: Zeigt $p \Rightarrow q$, indem aus der Gültigkeit von p durch Umformungen oder Folgerungen die Gültigkeit von q bewiesen wird.

2) Kontraposition: Zeigt $p \Rightarrow q$ durch Nachweis von $\neg q \Rightarrow \neg p$ (vgl. letztes Beispiel 2)).

3) Widerspruchsbeweis: Zeigt $p \Rightarrow q$ durch Nachweis von $p \wedge q \Rightarrow f$ (geschrieben $\lightning$, Widerspruch).

2) und 3) heißen **indirekte Beweise**.

1.9 Beispiel: Beweise $\underbrace{|x-4|<1}_{p} \Rightarrow \underbrace{x<5}_{q}$.

1) Direkt: Gehe davon aus, dass $|x-4|<1$ wahr ist. Fall a) $x-4 \geq 0$

$$\Rightarrow\ x-4 = |x-4| < 1 \quad \big|+4$$
$$\Rightarrow\ x < 5 \ \Leftrightarrow\ q$$

Fall b) $x-4<0 \quad \big|+4$

$$\Leftrightarrow\ x<4$$
$$\overset{4<5}{\Rightarrow}\ x<5\ \Leftrightarrow\ q$$

2) Kontraposition: Beweise $\underbrace{x \geq 5}_{\neg q}\ \Rightarrow\ \underbrace{|x-4| \geq 1}_{\neg p}$.

$$x \geq 5 \overset{x-4\geq 0}{\Rightarrow} |x-4| = x-4 \geq 5-4 = 1 \ \Rightarrow\ |x-4| \geq 1\ \Leftrightarrow\ \neg p.$$

3) Widerspruchsbeweis: Annahme $|x-4|<1\ \wedge\ x\geq 5$.

$$x \geq 5 \overset{\text{wie bei 2)}}{\Rightarrow} |x-4| \geq 1 \overset{\text{Ann}}{\Rightarrow} 1 \leq |x-4| < 1 \ \Rightarrow\ 1<1\ \lightning$$

1.2 Mengen

1.10 Definition (naiv): Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen **Elemente** der Menge. Schreibe $m \in M$, falls das Objekt m Element der Menge M ist, $m \notin M$ andernfalls. Zwei Mengen A, B heißen **gleich** ($A=B$), wenn sie dieselben Elemente besitzen, d.h. wenn

$$x \in A\ \Leftrightarrow\ x \in B.$$

1.11 Definition von Mengen:

- Explizit: $M=\{1,2,3\}$, $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.
- Durch Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft:

$$P\ :=\ \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist Primzahl}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl}\}$$

- $\emptyset$ oder $\{\}$: Leere Menge, enthält kein Element.

1.12 Bemerkungen: **1)** Ein Element kann nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein:

$$\{m,a,t,h,e,m,a,t,i,k\}\ =\ \{m,a,t,h,e,i,k\}.$$

2) Es kommt nicht auf die Reihenfolge an:

$$\{1,2,3\}\ =\ \{1,3,2\}.$$

1.13 Definition: Die Menge A heißt **Teilmenge** der Menge B ($A \subseteq B$), falls

$$x \in A \;\Rightarrow\; x \in B.$$

Falls $A \subseteq B \;\wedge\; A \neq B$, heißt A **echte Teilmenge** von B ($A \subsetneq B$).

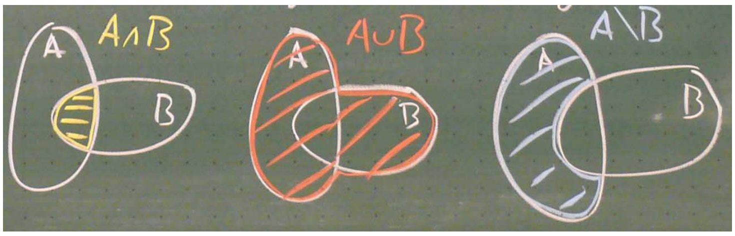
1.14 Satz: Für jede Menge A gilt $\emptyset \subseteq A$.

Beweis: $x \in \emptyset$ ist falsch, also ist $x \in \emptyset \;\to\; x \in A$ immer wahr. □

1.15 Verknüpfungen von Mengen $\boldsymbol{A, B}$:

Schnittmenge:	$A \cap B := \{x : x \in A \;\wedge\; x \in B\}$,
Vereinigungsmenge:	$A \cup B := \{x : x \in A \;\vee\; x \in B\}$,
Differenzmenge:	$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$.

Veranschaulichung im Venn-Diagramm.



1.16 Definition: Zwei Mengen A, B heißen **disjunkt**, falls $A \cap B = \emptyset$.

1.17 Rechenregeln für Mengen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$:

Idempotenz:	$A \cap A = A$		$A \cup A = A$
Assoziativgesetz:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$		$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$		$A \cup B = B \cup A$
Distributivgesetze:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$		
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		
De Morgansche Gesetze:	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$		
	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$		

Beweis: (des letzten Gesetzes). Wir benötigen

$$p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad \text{(Distributivgesetz)}$$

für Aussagen p, q, r.

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cap C) \quad & \Leftrightarrow \quad x \in A \;\wedge\; \neg(x \in B \cap C) \\
& \Leftrightarrow \quad x \in A \;\wedge\; \underbrace{\neg(x \in B \;\wedge\; x \in C)}_{\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)} \\
& \overset{\text{De Morgan}}{\underset{\text{Aussagenlogik}}{\Leftrightarrow}} \quad x \in A \;\wedge\; \big(\neg(x \in B) \;\vee \neg(x \in C)\big) \\
& \overset{\text{Distributivgesetz}}{\underset{\text{Aussagenlogik}}{\Leftrightarrow}} \quad \big(x \in A \;\wedge\; \neg(x \in B)\big) \;\vee\; \big(x \in A \;\wedge\; \neg(x \in C)\big) \\
& \Leftrightarrow \quad \big(x \in (A \setminus B)\big) \;\vee\; \big(x \in (A \setminus C)\big) \\
& \Leftrightarrow \quad x \in (A \setminus B \cup A \setminus C)
\end{aligned}$$

$\square$

1.18 Definition: Sei A Menge. dann heißt

$$\mathcal{P}(A) \;:=\; \{B : B \text{ ist Menge } \wedge\; B \subseteq A\}$$

Potenzmenge von A.

1.19 Beispiele: **1)** $A = \{1, 2, 3\} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$.

2) $A = \big\{1, \{2\}\big\} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \big\{\{2\}\big\}, \big\{1, \{2\}\big\}\Big\}$.

3) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

1.20 Definition: Seien $A, B \neq \emptyset$ Mengen. Dann heißt

$$A \times B \;:=\; \Big\{\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} : a \in A \;\wedge\; b \in B\Big\}$$

Kreuzprodukt von A und B. Man schreibt

$$\begin{aligned}
(a, b) \;&:=\; \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} \\
A \times B \;&:=\; \big\{(a, b) : a \in A \;\wedge\; b \in B\big\}
\end{aligned}$$

und nennt (a, b) **geordnetes Paar**.

1.21 Beispiel: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \big\{(m, n) : m \in \mathbb{N} \;\wedge\; n \in \mathbb{N}\big\}$ (Menge der Gitterpunkte).

1.22 Satz: Für $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$ gilt

$$(a,b) = (a',b') \;\Leftrightarrow\; a = a' \;\wedge\; b = b'.$$

Beweis: **1)** "$\Rightarrow$": Sei $(a,b) = (a',b') \;\Leftrightarrow\; \big\{\{a\},\{a,b\}\big\} = \big\{\{a'\},\{a',b'\}\big\}$

Fall a) $a \neq b$: $\{a\}$ hat 1 Element
$\{a,b\}$ hat 2 Elemente
$\{a'\}$ hat 1 Element
$\Rightarrow$ $\{a',b'\}$ hat 2 Elemente, insbesondere $a' \neq b'$
$\Rightarrow$ $\{a\} = \{a'\} \;\wedge\; \{a,b\} = \{a',b'\}$
$\Rightarrow$ $a = a' \;\wedge\; b = b'$.

Fall b) $a = b$ $\Rightarrow$ $\big\{\{a\},\{a,b\}\big\} = \big\{\{a\}\big\}$
$\Rightarrow$ $\big\{\{a'\},\{a',b'\}\big\}$ hat nur 1 Element
$\Rightarrow$ $a' = b' \;\wedge\; \big\{\{a\}\big\} = \big\{\{a'\}\big\}$
$\Rightarrow$ $a = a' \;\wedge\; b = a = a' = b'$

2) "$\Leftarrow$": $a = a' \;\wedge\; b = b' \;\Rightarrow\; \big\{\{a\},\{a,b\}\big\} = \big\{\{a'\},\{a',b'\}\big\} \;\Leftrightarrow\; (a,b) = (a',b')$. $\square$

Also: Es kommt auf die Reihenfolge an: Für $a \neq b$ gilt $(a,b) \neq (b,a)$.

1.23 Russelsche Antinomie: Die naive Mengenlehre ist nicht widerspruchsfrei. Betrachte

$$M \;:=\; \{A : A \text{ ist Menge } \wedge\; A \notin A\}.$$

Dann ist weder $M \notin M$ noch $M \in M$ wahr.

1.3 Quantoren

Motivation: Der Satz „n ist eine gerade Zahl" ergibt für verschiedene $n \in \mathbb{N}$ eine wahre oder eine falsche Aussage.

1.24 Definition: Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge.

1) Ein sprachliches Gebilde $H(m)$, das durch Einsetzen beliebiger $m \in M$ eine Aussage ergibt, heißt **Aussageform** auf M.

2) Sei H eine Aussageform auf M. Die Aussage
(i) $\forall x \in M : H(x)$ (ii) $\exists x \in M : H(x)$ (iii) $\exists! x \in M : H(x)$
ist genau dann wahr, wenn $H(x)$ durch Einsetzen
(i) aller $x \in M$ (ii) mindestens eines $x \in M$ (iii) genau eines $x \in M$
eine wahre Aussage ergibt

1.25 Negation von Aussagen mit Quantoren:

$$\neg\big(\forall x \in M : H(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in M : \neg H(x)$$
$$\neg\big(\exists x \in M : H(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in M : \neg H(x)$$

1.26 Beispiel: Lösbarkeit von Gleichungen: $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : a \cdot x = b$.
Negation: $\exists a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : a \cdot x \neq b$.

1.27 Definition: Sei $M \neq \emptyset$ Menge. Für jedes Element $m \in M$ sei eine Menge A_m definiert (M heißt **Indexmenge**). Dann:

$$\bigcap_{m \in M} := \{x \mid \forall m \in M : x \in A_m\}$$
$$\bigcup_{m \in M} := \{x \mid \exists m \in M : x \in A_m\}$$

1.28 Beispiele: **1)** $M = \{1,2,3\},\ A_1 = \mathbb{N},\ A_2 = \{-1,0,1\},\ A_3 = \{-2\}$:
$\bigcup\limits_{m \in M} A_m = \{-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$, $\bigcap\limits_{m \in M} A_m = \emptyset$.

2) $M = \mathbb{R},\ A_m = [1, m[$ für $m \in \mathbb{R}$:
$\bigcup\limits_{m \in \mathbb{R}} A_m = [1, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$, $\bigcap\limits_{m \in \mathbb{R}} A_m = \emptyset$, $\bigcap\limits_{m \geq 1} A_m = \{1\}$.

1.4 Relationen

1.29 Definition: Seien $A, B \neq \emptyset$ Mengen. Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt **Relation**. Für $(a,b) \in R$ schreibe aRb: a steht in Relation zu b. Falls $A = B$, also $R \subseteq A \times A$, heißt R **Relation auf A**.

1.30 Beispiele: **1)** $\leq := \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \leq n\}$ ist Relation auf $\mathbb{N}$.

2) GU $:= \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m - n$ ist durch 2 teilbar$\}$ ist Relation auf $\mathbb{Z}$.

1.31 Wichtige Eigenschaften: Eine Relation auf A heißt

- **reflexiv**, falls $\forall a \in A : (a,a) \in R$,
- **symmetrisch**, falls $\forall a, b \in A : \big((a,b) \in R \;\Rightarrow\; (b,a) \in R\big)$,

- **antisymmetrisch**, falls $\forall a, b \in A : \big((a,b) \in R \ \wedge (b,a) \in R \ \Rightarrow \ a = b\big)$,
- **transitiv**, falls $\forall a, b, c \in A : \big((a,b) \in R \ \wedge \ (b,c) \in R \ \Rightarrow \ (a,c) \in R\big)$.

1.32 Beispiel: GU ist

1) reflexiv: $m - m = 0$ ist durch 2 teilbar $\Rightarrow \ (m,m) \in$ GU.

2) symmetrisch: $m - n$ gerade $\Rightarrow \ n - m$ gerade.

3) transitiv: Sei $(m,n) \in$ GU $\wedge \ (n,k) \in$ GU. Zeige: $(m.k) \in$ GU.

$$m - k \ = \ \underbrace{m-n}_{\text{gerade}} + \underbrace{n-k}_{\text{gerade}} \text{ ist gerade} \quad \Rightarrow \ (m,k) \in \text{GU}.$$

1.33 Definition: Eine Relation R auf A heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Schreibe $a \sim b, \ a \sim_R b$ statt aRb. Zu $a \in A$ heißt

$$[a] \ = \ [a]_R \ := \ \{b \in A : (a,b) \in R\}$$

Äquivalenzklasse zu a.

1.34 Beispiel: $[1]_{\text{GU}} \ = \ \{m \in \mathbb{Z} : m \text{ ist ungerade}\} \ = \ [3]_{\text{GU}} \ = \ [5]_{\text{GU}} \ = \ \ldots$
$[0]_{\text{GU}} \ = \ \{m \in \mathbb{Z} : m \text{ ist gerade}\}$.
Durch GU wird $\mathbb{Z}$ in zwei disjunkte Mengen zerlegt.

1.35 Definition: Sei $A \neq \emptyset$ Menge und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ mit

1) $\displaystyle\bigcup_{M \in \mathcal{K}} M \ = \ A$ und

2) $\forall M, N \in \mathcal{K} : (M \cap N \neq \emptyset \ \Rightarrow \ M = N)$.

Dann heißt $\mathcal{K}$ **Klasseneinteilung** von A.

1.36 Satz: 1) Ist $\mathcal{K}$ eine Klasseneinteilung von A, so definiert

$$R \ := \ \big((a,b) \in A \times A \ \big| \ \exists M \in \mathcal{K} : a \in M \ \wedge \ b \in M\big\}$$

eine Äquivalenzrelation auf A, und es gilt $\mathcal{K} = \{[a]_R : a \in A\}$.

2) Ist $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation, so definiert

$$\mathcal{K} \;:=\; \{[a]_R : a \in A\}$$

eine Klasseneinteilung von A.

Beweis: **1)** R ist

a) reflexiv, denn: Zu jedem $a \in A$ existiert ein $M_a \in \mathcal{K}$ mit $a \in M_a$ da $\bigcup\limits_{M \in \mathcal{K}} M = A$.

$$\Rightarrow\; \exists M_a \in \mathcal{K} : a \in M_a \;\wedge\; a \in M_a \;\Rightarrow\; (a,a) \in R.$$

b) symmetrisch:

$$(a,b) \in R \overset{\text{Def. } R}{\Leftrightarrow} \exists M \in \mathcal{K} : \underbrace{a \in M \;\wedge\; b \in M}_{\Leftrightarrow\; b \in M \;\wedge\; a \in M} \;\Leftrightarrow\; (b,a) \in R.$$

c) transitiv: Sei $(a,b) \in R \;\wedge\; (b,c) \in R$.

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Def. } R}{\Leftrightarrow} && \exists M, M' \in \mathcal{K} : a \in M \;\wedge\; b \in M \;\wedge\; b \in M' \;\wedge\; c \in M' \\
&\Rightarrow && b \in M \cap M', \text{ also } M \cap M' \neq \emptyset \\
&\overset{\mathcal{K} \text{ Klasseneinteilung}}{\Rightarrow} && M = M' \\
&\Rightarrow && a \in M \;\wedge\; c \in M \\
&\Rightarrow && (a,c) \in R.
\end{aligned}$$

Es gilt $\mathcal{K} \subseteq \{[a]_R : a \in A\}$: Sei $M \in \mathcal{K},\ a \in M$

$$\Rightarrow [a]_R = M, \text{ denn } c \in [a] \;\Leftrightarrow\; (a,c) \in R \underset{M \text{ mit } a \in M}{\overset{\text{es gibt nur ein}}{\Leftrightarrow}} c \in M.$$

Es gilt $\{[a] : R : a \in A\} \subseteq \mathcal{K}$: Es existiert ein $M \in \mathcal{K}$ mit $a \in M$

$$\Rightarrow\; [a]_R = M, \text{ denn } c \in [a]_R \;\Leftrightarrow\; (a,c) \in R \underset{M \text{ mit } a \in M}{\overset{\text{es gibt nur ein}}{\Leftrightarrow}} c \in M.$$

2) R sei Äquivalenzrelation, $\mathcal{K}$ sei definiert durch $\mathcal{K} := \{[a] : a \in A\}$.
Beweise: $\mathcal{K}$ ist Klasseneinteilung.

a) Für jedes $a \in A$ gilt $[a] \subseteq A \;\Rightarrow\; \bigcup\limits_{a \in A} [a] \subseteq A$

Für jedes $a \in A$ gilt $a \in [a]$, da R reflexiv $\Rightarrow\; a \in \bigcup\limits_{a \in A} [a] \;\Rightarrow\; A \subseteq \bigcup\limits_{a \in A} [a]$

$\Rightarrow\; A = \bigcup\limits_{a \in A} [a]$.

b) Vorüberlegung: Zeige $(a,b) \in R \;\Rightarrow\; [a] = [b]$:

$[a] \subseteq [b]$: Sei $c \in [a] \overset{\text{Def. } [a]}{\Rightarrow} (a,c) \in R \overset{\text{Symmetrie}}{\Rightarrow} (c,a) \in R$

$$(c,a) \in R \;\wedge\; (a,b) \in R \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} (c,b) \in R$$

$$\overset{\text{Symmetrie}}{\Rightarrow} (b,c) \in R \;\Leftrightarrow\; c \in [b]$$

$[b] \subseteq [a]$: Sei $c \in [b]$, d.h. $(b,c) \in R$.

$$(a,b) \in R \;\wedge\; (b,c) \in R \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} (a,c) \in R \;\Rightarrow\; c \in [a].$$

Also $[a] = [b]$ nachgewiesen.

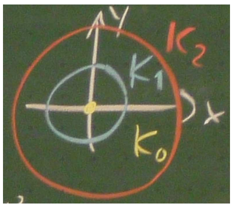
Sei nun $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

$$\Rightarrow\; \exists c \in [a] \cap [b] \;\Rightarrow\; (a,c) \in R \;\wedge\; (b,c) \in R \overset{\text{Vorüberlegung}}{\Rightarrow} [a] = [c] = [b].$$

$\square$

1.37 Beispiel: Klasseneinteilung des $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch Kreise:

$$K_r := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = r^2\}, \quad \mathcal{K} \;:=\; \{K_r : r \geq 0\}.$$



Zugehörige Äquivalenzrelation:

$$(x,y) \sim_R (x',y') \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

$\Leftrightarrow$ $(x,y), (x',y')$ liegen auf derselben Kreislinie.

1.38 Definition: Ist $A \neq \emptyset$ eine Menge und R eine Äquivalenzrelation auf A, so heißt

$$A/R \;:=\; \{[a]_R : a \in A\}$$

Quotient oder **Quotientenmenge** von A nach R.

1.39 Beispiele: **1)** $\mathbb{N}/\mathsf{GU} = \{[1],[2]\}$.

2) Klasseneinteilung letztes Beispiel: $\mathbb{R}^2/R = \{K_r : r \geq 0\}$.

1.40 Definition: Eine Relation R auf $A \neq \emptyset$ heißt **Ordnungsrelation**, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Schreibe $a \preceq b$ für $(a,b) \in R$. Dann

1) $\forall a \in A : a \preceq a$,

2) $\forall a,b \in A : (a \preceq b \;\wedge b \preceq a \;\Rightarrow\; a = b)$,

3) $\forall a,b,c \in A : (a \preceq b \;\wedge b \preceq c \;\Rightarrow\; a \preceq c)$.

$(A, \preceq)$ heißt **teilweise geordnete Menge**.

Gilt zusätzlich

$$\forall a, b \in A : a \preceq b \ \vee \ b \preceq a,$$

so heißt die Relation **vollständige Ordnungsrelation**, $(A, \preceq)$ heißt **geordnete Menge**.

1.41 Beispiele: **1)** $(\mathbb{N}, \leq)$ ist geordnete Menge.

2) $\preceq \ := \ \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \text{ ist Teiler von } n\}$ ist Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$, aber nicht vollständig: $n = 3,\ m = 5$ sind nicht vergleichbar, es gilt weder $n \preceq m$ noch $m \preceq n$.

1.5 Abbildungen und Funktionen

Schulwissen: Zu einer Funktion f, defniert auf $\mathbb{R}$, gehört der Graph

$$G \ = \ \big\{(x, f(x) : x \in \mathbb{R}\big\} \ \subseteq \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

1.42 Definition:: Seien $A, B \neq \emptyset$ Mengen. Eine **Abbildung** oder **Funktion** ist eine Relation $G \subseteq A \times B$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in A \ \exists! y \in B : (x, y) \in G.$$

Für $(x, y) \in G$ schreibe $f(x) := y$. Schreibe kurz $f : A \to B : x \mapsto f(x)$.

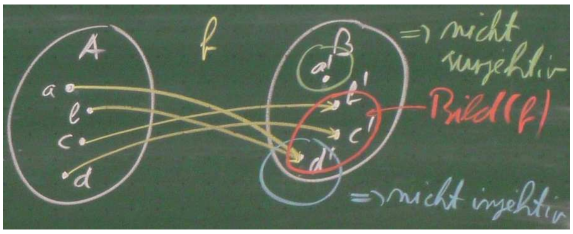
- A heißt **Definitionsmenge**,
- B heißt **Bildmenge**,
- $f(x)$ heißt **Bild** von x,
- x heißt **Urbild** von $f(x)$,
- $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ heißt **Bild** von f.
- Zwei Abbildungen $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ und $g : C \to D : x \mapsto g(x)$ heißen **gleich**, wenn $A = C \ \wedge \ B = D \ \wedge \ \forall x \in A = C : f(x) = g(x)$.

1.43 Bemerkung: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bedeutet: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Deshalb schreibe z.B.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto \frac{1}{x}\,.$$

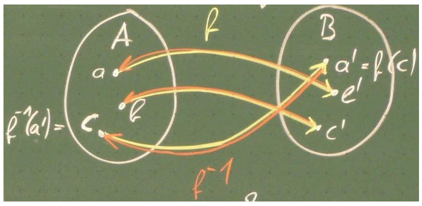
1.44 Definition: Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

- **surjektiv**, falls $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$,
- **injektiv**, falls $\forall x, x' \in A : \big(x \neq x' \ \Rightarrow\ f(x) \neq f(x')\big)$
  oder äquivalent $\forall x, x' \in A : \big(f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ x = x'\big)$,
- **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv.



1.45 Satz: Ist $f : A \to B$ bijektiv, so definiert

$$f^{-1} : B \to A : f(x) \mapsto x$$



eine Abbildung, die **inverse Abbildung** oder **Umkehrabbildung**.
Also: $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ für $x \in A$.
Außerdem gilt $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ für $y \in B$.

Beweis: **1)** Zu $f(x) \in B$ gehört genau ein $x \in A$, da f injektiv ist. Also ist $f(x) \mapsto x$ definiert.

2) Zu jedem $y \in B$ existiert ein $x_y \in A$ mit $f(x_y) = y$, da f surjektiv ist.

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1} \text{ ist auf ganz } B \text{ definiert,} \\ f\big(f^{-1}(y)\big) \overset{\text{Def } f^{-1}}{=} f(x_y) = y. \end{cases}$$

□

1.46 Mengenabbildung: Sei $f : A \to B$.

1) Für $M \subseteq A$ ist $f(M) := \{f(x) : x \in M\}$ das **Bild** von M.

2) Für $M' \subseteq B$ ist

$$f^{-1}(M') \ := \ \{x \in A : f(x) \in M'\}$$

das **Urbild** von M'. Hierfür muss f nicht als bijektiv vorausgesetzt werden.

1.47 Beispiele: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$: $\mathsf{Bild}(f) = [0, \infty[$.

f ist nicht surjektiv, denn $-1 \notin \mathsf{Bild}(f)$,

f ist nicht injektiv, denn $f(-1) = f(1)$.

$f([-2, 2]) = [0, 4]$,

$f^{-1}([-2, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ obwohl f nicht bijektiv ist.

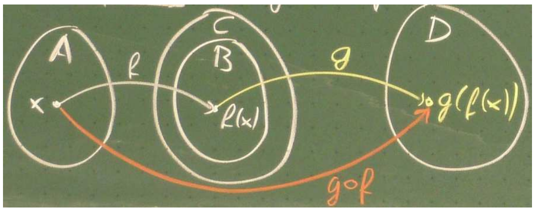
$f\big(f^{-1}([-2, 2])\big) = [0, 2]$, $f^{-1}(\{2\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

2) $g : [0, \infty[\to [0, \infty[: x \mapsto x^2$ ist bijektiv, $g^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[: x \mapsto \sqrt{x}$.

1.48 Definition: Seien $f : A \to B$, $g : c \to D$, $B \subseteq C$. Dann heißt

$$g \circ f : A \to D : x \mapsto g\big(f(x)\big)$$

Hintereinanderausführung oder **Verknüpfung** von g und f.



1.49 Satz: Seien $f : A \to B \subseteq C$, $g : C \to D \subseteq E$, $h : E \to F$. Dann

$$h \circ (g \circ f) \;=\; (h \circ g) \circ f \quad \text{(Assoziativgesetz).}$$

Beweis: $h \circ g : C \to F \;\wedge\; B \subseteq C \;\Rightarrow\; (h \circ g) \circ f : A \to F$ definiert

$g \circ f : A \to D \subseteq E \;\Rightarrow\; h \circ (g \circ f) : A \to F$ definiert

Für $x \in A$:

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) &\overset{\text{Def} \circ}{=} h\big(g \circ f(x)\big) \overset{\text{Def} \circ}{=} h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \\ (h \circ g) \circ f(x) &\overset{\text{Def} \circ}{=} h \circ g\big(f(x)\big) \overset{\text{Def} \circ}{=} h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h \circ (g \circ f)(x) \end{aligned}$$

□

1.50 Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^3$:

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y &\mapsto \frac{1}{1 + y^6} = f(g(y)) = f(y^3), \\ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x &\mapsto \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^3 = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{1 + x^2}\right). \end{aligned}$$

2 Zahlen und Körper

2.1 Die natürlichen Zahlen

2.1 Definition (Peano): Die **natürlichen Zahlen** sind eine Menge $\mathbb{N}$, auf der eine Abbildung

$$\mathsf{NF} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \text{(Nachfolgerabbildung)}$$

definiert ist mit folgenden Eigenschaften:

(N1) $\exists! x_0 \in \mathbb{N} : x_0 \notin \mathsf{NF}(\mathbb{N})$. Bezeichnung $x_0 =: 1$.
Es existiert genau eine natürliche Zahl, die nicht Nachfolger einer anderen ist.

(N2) NF ist injektiv.

(N3) Induktionsaxiom: Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften

- $1 \in M$,
- $\forall n \in \mathbb{N} : \big(n \in M \;\Rightarrow\; \mathsf{NF}(n) \in M\big)$,

dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Bezeichnungen: $\mathsf{NF}(1) =: 2$, $\mathsf{NF}(2) =: 3, \;\ldots,\; \mathsf{NF}(n) =: n+1$.

2.2 Vollständige Induktion: Sei H eine Aussageform auf $\mathbb{N}$. Beweise:

1) Induktionsanfang (IA): $H(1)$ ist wahr,

2) Induktionsschritt (IS): $\forall n \in \mathbb{N} : H(n) \;\Rightarrow\; H(n+1)$.

Dann folgt $\forall n \in \mathbb{N} : H(n)$.

2.3 Bemerkung: Vollständige Induktion funktioniert auch ab $n = 0$ oder z.B. ab $n = 5$.

Beweis: $M := \{n \in \mathbb{N} : H(n)\} \subseteq \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \in M & \text{(IA)} \\ \forall n \in \mathbb{N} : n \in M \;\Rightarrow\; \underbrace{n+1}_{=\mathsf{NF}(n)} \in M & \text{(IS)} \end{cases}$$

$$\overset{\text{(N3)}}{\Rightarrow} \quad M = \mathbb{N}.$$

□

2.4 Rekursive Definition: Setze $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1) Fakultät $n!$ ist definiert durch

$$0! := 1, \quad (n+1)! := (n+1) \cdot n! \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Nach (N3) ist $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert, z.B. $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$.

2) Rechenoperationen auf $\mathbb{N}$: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann

$$\begin{aligned} n+1 &:= \mathsf{NF}(n) \\ \underbrace{n + \mathsf{NF}(m)}_{n+(m+1)} &:= \underbrace{\mathsf{NF}(n+m)}_{(n+m)+1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n \cdot 1 &:= n \\ n \cdot \mathsf{NF}(n) &:= n \cdot m + n \end{aligned}$$

2.5 Satz: Für $+, \cdot$ gelten das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} (n+m)+k &= n+(m+k) \\ n+m &= m+n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (n \cdot m) \cdot k &= n \cdot (m \cdot k) \\ n \cdot m &= m \cdot n \end{aligned}$$

(Ohne Beweis)

2.6 Satz: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} : n + k \neq n$.

Beweis: Vollständige Induktion nach n bei festem k.

IA: $n = 1$: $1 + k \overset{\mathsf{KG}}{=} k + 1 = \mathsf{NF}(k) \overset{(\mathsf{N1})}{\neq} 1$

IS: **Induktionsvoraussetzung** IV: $n + k \neq n$
Induktionsbehauptung IB: $n + 1 + k \neq n + 1$

$$n + k \neq n \overset{\text{NF ist injektiv}}{\Rightarrow} \underbrace{\mathsf{NF}(n+k)}_{=(n+k)+1 \overset{\mathsf{KG,\,AG}}{=} (n+1)+k} \neq \underbrace{\mathsf{NF}(n)}_{=n+1} \Rightarrow n + 1 + k \neq n + 1 \text{ (IB)}.$$

□

2.7 Kürzungsregel: $\forall n, n', k \in \mathbb{N} : (n + k = n' + k \;\Rightarrow\; n = n')$.

Beweis: Induktion nach k:

IA $k = 1$: $n + 1 = n' + 1 \;\Rightarrow\; \mathsf{NF}(n) = \mathsf{NF}(n') \overset{\text{NF injektiv}}{\Rightarrow} n = n'$.

IS IV: $n+k = n'+k \ \Rightarrow n = n'$,

IB: $n+(k+1) = n'+(k+1) \ \Rightarrow n = n'$

$$n+(k+1) \overset{\mathsf{AG}}{=} (n+k)+1 = \mathsf{NF}(n+k) = \mathsf{NF}(n'+k) \overset{\mathsf{NF\ injektiv}}{\Rightarrow} n+k = n'+k \overset{\mathsf{IV}}{\Rightarrow} n = n'.$$

□

2.8 Ordnung in $\mathbb{N}$: $\leq \,:= \big\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\big|\, n = m \ \vee\ \exists k \in \mathbb{N} : n = m+k\big\}$
Schreibe $m \leq n$ falls $(m,n) \in \leq$.

2.9 Satz: $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine geordnete Menge.

(ohne Beweis)

2.10 Definition:
$$\begin{aligned} m \geq n \quad &:\Leftrightarrow \quad n \leq m,\\ m < n \quad &:\Leftrightarrow \quad m \leq n \ \wedge\ m \neq n,\\ m > n \quad &:\Leftrightarrow \quad m \geq n \ \wedge\ m \neq n. \end{aligned}$$

2.11 Folgerung: Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ ist genau eine der drei Aussagen wahr:

$$m < n, \qquad m = n, \qquad m > n.$$

Beweis: Da $\leq$ vollständig: $M := \{n \in \mathbb{N} : n \leq m \ \vee\ m \leq n\} = \mathbb{N}$

Fall 1: $n \leq m \ \wedge\ m \leq n \quad \Rightarrow \quad m = n$

Fall 2: $n \leq m \ \wedge\ \neg(m \leq n) \quad \Rightarrow \quad n < m$

Fall 3: $\neg(n \leq m) \ \wedge\ m \leq n \quad \Rightarrow \quad m < n$

□

2.2 Die ganzen Zahlen

Anschauung: Ganze Zahlen als Differenz natürlicher Zahlen:

$$m - n \ = \ m' - n' \ \Leftrightarrow \ m + n' \ = \ m' + n.$$

2.12 Definition: Die Relation $\sim_{\mathbb{Z}}$ auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ist definiert durch

$$\sim_{\mathbb{Z}} := \Big\{\big((m,n),(m',n')\big) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N})^2 : m + n' = m' + n\Big\}.$$

2.13 Satz: $\sim_{\mathbb{Z}}$ ist Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Beweis: **1)** reflexiv: Zeige: $\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m,n)$.

$(m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m,n) \;\Leftrightarrow\; m+n = m+n.$ ✓

2) symmetrisch: Zeige $(m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m',n') \;\Rightarrow\; (m',n') \sim_{\mathbb{Z}} (m,n)$.

$(m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m',n') \;\Leftrightarrow\; m+n' = m'+n \;\Leftrightarrow\; m'+n = m+n' \;\Leftrightarrow\; (m',n') \sim_{\mathbb{Z}} (m,n)$.

3) transitiv: Zeige $(m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m',n') \;\wedge\; (m',n') \sim_{\mathbb{Z}} (m'',n'') \;\Rightarrow\; (m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m'',n'')$.

$$
\begin{aligned}
&(m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m',n') \;\wedge\; (m',n') \sim_{\mathbb{Z}} (m'',n'') \\
\Leftrightarrow\quad & m+n' = m'+n \;\wedge\; m'+n'' = m''+n' \\
\Rightarrow\quad & (m+n')+n'' = (m'+n)+n'' \overset{\text{KG}}{=} n''+(m'+n) \overset{\text{AG}}{=} (n''+m')+n \\
& \overset{\text{KG}}{=} (m'+n'')+n = (m''+n')+n \\
\Rightarrow\quad & (m+n')+n'' = (m''+n')+n \\
\overset{\text{AG,KG}}{\Rightarrow}\quad & (m+n'')+n' = (m''+n)+n' \\
\overset{\text{Kürzungsregel}}{\Rightarrow}\quad & m+n'' = m''+n \\
\Leftrightarrow\quad & (m,n) \sim_{\mathbb{Z}} (m'',n'')
\end{aligned}
$$

□

2.14 Definition: **1)** $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_{\sim_{\mathbb{Z}}} = \big\{[(m,n)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} : m,n \in \mathbb{N}\big\}$.

2) $[(m,n)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} +_{\mathbb{Z}} [(m',n')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} := [(m+m',n+n')]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

2.15 Satz: Die Addition $+_{\mathbb{Z}}$ ist sinnvoll definiert, d.h.

$$
\left.\begin{array}{c} [(m,n)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = [(k,l)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \\ [(m',n')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = [(k',l')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\;
\begin{aligned}[t]
&[(m,n)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} +_{\mathbb{Z}} [(m',n')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = [(m+m',n+n')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \\
&= [(k+k',l+l')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = [(k,l)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} +_{\mathbb{Z}} [(k',l')]_{\sim_{\mathbb{Z}}}
\end{aligned}
$$

(Ohne Beweis)

2.16 Satz: $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}})$ ist eine **kommutative Gruppe**, d.h. es gelten

(AG) $\forall x,y,z \in \mathbb{Z} : (x +_{\mathbb{Z}} y) +_{\mathbb{Z}} z = x +_{\mathbb{Z}} (y +_{\mathbb{Z}} z)$,

(NE) $\exists 0 \in \mathbb{Z}\; \forall x \in \mathbb{Z} : x +_{\mathbb{Z}} 0 = x = 0 +_{\mathbb{Z}} x$,

(IE) $\forall x \in \mathbb{Z}\; \exists (-x) \in \mathbb{Z} : x +_{\mathbb{Z}} (-x) = 0 = (-x) +_{\mathbb{Z}} x$,

(KG) $\forall x,y \in \mathbb{Z} : x +_{\mathbb{Z}} y = y +_{\mathbb{Z}} x$.

Beweis: (NE): $0 = [(1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}}$, denn

$$[(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}} +_\mathbb{Z} [(1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;=\; [(m+1,n+1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;=\; [(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}}.$$

(IE) zu $[(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}}$ ist $[(n,m)]_{\sim_\mathbb{Z}}$, denn

$$[(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}} +_\mathbb{Z} [(n,m)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;=\; [(m+n,n+m)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;=\; [(1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}}.$$

$\square$

2.17 Satz: Für eine beliebige Äquivalenzklasse aus $\mathbb{Z}$ gilt

$$[(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;=\; \begin{cases} [(1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}} & \text{falls } m = n, \\ [(m',1)]_{\sim_\mathbb{Z}} & \text{falls } m > n, \\ [(1,n')]_{\sim_\mathbb{Z}} & \text{falls } m < n. \end{cases}$$

Beweis: Fall $m > n$: $\exists k \in \mathbb{N} : m = n + k$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \;\; (m,n) \;=\; (n+k,n) \;\sim_\mathbb{Z}\; (n+k+1,n+1) \;\sim_\mathbb{Z}\; (k+1,1) \\ &\Rightarrow \;\; [(m,n)]_{\sim_\mathbb{Z}} \;=\; [(k+1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

$\square$

2.18 Bezeichnung:

$$\begin{array}{rcl rcl rcl} 0 &:=& [(1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}}, & 1 &=& [(2,1)]_{\sim_\mathbb{Z}}, \;\ldots & n &=& [(n+1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}}, \\ -1 &=& [(1,2)]_{\sim_\mathbb{Z}}, & -2 &=& [(1,3)]_{\sim_\mathbb{Z}}, \;\ldots & -n &=& [(1,n+1)]_{\sim_\mathbb{Z}}. \end{array}$$

2.19 Addition in $\mathbb{Z}$ und in $\mathbb{N}$ stimmen überein:

$$\begin{aligned} m +_\mathbb{Z} n &= [(m+1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}} +_\mathbb{Z} [(n+1,1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \\ &= [(m+1+n+1,1+1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \\ &= [(\underbrace{m+1+n}_{=m+n+1},1)]_{\sim_\mathbb{Z}} \\ &= m+n \end{aligned}$$

2.3 Die rationalen Zahlen

Aus der Schule: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \;\wedge\; n \in \mathbb{N}\right\}$, $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \;\Leftrightarrow\; m \cdot n' = m' \cdot n$.

2.20 Definition: 1) Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$:

$$\sim_\mathbb{Q} \;:=\; \left\{\big((m,n),(m',n')\big) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})^2 : m \cdot n' = m' \cdot n\right\}.$$

$\sim_\mathbb{Q}$ ist Äquivalenzrelation (Übungen).

2) $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/_{\sim_\mathbb{Q}}$. Definiere dann $+, \cdot, \leq$.

2.21 Bezeichnung: Für $m \in \mathbb{Z}$ schreibe $m := [(m,1)]_{\sim_\mathbb{Q}}$.

2.4 Geordnete Körper

2.22 Definition: Eine Menge $\mathbb{K}$ mit mindestens zwei Elementen bildet einen **Körper**, wenn für alle $x, y, \in \mathbb{K}$ eindeutig definiert ist:

$$\text{Die Summe } x + y \in \mathbb{K},$$
$$\text{Das Produkt } x \cdot y \in \mathbb{K},$$

so dass gelten:

(AG+) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : (x + y) + z = x + (y + z)$,

(KG+) $\forall x, y \in \mathbb{K} : x + y = y + x$,

(NE+) $\exists 0 \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbb{K} : x + 0 = x$,

(IE+) $\forall x \in \mathbb{K}\ \exists(-x) \in \mathbb{K} : x + (-x) = 0$,

(AG·) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(KG·) $\forall x, y \in \mathbb{K} : x \cdot y = y \cdot x$,

(NE·) $\exists 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \forall x \in \mathbb{K} : x \cdot 1 = x$,

(IE·) $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{K} : x \cdot x^{-1} = 1$,

(DG) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

2.23 Bemerkung:: Äquivalent und viel kürzer: $(\mathbb{K}, +)$, $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind kommutative Gruppen und es gilt (DG).

2.24 Beispiele:
1) $\mathbb{N}$ ist kein Körper
2) $\mathbb{Z}$ ist kein Körper
3) $\mathbb{Q}$ ist ein Körper
4) Der kleinste Körper $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ mit

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	0	1

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

2.25 Satz: 1) $\forall x, y \in \mathbb{K}\ \exists! z \in \mathbb{K} : x + z = y$.
Die Lösung: $z = y + (-x)$. Schreibe $y + (-x) =: y - x$.

2) $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \forall y \in \mathbb{K}\ \exists! z \in \mathbb{K} : x \cdot z = y$.
Die Lösung: $z = y \cdot x^{-1}$. Schreibe $y \cdot x^{-1} =: \dfrac{y}{x}$.

Beweis: **1)** $z = y + (-x)$ ist Lösung: Einsetzen liefert

$$x + z \ = \ x + \big(y + (-x)\big) \overset{\text{KG+}}{=} \big(y + (-x)\big) + x \overset{\text{AG+}}{=} y + \big(\underbrace{(-x) + x}_{=x+(-x)=0}\big) \ = \ y + 0 \ = \ y.$$

Die Lösung ist eindeutig: Sei z' eine Lösung: $x + z' = y \ \Rightarrow\ (x + z') + (-x) \ = \ y + (-x)$.
Es gilt

$$(x+z')+(-x) \overset{\text{KG}}{=} -x+(x+z') \overset{\text{AG+}}{=} (-x+x)+z' \overset{\text{KG+}}{=} \big(x+(-x)\big)+z' \ = \ 0+z' \ = \ z'$$

$\Rightarrow\ z' = y + (-x) \ \Rightarrow\ z' = z.$ $\square$

2.26 Satz: Seien $x, y \in \mathbb{K}$. Dann gelten:

1) $x \cdot 0 = 0$,

2) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$,

3) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$,

4) $x \cdot y = 0 \ \Rightarrow\ x = 0 \ \vee\ y = 0$.

Beweis: **1)** $x \cdot 0 \overset{\text{NE+}}{=} x \cdot (0 + 0) \overset{\text{DG}}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0$.

$$\Rightarrow\ \underbrace{-x \cdot 0 + x \cdot 0}_{=0} \ = \ \underbrace{(x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x \cdot 0)}_{=x\cdot 0+\big(x\cdot 0+(-x\cdot 0)\big)=x\cdot 0+0=x\cdot 0}$$

$\Rightarrow\ 0 = x \cdot 0.$

2) Letzter Satz: Die Gleichung

$$x \cdot y + z = \ 0$$

hat genau eine Lösung, nämlich $z = 0 + \big(-(x \cdot y)\big) \overset{\text{NE+}}{=} -(x \cdot y)$.
Für $z = (-x) \cdot y$ gilt

$$x \cdot y + (-x) \cdot y \overset{\text{KG}\cdot}{=} y \cdot x + y \cdot (-x) \overset{\text{DG}}{=} y \cdot \big(x + (-x)\big) \overset{\text{IE+}}{=} y \cdot 0 \overset{1)}{=} 0.$$

Die Lösung ist eindeutig $\Rightarrow\ -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$.

3) Vorüberlegung: $-(-z) = z$, denn

$$\begin{array}{rcl} -z + (-(-z)) & \overset{\text{IE}+}{=} & 0, \\ -z + z & \overset{\text{KG}+}{=} & z + (-z) \;=\; 0, \end{array}$$

also sind z und $-(-z)$ beides Lösung von

$$-z + y = 0 \qquad (y \text{ gesucht}).$$

Nach letztem Satz ist die Lösung eindeutig.

$\Rightarrow\ (-x)\cdot(-y) \overset{2)}{=} -\Big(x\cdot(-y)\Big) \overset{\text{KG}\,\cdot}{=} -\big((-y)\cdot x\big) \overset{2)}{=} -\big(-(y\cdot x)\big) \overset{\text{Vorüberlegung}}{=} y\cdot x \overset{\text{KG}\cdot}{=} x\cdot y.$

4) Sei $x\cdot y = 0$.
Fall $x = 0$: $\Rightarrow\ x = 0 \ \vee\ y = 0$ ist wahr.
Fall $x \neq 0$: $\exists x^{-1} \in \mathbb{K}$

$$0 = x\cdot y \ \Rightarrow\ 0 = x^{-1}\cdot 0 = x^{-1}\cdot(x\cdot y) \overset{\text{AG}\cdot}{=} (x^{-1}\cdot x)\cdot y \overset{\text{KG}\cdot}{=} (x\cdot x^{-1})\cdot y \overset{\text{IE}\cdot}{=} 1\cdot y \overset{\text{NE}\cdot}{=} y$$

$\Rightarrow\ y = 0$, also $x = 0 \ \vee\ y = 0$ wahr. $\square$

2.27 Definition: Seien $a, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{K}$. Dann

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} s_k := 0, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Also $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots a_n.$

2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{0} s_k := 1, \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot a_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Also $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\cdot a_2 \cdots a_n.$

3) Für $n \in \mathbb{N}_0 : n\cdot a := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a \overset{\text{DG}}{=} a\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right).$

4) Für $n \in \mathbb{N}_0 : a^n := \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a$, insbesondere $a^0 = 1$.

5) Für $n \in \mathbb{N} : \dfrac{a}{n} := \dfrac{a}{n\cdot 1}, (-n)\cdot a := -(n\cdot a).$

2.28 Binomialkoeffizienten: Für $m, n \in \mathbb{N}_0,\ n \leq m$:

$$\binom{m}{n} := \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots\ (m-n+1)\ (m-n)!}{\underbrace{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots\ (n-n+1)}_{\text{im Zähler und Nenner gleich viele Faktoren}}\ (m-n)!}$$

2.29 Eigenschaften: 1) $\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!\,m!} = 1,\ \binom{m}{m} = 1.$

2) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}.$

3) $\binom{m}{n+1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n+1}$

2.30 Beispiele: $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10,\ \binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100\cdot 99}{2\cdot 1} = 4950$

2.31 Satz: Seien $a, b \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N}$. Dann gilt die **binomische Formel**

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Beweis: Induktion nach n.

IA $n = 1$: l.S.: $(a+b)^1 = a+b$

r.S.: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k\, b^{1-k} = \underbrace{\binom{1}{0}}_{=1} a^0\, b^1 + \underbrace{\binom{1}{1}}_{=1} a^1\, b^0 = b + a.$

$\Rightarrow$ l.S.=r.S. ✓

IS:
$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\overset{\text{IV}}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \\
&\overset{\text{DG}}{=} a\cdot\sum\ldots + b\cdot\sum\ldots \\
&\overset{\text{DG}}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1}\, b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0\, b^{n+1} \\
&\underset{k=k'-1}{\overset{k':=k+1}{=}} \sum_{k'=1}^{n}\binom{n}{k'-1} a^{k'}\, b^{n+1-k'} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} a^{n+1}\, b^0 + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^0\, b^{n+1} \\
&\overset{k'=:k}{=} \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k\, b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} a^{n+1}\, b^0 + \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1} a^0\, b^{n+1} \\
&\overset{\text{2.29, 3)}}{=} \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1}\, b^0 + \binom{n+1}{0} a^0\, b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ IB, d.h. binomische Formel mit $n+1$ statt n. $\square$

2.32 Satz: Für $q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \quad \textbf{(geometrische Summe)}.$$

Beweis: Übungen

2.33 Definition: Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt **geordnet**, wenn eine vollständige Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{K}$ definiert ist, so dass

(O1) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,

(O2) $\forall x, y \in \mathbb{K} : 0 \leq x \ \wedge \ 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Man definiert:
$$\begin{aligned} x < y &\ :\Leftrightarrow\ x \leq y \ \wedge \ x \neq y \\ x \geq y &\ :\Leftrightarrow\ y \leq x \\ x > y &\ :\Leftrightarrow\ y < x \end{aligned}$$

2.34 Folgerung: In einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt für jedes Paar $x, y \in \mathbb{K}$ genau eine der Beziehungen $x < y,\ x = y,\ x > y$.

2.35 Satz: Ist $(\mathbb{K}, \leq)$ ein geordneter Körper, so gelten für $x, y, z \in \mathbb{K}$:

1) $x < y \ \wedge \ y < z \ \Rightarrow \ x < z$ (Transitivität),

2) $x < y \ \Rightarrow \ x + z < y + z$,

3) $x < y \ \wedge \ z > 0 \ \Rightarrow \ x \cdot z < y \cdot z$,

4) $x > 0 \ \Leftrightarrow \ -x < 0$,

5) $x < 0 \ \wedge \ y < 0 \ \Rightarrow \ x \cdot y > 0$,

6) $x \neq 0 \ \Rightarrow \ x^2 > 0$,

7) $x > 0 \ \Leftrightarrow \ x^{-1} > 0$.

Beweis: 1)
$$\begin{aligned} & x < y \ \wedge \ y < z \\ & \Rightarrow \ x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ (*) \\ & \overset{\text{Transitivität } \leq}{\Rightarrow} \ x \leq z. \end{aligned}$$

Annahme: $x = z \overset{(*)}{\Rightarrow} x \leq y \ \wedge \ y \leq x \overset{\leq \text{ antisymmetrisch}}{\Rightarrow} x = y \ \lightning \ (x < y)$

2) Wie 1)

3) $x < y \ \wedge \ z > 0$

$$\overset{2)}{\Rightarrow} \quad \underbrace{x + (-x)}_{=0} < \underbrace{y + (-x)}_{=y-x}$$

$$\overset{(O2)}{\Rightarrow} \quad 0 \leq z \cdot (y - x) \overset{\text{DG}}{=} z \cdot y - z \cdot x$$

$$\overset{(O1)}{\Rightarrow} \quad 0 + z \cdot x \leq z \cdot y - z \cdot x + z \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \quad z \cdot x \leq z \cdot y.$$

Annahme: $z \cdot x = z \cdot y$.

$z > 0 \ \Rightarrow \ z \neq 0 \ \Rightarrow \ \exists z^{-1} \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \ z^{-1} \cdot (z \cdot x) = z^{-1} \cdot (z \cdot y)$

$\Leftrightarrow \ x = y$ ↯

4) „$\Rightarrow$“: $x > 0 \overset{\text{Def} >}{\Rightarrow} 0 \leq x \overset{(O1)}{\Rightarrow} 0 + (-x) \leq x + (-x) \ \Leftrightarrow \ -x \leq 0.$

Annahme: $-x = 0 \ \Rightarrow \ x + (-x) = x + 0 \ \Rightarrow \ 0 = x$ ↯ $(x > 0)$.

„$\Leftarrow$“: $-x < 0 \overset{\text{Def} <}{\Rightarrow} -x \leq 0 \overset{(O1)}{\Rightarrow} x + (-x) \leq x + 0 \ \Rightarrow \ 0 \leq x.$

Annahme $x = 0 \ \Rightarrow \ x + (-x) = 0 + (-x) \ \Rightarrow \ 0 = -x$ ↯

5) $x < 0 \wedge y < 0 \overset{4)}{\Rightarrow} -x > 0 \wedge y < 0 \overset{3)}{\Rightarrow} \underbrace{y \cdot (-x)}_{=-x \cdot y} < \underbrace{0 \cdot (-x)}_{=0} \Leftrightarrow -x \cdot y < 0 \overset{4)}{\Leftrightarrow} x \cdot y > 0.$ □

2.36 Satz: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper. Dann gilt: $\forall x < y \ \exists z \in \mathbb{K} : x < z < y$.

2.37 Folgerung: Jeder geordnete Körper hat unendlich viele Elemente.

Beweis: $x < y \overset{2.35,\ 1)}{\Rightarrow} \underbrace{x + x}_{=x(1+1)=2x} < y + x \ \wedge \ y + x < \underbrace{y + y}_{=2y}.$

Zwischenüberlegung: 2.35, 6): $1 > 0 \ \Rightarrow \ 1 + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$

$\overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} \ 2 = 1 + 1 > 0 \overset{2.35,\ 7)}{\Rightarrow} \dfrac{1}{2} = 2^{-1} > 0$

$\overset{2.35,\ 3)}{\Rightarrow} \ x < \underbrace{\frac{1}{2}(y + x)}_{=:z} < y.$ □

2.38 Definition: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper, $a, b \in \mathbb{K}$.

1)

$[a, b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\}$	**abgeschlossenes Intervall**
$]a, b[$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : a < x < b\}$	**offenes Intervall**
$[a, b[$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : a \leq x < b\}$	**(rechts) halboffenes Intervall**
$]a, b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : a < x \leq b\}$	**(links) halboffenes Intervall**
$]-\infty, b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : x \leq b\}$	
$]-\infty, b[$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : x < b\}$	
$]a, \infty[$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : x > a\}$	
$[a, \infty[$	$:=$	$\{x \in \mathbb{K} : x \geq a\}$	

2) $|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$ (Betrag $|.| : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$).

2.39 Satz: Für $x \in \mathbb{K}$ gelten

$$|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|.$$

Beweis: Fall $x = 0$: Dann $|x| = 0, |-x| = |0| = 0 \;\Rightarrow$ Behauptung.

Fall $x > 0$: Dann $|x| = x > 0,\ |-x| = -(-x) = x > 0$ und
$-x < 0 < x = |x| \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} -x < |x|$.

Fall $x < 0$: Dann $|x| = -x > 0,\ |-x| = -x > 0$ und
$x < 0 \leq |x| \;\Rightarrow\; x \leq |x|,\ -x = |x| \;\Rightarrow\; -x \leq |x|$. □

2.40 Satz: $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper, $a \in \mathbb{K}$, $a \geq 0$. Dann:

$$|x| < a \;\Leftrightarrow\; x \in \,]-a, a[\;.$$

Beweis: Übungen

2.41 Satz: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper. Dann

(B1) $\forall x \in \mathbb{K} : \big(|x| \geq 0 \;\wedge\; (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)\big)$,

(B2) $\forall x, y \in \mathbb{K} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

(B3) $\forall x, y \in \mathbb{K} : |x + y| \leq |x| + |y|$ (**Dreiecksungleichung, $\triangle$-Ungl.**).

D.h. $(\mathbb{K}, |.|)$ ist ein bewerteter Körper.

Beweis: (B1),(B2) klar
(B3): Fall 1: $x + y \geq 0$

$$\Rightarrow\; |x + y| = \underbrace{x}_{\leq |x|} + \underbrace{y}_{\leq |y|} \leq |x| + |y|.$$

Fall 2: $x + y < 0$

$$\Rightarrow\; |x + y| = -(x + y) = \underbrace{(-x)}_{\leq |x|} + \underbrace{(-y)}_{\leq |y|} \leq |x| + |y|.$$

□

2.42 Dreiecksungleichung nach unten: Für $x, y \in \mathbb{K}$ gilt

$$|x - y| \;\geq\; \big||x| - |y|\big|.$$

(Es folgt $|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|$.)

Beweis:
$$\begin{aligned} |x| &= \big|(x-y)+y\big| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} |x-y| + |y| \;\Rightarrow\; |x-y| \geq |x| - |y| \\ |y| &= \big|(y-x)+x\big| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} |y-x| + |x| \;\Rightarrow\; |x-y| = |y-x| \geq |y| - |x| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; |x-y| \;\geq\; \begin{cases} |x| - |y| & \text{falls } |x| \geq |y| \\ |y| - |x| & \text{falls } |x| < |y| \end{cases} \;=\; \big||x| - |y|\big|$$
□

2.43 Definition: Ein geordneter Körper heißt **archimedisch**, falls

$$\forall x, y > 0 \;\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot x \geq y.$$

2.44 Satz: $(\mathbb{Q}, \leq)$ ist ein archimedischer Körper.

Beweis: $x = \dfrac{p}{q},\; y = \dfrac{p'}{q'};\; p, p', q, q' \in \mathbb{N}$.

Hauptnenner: $x = \dfrac{p \cdot q'}{q \cdot q'},\; y = \dfrac{p' \cdot q}{q \cdot q'}$.

Wähle $n := p' \cdot q \;\Rightarrow\; n \cdot x = \dfrac{p' \cdot q \cdot p \cdot q'}{q \cdot q'} \overset{(*)}{\geq} \dfrac{p' \cdot q}{q \cdot q'} = y$.

Zu $(*)$: $p \cdot q' \geq 1 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq p \cdot q' \underset{p' \cdot q \geq 0}{\overset{2.35\ 3)}{\Rightarrow}} p' \cdot q \leq p \cdot q' \cdot p' \cdot q \;\Rightarrow\; (*)$ mit $\dfrac{1}{q \cdot q'} > 0$, da $q \cdot q' > 0$. □

3 Folgen und Reihen in geordneten Körpern

3.1 Konvergenz

3.1 Definition: Eine Abbildung $a_\cdot : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ heißt **Folge**. Schreibe

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ oder } (a_n) \text{ oder } a_1, a_2, a_3, \ldots .$$

Es gibt auch Folgen, die als erstes Folgenglied a_m, $m \in \mathbb{Z}$ haben:

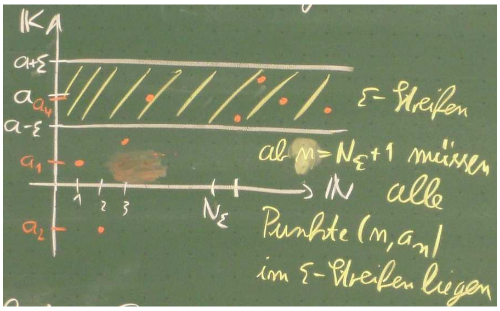
$$(a_n)_{n\geq m} \text{ oder } a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$$

3.2 Definition: Eine Folge heißt **konvergent** zum **Grenzwert** $a \in \mathbb{K}$, falls

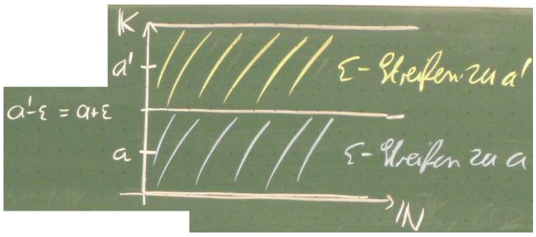
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon : |a_n - < | < \varepsilon.$$

Schreibe $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Eine nicht konvergente Folge heißt **divergent**.

Veranschaulichung:



3.3 Satz: Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.



Beweis: Annahme: $a_n \to a \;\wedge\; a_n \to a' \;\wedge\; a \neq a'$.
Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}|a' - a|$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2\varepsilon &= |a' - a| = \big|(a' - a_n) + (a_n - a)\big| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \underbrace{|a' - a_n|}_{<\varepsilon \text{ für } n>N_\varepsilon} + \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon \text{ für } n>N'_\varepsilon} \\
&< 2\varepsilon \text{ für } n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\} \\
\Rightarrow 2\varepsilon &< 2\varepsilon \; \lightning
\end{aligned}$$

□

3.4 Definition: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper. Eine Mnge $M \subseteq \mathbb{K}$ besitzt ein **Maximum** (**Minimum**), falls M ein größtes (kleinstes) Element m besitzt:

$$\exists m \in M \; \forall m' \in M : m' \leq m \quad (m' \geq m).$$

Schreibweise: $\max(M) := m$ (bzw. $\min(M)$).

3.5 Beispiele: **1)** $M = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$: M hat kein Maximum, $\min(M) = 1$.

2) $\max\big([0,2]\big) = 2$.

3) $[0,2[$ hat kein Maximum.

3.6 Satz: **1)** Besitzt $M \subseteq \mathbb{K}$ ein größtes Element m, so ist m eindeutig.

2) Jede endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}$ besitzt ein Maximum.

Beweis: **1)** Sind m, m' größte Elemente, so folgt $m' \leq m \;\wedge\; m \leq m'$
$\Rightarrow \; m = m'$.

2) Beweise durch Induktion: Jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}$ mit n Elementen besitzt ein größtes Element.

IA: $n = 1$: $M = \{m_1\} \;\Rightarrow\; m_1$ ist größtes Element.

IS: Sei $M = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\} \subseteq \mathbb{K}$ mit $n+1$ Elementen.
IV $\Rightarrow$ $M' = \{m_1, \ldots, m_n\}$ hat größtes Element m_k.
Fall 1: $m_{n+1} > m_k \;\Rightarrow\; m_{n+1}$ ist größtes Element von M.
Fall 2: $m_{n+1} \leq m_k$ ($m_{n+1} = m_k$ kann eigentlich nicht sein)
$\Rightarrow\; m_k$ ist größtes Element von M. $\square$

3.7 Definition: Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, falls

$$\exists S \in \mathbb{K} \; \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq S.$$

Also: Eine Folge (a_n) ist nicht beschränkt, falls

$$\forall S \in \mathbb{K} \; \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| > S.$$

3.8 Satz: Ist (a_n) konvergent, so ist (a_n) beschränkt.
Also: (a_n) nicht beschränkt $\;\Rightarrow\;$ (a_n) nicht konvergent.

Beweis: Wähle $\varepsilon := 1$

$a_n \to a \;\Rightarrow\; \forall n > N_1$ gilt

$$|a_n| \;=\; \big|(a_n - a) + a\big| \;\leq\; |a_n - a| + |a| \;\leq\; |a| + 1.$$

Definiere $S := \max\big\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_1}|, |a| + 1\big\}$

$\Rightarrow\; \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq S.$ □

3.9 Satz: $(a_n),\ (b_n)$ beschränkt $\;\Rightarrow\;$ $(a_n \pm b_n),\ (a_n \cdot b_n)$ sind beschränkt.

Beweis: $|a_n| \leq S,\ |b_n| \leq S'$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a_n \pm b_n| & \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} & |a_n| + |b_n| & \leq & S + S' \\ |a_n \cdot b_n| & = & |a_n| \cdot |b_n| & \leq & S \cdot S' \end{cases}$$

□

3.10 Bemerkung: $a_n = 1,\ b_n = \dfrac{1}{n} \;\Rightarrow\; (a_n), (b_n)$ beschränkt, aber $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ nicht beschränkt.

3.11 Satz: Wenn $a_n \to a,\ b_n \to b$, dann

1) $a_n \pm b_n \to a \pm b$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$,

3) Falls $b \neq 0$ und

$$c_n \;:=\; \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_n} & \text{falls } b_n \neq 0 \\ 0 & \text{falls } b_n = 0 \end{cases}$$

dann $c_n \to \dfrac{a}{b}$.

Beweis: **1)** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

$$\begin{aligned} a_n \to a \;&\Rightarrow\; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n > N_\varepsilon \\ b_n \to b \;&\Rightarrow\; |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n > N'_\varepsilon \end{aligned}$$

Für $n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ folgt

$$\big|(a_n + b_n) - (a + b)\big| = \big|(a_n - a) + (b_n - b)\big| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = \big|(a_n - a)b_n + a(b_n - b)\big| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \underbrace{|a_n - a|\,|b_n|}_{\text{soll sein } <\varepsilon/2} + \underbrace{|a|\,|b_n - b|}_{\text{soll sein } <\varepsilon/2}$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

(b_n) konvergent $\Rightarrow$ (b_n) beschränkt $\Rightarrow$ $|b_n| < S$

o.B.d.A.: $S > 0$.

$a_n \to a \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2S}$ für $n > N_\varepsilon$.

Für $|a| \neq 0$:

$b_n \to b \;\Rightarrow\; |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2|a|}$ für $n > N'_\varepsilon$.

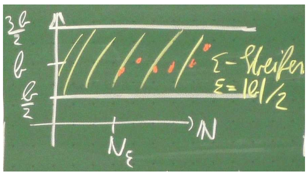
Für $|a| \neq 0$ und $n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ folgt

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \;<\; \frac{\varepsilon}{2S}S + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} \;=\; \varepsilon.$$

Für $|a| = 0$ und $n > N_\varepsilon$ folgt

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \;<\; \frac{\varepsilon}{2S}S + 0 \cdot |b_n - b| \;=\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon.$$

3) Vorüberlegung: Wenn $b_n \to b \neq 0$, dann existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n| > \dfrac{|b|}{2}$ für $n > N_1$, denn:



Wähle $\varepsilon := \dfrac{|b|}{2}$. Für $n > N_\varepsilon$ folgt

$$|b_n| \;=\; \big|(b_n - b) + b\big| \;=\; \big|b + (b_n - b)\big| \underset{\text{nach unten}}{\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\geq}} |b| - \underbrace{|b_n - b|}_{<\varepsilon = |b|/2} \;>\; |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

Für $n > N_1$ gilt

$$\begin{aligned}
\left|c_n - \frac{a}{b}\right| \quad &= \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n \cdot b - a \cdot b_n}{b_n \cdot b}\right| = \frac{1}{|b_n \cdot b|}\big|(a_n - a)b + a(b - b_n)\big| \\
&= \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \frac{1}{|b_n| \cdot |b|}|a_n - a| \cdot |b| + \frac{|a|}{|b_n| \cdot |b|}|b - b_n| \\
&\overset{|b_n| > |b|/2}{<} \frac{1}{|b|}\underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon \cdot |b|/4 \text{ für } n > N_\varepsilon} + \frac{2|a|}{|b|^2}\underbrace{|b - b_n|}_{<\varepsilon|b|^2/4|a| \text{ für } n > N'_\varepsilon}
\end{aligned}$$

Für $n > \max\{N_1, N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ folgt

$$\left|c_n - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

3.12 Einschließungskriterium: Seien (a_n), (b_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und (c_n) mit $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n \leq c_n \leq b_n$. Dann ist (c_n) konvergent, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Beweis: Übungen

3.13 Definition: Eine Folge (a_n) heißt **Nullfolge**, falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3.14 Satz: (a_n) beschränkt und (b_n) Nullfolge $\Rightarrow$ $(a_n\, b_n)$ ist Nullfolge.

Beweis: Übungen

3.15 Definition: Eine Folge (a_n) heißt

monoton wachsend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$,

streng monoton wachsend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$,

monoton fallend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$,

streng monoton fallend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$.

3.16 Definition: Ist (a_n) eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** von (a_n).

3.17 Beispiele: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n_k = 2k \;\Rightarrow\; a_{n_k} = \dfrac{(-1)^{2k}}{2k} = \dfrac{1}{2k}$

$n_k = k + 100 \;\Rightarrow\; a_{n_k} = a_{101}, a_{102}, a_{103}, \ldots$

3.18 Satz: $a_n \to a \;\wedge\; (a_{n_k})$ Teilfolge von (a_n) $\Rightarrow$ $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$.

3.19 Folgerung: Hat (a_n) zwei Teilfolgen mit verschiedenen Grenwerten, so ist (a_n) divergent.

Beweis: Vorüberlegung: (n_k) streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $n_k \geq k$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

$$\begin{aligned} a_n \to a \quad &\Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |a_{n_k} - a| < \varepsilon \text{ für } k > N_\varepsilon \text{ (dann } n_k > N_\varepsilon). \end{aligned}$$ □

3.20 Definition: **1)** Ist (a_n) Folge in $\mathbb{K}$, so heißt die Folge (s_n) mit $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ (unendliche) **Reihe** in $\mathbb{K}$. Schreibweise:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \;:=\; (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

s_n heißt n-te **Teilsumme** der Reihe.

2) Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **konvergent** zum Grenzwert s, falls $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Schreibweise:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \;:=\; \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Eine nicht konvergente Reihe heißt **divergent**.

Achtung: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ hat je nach Kontext verschiedene Bedeutungen.

3.2 Beispiele in $\mathbb{Q}$

1) $a_n = c$ (konstante Folge):

$$|a_n - c| \;=\; |c - c| \;=\; 0 \;<\; \varepsilon \text{ für jedes } \varepsilon > 0 \text{ und alle } n \in .\mathbb{N}.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c.$

2) Für festes $k \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$: Sei $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{1}{n^k} - 0\right| \;=\; \left|\frac{1}{n^k}\right| \;=\; \frac{1}{n^k} \;\leq\; \frac{1}{n} \;\stackrel{!}{<}\; \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Also: Wähle $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Dies ist möglich, da $\mathbb{Q}$ archimedisch ist.

3) $a_n = 4 + \dfrac{3}{n^2} = 4 + 3 \cdot \dfrac{1}{n^2} \underset{\text{konvergente Folgen}}{\stackrel{\text{Satz über}}{\longrightarrow}} 4 + 3 \cdot 0 = 4.$

4) $a_n = \dfrac{5n^2 + 3n}{1 + 2n^2} = \dfrac{n^2(5 + \frac{3}{n})}{n^2(\frac{1}{n^2} + 2)} = \dfrac{5 + \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2} + 2} \underset{\text{konvergente Folgen}}{\stackrel{\text{Satz über}}{\longrightarrow}} \dfrac{5 + 3 \cdot 0}{0 + 2} = \dfrac{5}{2}.$

3.21 Satz: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper, $x \in \mathbb{K}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$(1 + x)^n \;\geq\; 1 + nx \quad \text{(Bernoulli-Ungleichung)}.$$

Beweis: Übungen

5) $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{Q}$ fest.

Fall $|q| < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$:

$$|q^n - 0| \;=\; |q^n| \;=\; |q|^n \;\stackrel{!}{<}\; \varepsilon.$$

Schreibe $|q| = \dfrac{1}{1 + \delta}$ mit $\delta = \dfrac{1}{|q|} - 1 > 0$.

$$(1 + \delta)^n \;\stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq}\; 1 + n\delta \;>\; n\delta \;\Rightarrow\; |q|^n \;=\; \frac{1}{(1 + \delta)^n} \;<\; \frac{1}{n\delta} \;<\; \varepsilon \text{ falls } n > \frac{1}{\delta\varepsilon}$$

(hierbei verwendet: $0 < a < b \;\Rightarrow\; 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$). Wähle $N_\varepsilon \geq \dfrac{1}{\delta\varepsilon}$.

Fall $q = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.

Fall $q = -1$: $q^n = (-1)^n$ ist divergent:

Teilfolge mit $n_k = 2k$: $\quad (-1)^{2k} = 1 \to 1$

Teilfolge mit $n_k = 2k + 1$: $\quad (-1)^{2k+1} = -1 \to -1$

Zwei Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten $\Rightarrow$ Divergenz.

Fall $|q| > 1$: (q^n) ist divergent, weil nicht beschränkt: Zeige

$$\forall S \in \mathbb{K}\ \exists n \in \mathbb{N} : |q^n| > S.$$

Schreibe $|q| = 1 + \delta$ mit $\delta = |q| - 1 > 0$.

$$\Rightarrow\ |q|^n\ =\ (1+\delta)^n\ \overset{\text{Bernoulli}}{\geq}\ 1 + n\delta\ >\ n\delta\ \overset{!}{>}\ S\ \Leftrightarrow\ n\ >\ \frac{S}{\delta}.$$

6) **Geometrische Reihe**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k\ =\ \frac{1}{1-q}\ \text{für } |q| < 1$$

(bedeutet $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \to \frac{1}{1-q}$). Denn:

$$\begin{aligned} s_n\ &=\ \sum_{k=0}^{n} q^k\ \overset{\text{geometrische Summe}}{=}\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &=\ \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q}\, q^n\ \underset{\text{konvergente Folgen}}{\overset{\text{Satz über}}{\longrightarrow}}\ \frac{1}{1-q} + 0\, \frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$

7) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, denn die Teilsummenfolge ist nicht beschränkt (siehe Aufgabe 3.1).

3.22 Definition: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Köper. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt **bestimmt divergent**, falls

$$\forall S \in \mathbb{K}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n > S,$$

Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, oder falls

$$\forall S \in \mathbb{K}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n < S,$$

Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

3.23 Beispiele: 1) $\lim_{n\to\infty} n^k = \infty$ ($k \in \mathbb{N}$ fest).

2) $\left((-1)^n \cdot n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht bestimmt divergent.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} k^n = \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ $\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty\right)$

3.3 Cauchy-Folgen in geordneten Körpern

3.24 Definition: Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ geordneter Körper. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

((a_n) heißt auch C-Folge, Fundamentalfolge).

3.25 Satz: (a_n) C-Folge $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt.

Beweis: Wähle $\varepsilon := 1$. Dann $\forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < 1$.
Wähle festes $m := N_\varepsilon + 1$. Für $n > N_\varepsilon$ folgt

$$|a_n| \;=\; \big|(a_n - a_m) + a_m\big| \;\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq}\; |a_n - a_m| + |a_m| \;<\; 1 + |a_m|.$$

Für $S := \max\big\{|a_1, |a_2|, \ldots, |a_{N_\varepsilon}|, |a_{N_\varepsilon+1}| + 1\big\}$ gilt $|a_n| \leq S$ für $n \in \mathbb{N}$. $\square$

3.26 Satz: (a_n), (b_n) C-Folgen. Dann:

1) $(a_n \pm b_n)$ ist C-Folge.

2) $(a_n \cdot b_n)$ ist C-Folge.

3) Es gelte zusätzlich: $\exists \delta > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : |b_n| \geq \delta$. Dann ist (c_n) mit

$$c_n \;:=\; \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_n} & \text{falls } b_n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine C-Folge.

Beweis: Selber, vgl. Satz über konvergente Folgen.

3.27 Satz: (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist C-Folge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ fest.
$a_n \to a \;\Rightarrow\; \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Für $n, m > N_\varepsilon$ folgt

$$|a_n - a_m| \;=\; \big|a_n - a - (a_n - a)\big| \;\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq}\; |a_n - a| + |a_m - a| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

$\square$

3.28 Beispiel: Nicht jede C-Folge ist konvergent:
Sei (a_n) in $\mathbb{Q}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1,\ a_{n+1} := \frac{1}{2}\,a_n + \frac{1}{a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Übungen: (a_n) ist C-Folge und falls $a_n \to a \;\Rightarrow\; a^2 = 2$
Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2 \;\Rightarrow\; (a_n)$ nicht konvergent.

3.29 Satz: (a_n) C-Folge und (a_{n_k}) konvergente Teilfolge $\Rightarrow$ (a_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} =: a$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ fest. Dann;

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n, m > N_\varepsilon, \quad |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } k > K_\varepsilon.$$

Für $n > N_\varepsilon$ und fest gewähltem $m = n_k$ mit $k > \max\{K_\varepsilon, N_\varepsilon\}$ folgt

$$|a_n - a| \;\le\; |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

□

3.30 Definition: Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt **vollständig**, falls jede C-Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert.

3.4 Konstruktion der reellen Zahlen aus $\mathbb{Q}$

3.31 Reelle Zahlen als Folgen: $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ bedeutet:
$\sqrt{2} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, wobei $a_1 = 1;\ a_2 = 1,4;\ a_3 = 1,41;\ a_4 = 1,414; \ldots$
Aber $\sqrt{2}$ gibt's ja noch gar nicht.
Idee: Definiere $\sqrt{2} := (a_n)$, wobei (a_n) die obige C-Folge bezeichnet.
Also: Jede C-Folge definiert eine reelle Zahl.
Problem: $b_n := a_n + \dfrac{1}{n}$. Dann hat (b_n) denselben Grenzwert wie (a_n), sollte also dieselbe reelle Zahl darstellen.

3.32 Definition: **1)** $\mathsf{CF}(\mathbb{Q}) := \big\{(a_n) : (a_n) \text{ ist C-Folge in } \mathbb{Q}\big\}$.

2) Definiere die Relation $\sim$ auf $\mathsf{CF}(\mathbb{Q})$:

$$(a_n) \sim (b_n) \;:\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

3.33 Satz: $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf $\mathsf{CF}(\mathbb{Q})$.

Beweis: **1)** reflexiv: $a_n - a_n \to 0$.

2) symmetrisch: $0 = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

3) transitiv: $(a_n) \sim (b_n) \;\wedge\; (b_n) \sim (c_n) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0 \;\wedge\; \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - c_n) = 0$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n + b_n - c_n) \\ &\overset{\text{Satz über}}{\underset{\text{konv. Folgen}}{=}} \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a_n) \sim (c_n).$$

□

3.34 Definition: **1)** $\mathbb{R} := \mathsf{CF}(\mathbb{Q})/_\sim = \big\{[(a_n)] : (a_n) \in \mathsf{CF}(\mathbb{Q})\big\}$,

2) $[(a_n)] + [(b_n)] := [(a_n + b_n)]$,

3) $[(a_n)] \cdot [(b_n)] := [(a_n \cdot b_n)]$.

3.35 Satz: Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ sind wohldefiniert.

Beweis: **1)** $(a_n), (b_n)$ sind C-Folgen $\Rightarrow$ $(a_n + b_n)$ ist C-Folge $\Rightarrow$ $[(a_n + b_n)]$ ist definiert.

2) Zeige: $\left.\begin{aligned}[(a_n)] &= [(a'_n)] \\ [(b_n)] &= [(b'_n)]\end{aligned}\right\} \Rightarrow [(a_n + b_n)] = [(a'_n + b'_n)]$:

$a_n - a'_n \to 0 \;\wedge\; b_n - b'_n \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\big((a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)\big) = \lim_{n\to\infty}(a_n - a'_n + b_n - b'_n) \overset{\text{Satz über}}{\underset{\text{konv. Folgen}}{=}} 0 + 0 = 0.$$

□

3.36 Satz: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beweis: **(KG+):** $[(a_n)] + [(b_n)] \overset{\text{Def }+}{=} [(a_n + b_n)] \overset{\text{KG+ in }\mathbb{Q}}{=} [(b_n + a_n)] \overset{\text{Def }+}{=} [(b_n)] + [(a_n)]$.

(AG+): Genauso

(NE+): $[(\frac{1}{n})] = [(0)] =: 0 \;\Rightarrow\; [(a_n)] + 0 = [(a_n)] + [(0)] = [(a_n + 0)] = [(a_n)]$.

(IE+): $-[(a_n)] = [(-a_n)]$, denn $[(a_n)] + [(-a_n)] = [(a_n - a_n)] = [0] = 0$.

Genauso: (AG·), (KG·), (NE·) mit $1 := [(1)] = [(1 + \frac{1}{2^n})] = [(\frac{n}{n+1})]$.

(IE·): Sei $[(a_n)] \neq 0 \Leftrightarrow \neg\Big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\Big)$

$$\Leftrightarrow \neg\big(\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n| < \varepsilon\big)$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |a_n| \geq \varepsilon_0$$

Zwischenziel: Zeige $\exists c > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m > N : |a_m| > c$.

(a_n) C-Folge $\Rightarrow\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$.

Wähle $N := N_\varepsilon \ \Rightarrow\ \exists n_0 > N_\varepsilon : |a_{n_0}| \geq \varepsilon$.

Für $m > N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} |a_m| &= |a_m - a_{n_0} + a_{n_0}| \\ &= |a_{n_0} + a_m - a_{n_0}| \\ &\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\underset{\text{nach unten}}{\geq}} \big||a_{n_0}| - |a_m - a_{n_0}|\big| \\ &\geq |a_{n_0}| - |a_m - a_{n_0}| \\ &> \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \forall m > N_\varepsilon : |a_m| > \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Definiere das inverse Element zu $[(a_n)]$ durch $b_n := \begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & \text{falls } a_n \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b_n) \text{ ist C-Folge (3.26)} \\ a_n \cdot b_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow\ a_n \cdot b_n - 1 = 0 \text{ für } n > N_\varepsilon \end{cases}$$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n - 1) = 0$, d.h. $[(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(a_n \cdot b_n)] = [(1)] = 1$.

(DG): Wie oben

□

3.37 Definition: $(a_n) \in \mathrm{CF}(\mathbb{Q})$ heißt **positiv**, falls

$$\exists \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n \geq \delta,$$

3.38 Beispiele: **1)** $a_n := 1 + \dfrac{1}{n}$ ist positiv: $a_n \geq \delta := 1$ für $n > N := 1$.

2) $b_n := \dfrac{1}{n}$ ist nicht positiv, da $b_n \to 0$.

3) $c_n := \begin{cases} -1\,000 & \text{für } n \leq 10^6 \\ 1 & \text{für } n > 10^6 \end{cases}$ ist positiv: $N := 10^6,\ \delta := 1.$

3.39 Satz: „positiv“ und „$\sim$“ sind verträglich,d.h.

$$(a_n) \text{ positiv } \wedge\ (b_n) \sim (a_n)\ \Rightarrow\ (b_n) \text{ positiv.}$$

Beweis: (a_n) positiv: $\exists \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n \geq \delta.$
$(b_n) \sim (a_n)\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0\ \Rightarrow\ \exists N_\delta \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\delta : |b_n - a_n| < \frac{\delta}{2}.$
$\Rightarrow$ Für $n > \max\{N, N_\delta\}$ gilt

$$b_n\ =\ a_n + b_n - a_n\ \geq\ a_n - |b_n - a_n|\ >\ \delta - \frac{\delta}{2}\ =\ \frac{\delta}{2}.$$

$\Rightarrow$ (b_n) ist positiv. □

3.40 Satz: Sei $(a_n) \in$ CF($\mathbb{Q}$). Dann ist genau eine der drei Aussagen erfüllt:

(i) (a_n) positiv,

(ii) $a_n \to 0$,

(iii) $(-a_n)$ ist positiv.

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{(i)} &\ \Leftrightarrow\ \exists \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n \geq \delta \\ \text{(ii)} &\ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n| < \varepsilon \\ \text{(iii)} &\ \Leftrightarrow\ \exists \delta' > 0\ \exists N' \in \mathbb{N}\ \forall n > N' : \underbrace{-a_n \geq \delta}_{a_n \leq -\delta} \end{aligned}$$

Fall 1: (i) ist wahr $\Rightarrow$ (ii),(iii) sind falsch.

Fall 2: (iii) ist wahr $\Rightarrow$ (i),(ii) sind falsch.

Fall 3: $\neg$(i) $\wedge$ $\neg$(ii) ist wahr. $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \delta > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : a_n < \delta \\ \wedge\ \forall \delta' > 0\ \forall N' \in \mathbb{N}\ \exists n' > N' : a_{n'} > -\delta \end{cases}$

Sei $\varepsilon > 0$ fest. (a_n) ist C-Folge $\Rightarrow$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$
Wähle $\delta = \delta' := \frac{\varepsilon}{2}$ und $n, n' > N_\varepsilon$ mit $a_n < \frac{\varepsilon}{2}$ und $a_{n'} > -\frac{\varepsilon}{2}.$
Für $m > N_\varepsilon$ gelten

$$\begin{aligned} a_m &= a_n + \underbrace{a_m - a_n}_{<\varepsilon/2} &<& \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} &=& \varepsilon \\ a_m &= a_{n'} + \underbrace{a_m - a_n}_{>-\varepsilon/2} &>& -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} &=& -\varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\forall n > N_\varepsilon : -\varepsilon < a_n < \varepsilon$ ($\Leftrightarrow$ $|a_n| < \varepsilon$)
$\Rightarrow$ $a_n \to 0$
$\Leftrightarrow$ (ii). □

3.41 Definition: Für $[(a_n)], [(b_n)] \in \mathbb{R}$:

$$[(a_n)] \leq [(b_n)] \ :\Leftrightarrow \ (b_n - a_n) \text{ positiv } \vee \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

3.42 Satz: $\leq$ ist eine vollständige Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$.

Beweis: 1) reflexiv: ✓

2) antisymmetrisch: Sei $[(a_n)] \leq [(b_n)] \ \wedge \ [(b_n)] \leq [(a_n)]$

Fall 1: $(b_n - a_n)$ positiv

$\overset{\text{letzter Satz}}{\Rightarrow} \ \neg(b_n - a_n) \to 0 \ \wedge \ \neg(a_n - b_n)$ positiv

$\Rightarrow \ \neg[(b_n)] \leq [(a_n)]$

$\Rightarrow$ Fall nicht möglich.

Fall 2: $(a_n - b_n)$ positiv $\overset{\text{genauso}}{\Rightarrow}$ $\neg[(a_n)] \leq [(b_n)]$, also nicht möglich

Fall 3: $a_n - b_n \to 0$. Dann $[(a_n)] \leq [(b_n)] \wedge [(b_n)] \leq [(a_n)] \wedge [(a_n)] = [(b_n)]$, da $(a_n) \sim (b_n)$.

Also folgt $[(a_n)] = [(b_n)]$.

3) transitiv: Sei $[(a_n)] \leq [(b_n)] \ \wedge \ [(b_n)] \leq [(c_n)]$.

Fall 1: $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \ \wedge \ \lim\limits_{n\to\infty}(c_n - b_n) = 0$

$\Rightarrow \ \lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n - b_n + b_n - a_n) = 0$

$\Rightarrow \ [(a_n)] \leq [(b_n)]$.

$\vdots$

Fall 4: $(b_n - a_n)$ positiv und $(c_n - b_n)$ positiv $\Rightarrow$ $(c_n - a_n)$ positiv, denn

$$c_n - a_n \ = \ \underbrace{c_n - b_n}_{\geq \delta_1,\ n_{N_1}} + \underbrace{b_n - a_n}_{\geq \delta_2,\ n > N_2} \ \overset{n > \max\{N_1, N_2\}}{\geq} \ \delta_1 + \delta_2 > 0$$

$\Rightarrow \ [(a_n)] \leq [(c_n)]$.

1) – 3) $\Rightarrow \leq$ ist Ordnungsrelation.

4) Vollständigkeit: Sein $[(a_n)], [(b_n)] \in \mathbb{R}$.

Fall 1: $(b_n - a_n)$ positiv $\Rightarrow$ $[(a_n)] \leq [(b_n)]$,

Fall 2: $(b_n - a_n) \to 0$ $\Rightarrow$ $[(a_n)] \leq [(b_n)]$,

Fall 1: $(a_n - b_n)$ positiv $\Rightarrow$ $[(b_n)] \leq [(a_n)]$.

Nach letztem Satz sind dies alle Fälle.

$\square$

3.43 Satz: $(\mathbb{R}, \leq)$ ist ein geordneter Körper.

Beweis: $1)$ Zeige: $[(a_n)] \leq [(b_n)] \;\Rightarrow\; [(a_n)] + [(c_n)] \leq [(b_n)] + [(c_n)]$.

Fall a): $b_n - a_n \to 0 \;\Rightarrow\; b_n + c_n - (a_n + c_n) \to 0$

$\Rightarrow\; [(a_n)] + [(c_n)] = [(a_n + c_n)] \leq [(b_n)] \leq [(c_n)] = [(b_n)] + [(c_n)]$

Fall b): $(b_n - a_n)$ positiv $\;\Rightarrow\; \big(b_n + c_n - (a_n + c_n)\big)$ ist positiv

$\Rightarrow\; [(a_n)] + [(c_n)] \leq [(b_n)] + [(c_n)]$.

2) Zeige $[(a_n)] \leq [(b_n)] \;\wedge\; 0 \leq [(c_n)] \;\Rightarrow\; [(a_n)] \cdot [(c_n)] \leq [(b_n)] \cdot [(c_n)]$ genauso wie 1). $\square$

3.44 Bemerkung: $1)$ Damit sind in $\mathbb{R}$ automatisch definiert: $n \cdot x,\ \dfrac{x}{n},\ x^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $<,\ \geq,\ >$, Folgen- und Reihenkonvergenz, C-Folgen, $|.|$.

2) Alle Sätze, die in geordneten Körpern gelten, gelten auch in $\mathbb{R}$.

3.45 Satz: Für $X \in \mathbb{R},\ X = [(x_n)]$ gelten

1) $X > 0 \;\Leftrightarrow\; (x_n)$ positiv,

2) $X| = [(|x_n|)]$.

Beweis: $1)$ $X > 0 \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} 0 < X \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} 0 \leq X \;\wedge\; X \neq 0$

$\Leftrightarrow\; \big((x_n - 0)$ positiv $\vee\; x_n - 0 \to 0\big) \;\wedge\; \neg(x_n \to 0) \;\Leftrightarrow\; (x_n)$ positiv.

2) **Fall a):** $X > 0 \;\Leftrightarrow\; (x_n)$ positiv $\;\Rightarrow\; \exists \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_n \geq \delta$

$\Rightarrow\; \forall n > N : x_n = |x_n| \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \big(|x_n| - x_n\big) = 0$

$\Rightarrow\; |X| = X = [(x_n)] = [(|x_n|)]$.

Fall b): $X = 0 \;\Rightarrow\; x_n \to 0 \;\Rightarrow\; |x_n| \to 0 \;\Rightarrow\; |X| = 0 = [(|x_n|)]$.

Fall c): $X < 0 \;\Leftrightarrow\; -X > 0 \;\Leftrightarrow\; (-x_n)$ positiv

$\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \big(|x_n| - (-x_n)\big) = 0$

$\Rightarrow\; |X| = -X = [(-x_n)] = [(|x_n|)]$. $\square$

3.5 Einbettung von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

3.46 Definition Einbettungsabbildung:

$$E : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : x \mapsto [\underbrace{(x)}_{\text{konstante Folge}}]$$

3.47 Satz: **1)** E ist injektiv,

2) E erhält die algebraische Struktur:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} : E(x+y) = E(x) + E(y) \;\wedge\; E(x \cdot y) = E(x) \cdot E(y),$$

3) E erhält die Ordnungsstruktur:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} : x \leq y \;\Rightarrow\; E(x) \leq E(y).$$

Beweis: **1)** Sei $x \neq y \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(x-y)}_{\text{konstante Folge}} = x - y \neq 0$

$\Rightarrow\; E(x) = [(x)] \neq [(y)] = E(y).$

2) $E(x+y) = [(x+y)] \overset{\text{Def}\,+}{=} [(x)] + [(y)] = E(x) + E(y)$. Genauso für $\cdot$.

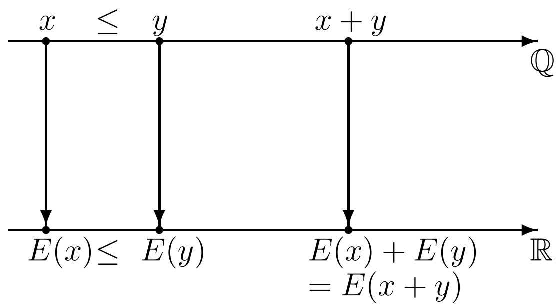
3) Sei $x \leq y$.

Fall a): $x = y \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}(y-x) = 0 \overset{\text{Def}\,\leq}{\Rightarrow} E(x) = [(x)] \leq [(y)] = E(y).$

Fall b): $x < y \;\Rightarrow\; (y-x)_{n\in\mathbb{N}}$ ist positiv $\overset{\text{Def}\,\leq}{\Rightarrow} E(x) = [(x)] \leq [(y)] = E(y).$

$\square$

Anschaulich:



3.48 Satz: **1)** $E(0) = 0,\; E(1) = 1,\; E(-x) = -E(x),\; E(x^{-1}) = E(x)^{-1}$ falls $x \neq 0$,

2) $\forall x \in \mathbb{Q} : \big|E(x)\big| = E\big(|x|\big),$

3) $\forall n \in \mathbb{N} : E(n) = n \;\wedge\; E(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}.$

Beweis: 1) Selber

2) Fall $x \geq 0 \Rightarrow E(x) \geq 0 \Rightarrow \big|E(x)\big| = E(x) = E\big(|x|\big)$.
Fall $x < 0 \Leftrightarrow \neg(x \geq 0) \overset{3.47}{\Leftrightarrow} \neg\big(E(x) \geq 0\big) \Leftrightarrow E(x) < 0$
$\Rightarrow |E(x)| = -E(x) \overset{1)}{=} E(-x) = E\big(|x|\big)$.

3) $E(n) = E\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} 1\Big) \overset{\text{vollst. Induktion}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} E(1) = n$.
$E(\frac{1}{n}) = E(n^{-1}) \overset{1)}{=} E(n)^{-1} = n^{-1} = \frac{1}{n}$.

□

3.49 Definition: 1) $\mathbb{Q}_\mathbb{R} := E(\mathbb{Q}) = \text{Bild}(E)$.

2) $\forall X \in \mathbb{Q}_R \; \exists! x \in \mathbb{Q} : E(x) = X$, da E injektiv.
Schreibe $x =: E^{-1}(X)$ für $X \in \mathbb{Q}_\mathbb{R}$. Also: $E^{-1} : \mathbb{Q}_\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

3.50 Folgerung: $\forall X \in \mathbb{Q}_\mathbb{R} : \big|E^{-1}(X)\big| = E^{-1}\big(|X|\big)$.

Beweis: $X = E(x)$, d.h. $x = E^{-1}(X) \Rightarrow |X| = \big|E(X)\big| \overset{\text{letzter Satz}}{=} E\big(|X|\big)$
$\Rightarrow E^{-1}\big(|X|\big) = E^{-1}\big(E\big(|X|\big)\big) = |x| = \big|E^{-1}(X)\big|$.

□

3.51 Satz: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. Dann

$$\exists \varepsilon' \in \mathbb{Q}_\mathbb{R},\ \varepsilon' > 0 : 0 < \varepsilon' < \varepsilon.$$

Beweis: $\varepsilon = [(\varepsilon_n)] > 0 \Rightarrow (\varepsilon_n)$ ist positiv.
$\Rightarrow \forall n > N : \varepsilon_n \geq \delta$ (Achtung: $\varepsilon_n, \delta \in \mathbb{Q}$).
Wähle $\varepsilon' := E(\frac{\delta}{2}) = \frac{1}{2}E(\delta)$.

1) $\delta > 0 \Rightarrow \frac{\delta}{2} > 0$ in $\mathbb{Q} \Rightarrow E(\frac{\delta}{2}) > 0$ in $\mathbb{R}$.

2) $\varepsilon - \varepsilon' = \big[(\varepsilon_n)\big] - \big[(\frac{\delta}{2})\big] = \big[(\varepsilon_n - \frac{\delta}{2})\big] > 0$,
da $(\varepsilon_n - \frac{\delta}{2})_{n \in \mathbb{N}}$ positiv ($\varepsilon_n - \frac{\delta}{2} \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > 0$ für $n > N_1$).
$\Rightarrow \varepsilon > \varepsilon'$.

□

3.52 Satz: Sei $X = \big[(x_n)\big] \in \mathbb{R}$. Dann: $E(x_n) \to X$ in $\mathbb{R}$.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$.
Nach letztem Satz wähle $\varepsilon' \in \mathbb{Q}_\mathbb{R},\ 0 < \varepsilon' < \varepsilon$.
Setze $\varepsilon^* := E^{-1}(\varepsilon') \in \mathbb{Q}$. Insbesondere $\varepsilon^* > 0$, da $\varepsilon' > 0$.
(x_n) C-Folge in $\mathbb{Q} \ \Rightarrow\ |x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon^*}{2}$ für $n, m > N_\varepsilon$.
Sei $m = m_0 > N_\varepsilon$ beliebig, aber fest. Ziel: Zeige $|E(x_{m_0}) - X| < \varepsilon$. Dann ist bewiesen: $E(x_m) \to X$.

Setze $y_n := \varepsilon^* - |x_n - x_m|,\ n \in \mathbb{N}$

1) (y_n) ist C-Folge in $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} |y_n - y_{n'}| &= \big||x_{n'} - x_{m_0}| - |x_n - x_{m_0}|\big| \\ &\overset{\text{Dreiecksungl. nach unten}}{\leq} \big|(x_{n'} - x_{m_0}) - (x_n - x_{m_0})\big| \\ &= |x_{n'} - x_n| \ < \ \tilde{\varepsilon} \end{aligned}$$

für $n, n' > \tilde{N}_{\tilde{\varepsilon}}$.

2) (y_n) ist positiv: Für $n > N_\varepsilon$ gilt

$$y_n = \varepsilon^* - \underbrace{|x_n - x_{m_0}|}_{<\varepsilon^*/2} > \varepsilon^* - \frac{\varepsilon^*}{2} = \frac{\varepsilon^*}{2} =: \delta > 0.$$

$$\Rightarrow\ 0 \ < \ [(y_n)] \ = \ \big[\big(\varepsilon^* - |x_n - x_{m_0}|\big)_{n\in\mathbb{N}}\big] \ = \ \underbrace{[(\varepsilon^*)]}_{=\varepsilon'} - [(|x_n - x_{m_0}|)_{n\in\mathbb{N}}]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \big|X - E(x_{m_0})\big| \ &= \ \big|[(x_n)] - [(x_{m_0})]\big| \ = \ \big|[(x_n - x_{m_0})]\big| \\ &= \ \big[(|x_n - x_{m_0}|)_{n\in\mathbb{N}}\big] \ < \ \varepsilon' \ < \ \varepsilon \end{aligned}$$

□

3.53 Folgerung: $\forall X \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in \mathbb{Q} : |X - E(y)| < \varepsilon$
bzw. $\forall X \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists Y \in \mathbb{Q}_\mathbb{R} : |X - Y| < \varepsilon$.
Man sagt: $\mathbb{Q}_\mathbb{R}$ ist **dichte Teilmenge** von $\mathbb{R}$.

Beweis: Seien $X \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ fest, $X = [(x_n)]$.
Letzter Satz: $E(x_n) \to X \ \Rightarrow\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon : |E(x_n) - X| < \varepsilon$.

□

3.54 Satz: $(\mathbb{R}, \leq)$ ist archimedisch, d.h. $\forall X, Y > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot X > Y$.

Beweis: Wir wissen: $\mathbb{Q}$ ist archimedisch.
Letzter Satz: $\exists y \in \mathbb{Q} : |Y - E(y)| < 1 \;\Rightarrow\; Y < E(y) + 1$.
Zu X wähle $x \in \mathbb{Q}$ mit $0 < E(x) < X$. Insbesondere $x > 0$.
$\mathbb{Q}$ archimedisch $\Rightarrow \;\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot x > y + 1$
$\Rightarrow \; n \cdot X > n \cdot E(x) = E(n \cdot x) > E(y+1) = E(y) + 1 > Y.$ □

3.55 Folgerung: $\dfrac{1}{n} \to 0$ in $\mathbb{R}$ (Selber beweisen).

3.6 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

3.56 Satz: $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede C-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Beweis: Sei (X_n) C-Folge in $\mathbb{R}$.
Zu jedem X_n existiert ein $Y_n \in \mathbb{Q}_\mathbb{R}$ mit $|X_n - Y_n| < \dfrac{1}{n}$. Setze $y_n := E^{-1}(Y_n)$ bzw. $Y_n = E(y_n)$.
Behauptung: $X := [(y_n)] \;\Rightarrow\; X_n \to X$.

1) (y_n) ist C-Folge: Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q},\ \varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

$$\begin{array}{rcl}
|Y_n - Y_M| & = & |Y_n - X_n + X_n - X_m + X_m - Y_m| \\
& \overset{\triangle-\text{Ungl}}{\leq} & \underbrace{|Y_n - X_n|}_{<\frac{1}{n}<\frac{E(\varepsilon)}{3},\ n>N_1} + \underbrace{|X_n - X_m|}_{<\frac{E(\varepsilon)}{3},\ n>N_\varepsilon} + \underbrace{|X_m - Y_m|}_{<\frac{1}{n}<\frac{E(\varepsilon)}{3},\ n>N_1} \\
& < & E(\varepsilon) \quad \text{für } n > \max\{N_1, N_\varepsilon\} \\
\Rightarrow\ |y_n - y_m| & = & \big|E^{-1}(Y_n) - E^{-1}(Y_m)\big| \;=\; \big|E^{-1}(Y_n - Y_m)\big| \\
& = & E^{-1}\big(|Y_n - Y_m|\big) \;<\; E^{-1}\big(E(\varepsilon)\big) \;=\; \varepsilon \quad \text{für } n > \max\{N_1, N_\varepsilon\}
\end{array}$$

2) Setze $X := \big[(y_n)\big] \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow\ |X_n - X| \;\leq\; \underbrace{|X_n - Y_n|}_{<\frac{1}{n}} + \underbrace{|Y_n - X|}_{=|E(y_n)-X|\to 0 \text{ (vorletzter Satz)}} \;<\; \varepsilon \text{ für } n \text{ genügend groß}$$

□

3.57 Folgerung: In $\mathbb{R}$ gilt:

$$(a_n) \text{ ist C-Folge} \;\Leftrightarrow\; (a_n) \text{ ist konvergent.}$$

3.58 Definition: Eine Folge (a_n) in einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ heißt **nach oben (unten) beschränkt**, falls

$$\exists S \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq S \quad (a_n \geq S).$$

3.59 Hauptsatz über monotone Folgen in $\mathbb{R}$: Sei (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent.
Sei (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent.

Beweis: Widerspruchsbeweis. Annahme: (a_n) monoton wachsend
und $\exists S \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq S$
und (a_n) nicht konvergent.

(a_n) nicht konvergent $\Leftrightarrow$ (a_n) keine C-Folge

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m, n > N : |a_n - a_m| \geq \varepsilon.$$

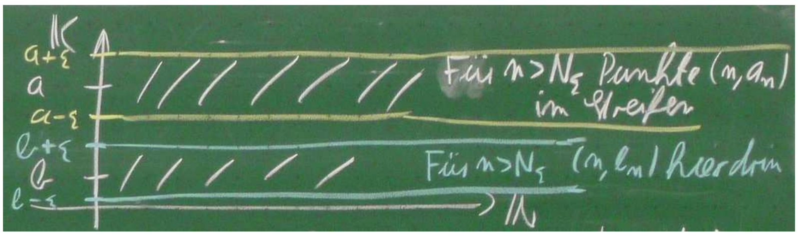
Wähle $n_1 > m_1$ mit $a_{n_1} - a_{m_1} = |a_{n_1} - a_{m_1} \geq \varepsilon \ \Rightarrow\ a_{n_1} \geq a_{m_1} + \varepsilon$.
Wähle $n_2 > m_2 > n_1$ mit $a_{n_2} - a_{m_2} = |a_{n_2} - a_{m_2}| \geq \varepsilon \ \Rightarrow\ a_{n_2} \geq a_{m_2} + \varepsilon \geq a_{n_1} + \varepsilon \geq a_{m_1} + 2\varepsilon$.
Wähle $n_3 > m_3 > n_2$ mit $a_{n_3} - a_{m_3} = |a_{n_3} - a_{m_3}| \geq \varepsilon \ \Rightarrow\ a_{n_3} \geq a_{m_3} + \varepsilon \geq a_{m_1} + 3\varepsilon$.
$\vdots$
$\Rightarrow\ a_{n_j} \geq a_{m_j} + j\varepsilon > S$ für j genügend groß $\lightning$ $a_n \leq S$. $\square$

3.60 Satz: Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen in einem geordneten Körper. Dann:

$$\big(\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\big) \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3.61 Achtung: $a_n = 0,\ b_n = \dfrac{1}{n}$: Dann $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Beweis: Kontraposition: Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: b$.



Wähle $\varepsilon := \dfrac{a-b}{3}$.
Für $n > N_\varepsilon$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon \ \Rightarrow\ a_n = a + a_n - a \geq a - |a_n - a| > a - \varepsilon = a - \dfrac{a-b}{3} = \dfrac{2a}{3} + \dfrac{b}{3}$.
Für $n > N'_\varepsilon$ gilt $|b_n - b| < \varepsilon \ \Rightarrow\ b_n = b + b_n - b \leq b + |b_n - b| < b + \varepsilon = b + \dfrac{a-b}{3} = \dfrac{a}{3} + \dfrac{2b}{3}$.
$\Rightarrow\ b_n = \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{3} + \dfrac{b}{3} < \dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{3} < a_n$ für $n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$
$\Rightarrow\ \exists n \in \mathbb{N} : b_n < a_n$. $\square$

3.62 Satz: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.

Beweis: $s_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1) (s_n) ist monoton wachsend:

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

2) (s_n) ist nach oben beschränkt:

Vorüberlegung:

Für $k \geq 2$ gilt $k! = \underbrace{k}_{\geq 2} \cdot \underbrace{(k-1)}_{\geq 2} \cdots \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{2}_{=2} \cdot 1 \geq 2^{k-1}$, gilt auch für $k = 1$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \; s_n \quad &= \quad 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \overset{\text{Vorüberlegung}}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\
&\overset{k'=k-1}{=} \quad 1 + \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k'}} \overset{\text{geom. Summe}}{=} 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3.
\end{aligned}$$

□

3.63 Definition: $\mathrm{e} := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(= \lim_{n\to\infty} s_n \right)$.

3.64 Satz: e ist irrational.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest, und $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
s_{n+m} - s_n \quad &= \quad \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{\underbrace{k(k-1)\cdots(n+2)}_{\geq (n+2)^{k-n-1}} \cdot (n+1)!} \\
&\leq \quad \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{(n+2)^{k-n-1}(n+1)!} \overset{k'=k-n-1}{=} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k'=0}^{m-1} \frac{1}{(n+2)^{k'}} \\
&= \quad \frac{1}{(n+1)!} \frac{1-\left(\frac{1}{n+2}\right)^m}{1-\frac{1}{n+2}} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} \\
&= \quad \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \frac{n+2}{(n+1)^2} = \frac{1}{n!} \frac{n+2}{n^2+2n+1} \\
&\leq \quad \frac{1}{n!} \frac{n+2}{n^2+2n} = \frac{1}{n \cdot n!}.
\end{aligned}$$

$m \to \infty \;\Rightarrow\; \mathrm{e} - s_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_{n+m} - s_n) \le \dfrac{1}{n \cdot n!}$.

Außerdem: $s_{n+m} \ge s_{n+1}$ für $m \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \mathrm{e} = \lim_{m\to\infty} s_{n+m} \ge s_{n+1} > s_n$.

Also: $$0 < \mathrm{e} - s_n \le \tfrac{1}{n \cdot n!} \qquad (*)$$

Für $n = 2:\;\; s_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; 0 < \mathrm{e} - \frac{5}{2} \le \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \mathrm{e} \notin \mathbb{N}_0$.

Außerdem $\mathrm{e} > 0$, da $s_n > 0$ und somit $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \ge 0$, aber $\mathrm{e} \neq 0$.

Annahme: $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N},\; q \ge 2$ (da $\mathrm{e} \notin \mathbb{N}$).

$(*)$ für $n := q$:

$$\begin{array}{rcll} 0 & < & \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \;\le\; \frac{1}{q \cdot q!} & \Big|\cdot q! \\ \Rightarrow\; 0 & < & \underbrace{\underbrace{\dfrac{p \cdot q!}{q}}_{=p(q-1)!\in\mathbb{N}} - \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \underbrace{\frac{q!}{k!}}_{\in\mathbb{N}}}_{=\text{ ganze Zahl } \in\,]\,0,\frac{1}{2}]\;\lightning} \;\le\; \dfrac{1}{q} \overset{q\ge 2}{\le} \dfrac{1}{2}. & \end{array}$$

Also war die Annahme "e ist rational" falsch. $\square$

3.65 Satz: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

Beweis: $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

1) (a_n) ist monoton wachsend:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} \frac{n-1}{n-1} \frac{n}{n} = \frac{(n+1)^n (n-1)^n}{n^{2n}} \frac{n}{n-1} \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\ &\underset{\text{Bernoulli}}{\overset{\frac{n}{n-1}>0}{\ge}} \left(1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right) \frac{n}{n-1} = 1. \end{aligned}$$

Also: $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \ge 1$ für alle $n \in \mathbb{N},\; n \ge 2$.

2) (a_n) ist beschränkt:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Binom. Satz}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \cdot 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1} \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{<1} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n < 3. \end{aligned}$$

Also: $a_n < 3$ für $n \in \mathbb{N}$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$:

Aus 2): $a_n \leq s_n$ für $n \in \mathbb{N} \overset{(a_n),(s_n)\text{ konv}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}$.

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, aber zunächst fest gewählt. Aus 2) für $n \geq m$:

$$
\begin{aligned}
a_n &\geq \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\to 1 \text{ für } n\to\infty} \cdot \frac{1}{k!} \\
\overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n &\geq \sum_{k=0}^{m} 1 \cdot \frac{1}{k!} = s_m \\
\overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n &\geq \lim_{m\to\infty} s_m = \mathrm{e}.
\end{aligned}
$$

$\square$

3.66 Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

1) $S \in \mathbb{R}$ heißt **obere** (**untere**) **Schranke** von M, falls

$$\forall x \in M : x \leq S \ (x \geq S).$$

2) M heißt **nach oben** (**unten**) **beschränkt**, falls

$$\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : x \leq S \ (x \geq S).$$

M heißt **beschränkt**, falls

$$\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : |x| \leq S.$$

3)
$$
\begin{aligned}
M_+ &:= \{S \in \mathbb{R} : S \text{ ist obere Schranke von } M\} \\
M_- &:= \{S \in \mathbb{R} : S \text{ ist untere Schranke von } M\}
\end{aligned}
$$

3.67 Beispiel: $M = \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$: $M_+ = [2, \infty[$
$M_- =]-\infty, 1]$

3.68 Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R},\ M \neq \emptyset$. Dann:

$$
\begin{aligned}
M \text{ nach oben beschränkt} &\Rightarrow M_+ \text{ hat ein Minimum,} \\
M \text{ nach unten beschränkt} &\Rightarrow M_- \text{ hat ein Maximum.}
\end{aligned}
$$

Beweis: Intervallschachtelung. Wähle ein $x \in M$ und ein $S \in M_+$ ($\neq \emptyset$, da M nach oben beschränkt).

Definiere $(a_n), (b_n)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} a_0 &:= x, \quad b_0 := S \\ a_{n+1} &:= \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := b_n \qquad \text{falls } \frac{a_n + b_n}{2} \notin M_+ \\ a_{n+1} &:= a_n, \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{falls } \frac{a_n + b_n}{2} \in M_+ \end{aligned}$$

Dann gelten für alle $n \in \mathbb{N}$:

(i) $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

(ii) $|b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{1}{2} |b_n - a_n| = \frac{1}{4} |b_{n-1} - a_{n-1}| \ldots = \frac{1}{2^{n+1}} |b_0 - a_0|$

(iii) $b_n \in M_+$, $\forall S \in M_+ : a_n \leq S$

(a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow\ a_n \to a$

(b_n) monoton fallend und nach unten beschränkt $\Rightarrow\ b_n \to b$

(ii) $\Rightarrow\ b - a = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (b_0 - a_0) = 0 \ \Rightarrow\ b = a$

Behauptung: $a = b = \min(M_+)$

1) $a \in M_+$: $x \in M \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N} : x \leq b_n \ \Rightarrow\ x \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b = a$.

2) $\forall S \in M_+ : a \leq S$: $S \in M_+ \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq S \ \Rightarrow\ a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq S$.

□

3.69 Definition: $M \subseteq \mathbb{R},\ M \neq \emptyset$. Dann sind **Supremum** und **Infimum** von M definiert durch

$$\sup(M) := \begin{cases} \min(M_+) & \text{falls } M \text{ nach oben beschränkt} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\inf(M) := \begin{cases} \max(M_-) & \text{falls } M \text{ nach unten beschränkt} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

3.70 Bemerkungen: Falls M nach oben beschränkt: $\sup(M) =$ kleinste obere Schranke, $M_+ = [\sup(M), \infty[$.
Falls M nach unten beschränkt: $\inf(M) =$ größte untere Schranke, $M_- =]-\infty, \inf(M)]$.

3.71 Satz: $M \subseteq \mathbb{R},\ M \neq \emptyset$, M nach oben (unten) beschränkt. Dann existiert eine Folge (a_n) in M mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup(M)$ $\big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf(M)\big)$.

Beweis: $S := \sup(M)$ ist kleinste obere Schranke
$\Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N} : S - \frac{1}{n}$ ist keine obere Schranke
$\Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists a_n \in M : S - \frac{1}{n} < a_n \leq S$
$\Rightarrow\ (a_n)$ ist Folge in M, $a_n \to S$ (Einschließungskriterium). □

3.72 Definition: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{R}$.

1) $v \in \mathbb{R}$ heißt **Verdichtungspunkt** der Folge (a_n), falls es eine gegen v konvergente Teilfolge von (a_n) gibt: $\exists (a_{n_k}) : a_{n_k} \to v$ für $k \to \infty$.

2) $V(a_n) := \{v \in \mathbb{R} : v$ ist Verdichtungspunkt von $(a_n)\}$.

3.73 Beispiele: $V\big((-1)^n\big) = \{-1, 1\},\ V(\frac{1}{n}) = \{0\}$.

3.74 Satz von Bolzano-Weierstraß für Folgen**:** Ist (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, so besitzt (a_n) eine konvergente Teilfolge.

Beweis: $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq S$.
Intervallschachtelung: Definiere $(b_k), (c_k), (n_k)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned}
&b_1 := -S, \quad c_1 := S, \quad n_1 := 1 \\
&b_{k+1} := \frac{b_k + c_k}{2}, \quad c_{k+1} := c_k \qquad \text{falls in } \left[\frac{b_k + c_k}{2}, c_k\right] \text{ unendlich viele Folgenglieder liegen} \\
&b_{k+1} := b_k, \quad c_{k+1} := \frac{b_k + c_k}{2} \qquad \text{sonst}
\end{aligned}$$

Wähle n_{k+1} mit $n_{k+1} > n_k$ und $a_{n_{k+1}} \in [b_{k+1}, c_{k+1}]$ (dieses Intervall enthält nach Konstruktion unendlich viele Folgenglieder)

Dann: $b_k \leq b_{k+1} \leq a_{n_{k+1}} \leq c_{k+1} \leq c_k$

$$|b_{k+1} - c_{k+1}| = \frac{1}{2}|b_k - c_k| = \ldots = \frac{1}{2^{k-1}}\, S$$

$$\Rightarrow \begin{cases}
(b_k) \text{ monoton wachsend und beschränkt } (b_k \leq c_1 \ \Rightarrow\ b_k \to b \\
(c_k) \text{ monoton fallend und beschränkt } (c_k \geq b_1 \ \Rightarrow\ c_k \to c \\
b - c = \lim\limits_{k\to\infty} (b_k - c_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2k-1}\, S = 0 \ \Rightarrow\ b = c \\
b_k \leq a_{n_{k+1}} \leq c_k \overset{\text{Einschließungskriterium}}{\Rightarrow} a_{n_k} \to b = c \text{ für } k \to \infty
\end{cases}$$

$\Rightarrow\ (a_{n_k})$ ist konvergente Teilfolge. □

3.75 Folgerung: Ist (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, dann $V(a_n) \neq \emptyset$.

3.76 Definition: Sei (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind **Limes Superior** und **Limes Inferior** definiert durch:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup V(a_n), \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf V(a_n).$$

3.77 Beispiel: $\limsup\limits_{n\to\infty}(-1) = 1,\ \liminf\limits_{n\to\infty}(-1) = -1.$

3.78 Satz: (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist $V(a_n)$ beschränkt.

Beweis: $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \le S$.

Sei $v \in V(a_n)\ \Rightarrow$ Es existiert eine Teilfolge $a_{n_k} \to v$ für $k \to \infty$.

$$\left.\begin{array}{l} (\forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} \le S)\ \Rightarrow\ v = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \le S, \\ (\forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} \ge -S)\ \Rightarrow\ v = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \ge -S, \end{array}\right\} \Rightarrow\ |v| \le S. \text{ Also ist } V(a_n) \text{ beschränkt.}$$

□

3.79 Satz: (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann

$$\limsup_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} a_n \in V(a_n).$$

D.h.
$$\begin{array}{rcll} \limsup\limits_{n\to\infty} a_n &=& \max V(a_n), & \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \text{ ist größter Verdichtungspunkt} \\ \liminf\limits_{n\to\infty} a_n &=& \min V(a_n), & \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \text{ ist kleinster Verdichtungspunkt.} \end{array}$$

Beweis: Vorletzter Satz: Es existiert eine Folge (v_j) in $V(a_n)$ mit $v_j \to \limsup_{n\to\infty}$ für $j \to \infty$.

$$\begin{array}{lll} v_1 \overset{k\to\infty}{\leftarrow} a_{n_k^{(1)}} & \Rightarrow & \exists k_1 \in \mathbb{N} : \left|a_{n_{k_1}^{(1)}} - v_1\right| < 1 \\ v_2 \overset{k\to\infty}{\leftarrow} a_{n_k^{(2)}} & \Rightarrow & \exists k_2 \in \mathbb{N} : \left|a_{n_{k_2}^{(2)}} - v_1\right| < \frac{1}{2}\ \wedge\ n_{k_2}^{(2)} > n_{k_1}^{(1)} \\ v_3 \overset{k\to\infty}{\leftarrow} a_{n_k^{(3)}} & \Rightarrow & \exists k_3 \in \mathbb{N} : \left|a_{n_{k_3}^{(3)}} - v_1\right| < \frac{1}{3}\ \wedge\ n_{k_3}^{(3)} > n_{k_2}^{(2)} \\ & \vdots & \\ v_j \overset{k\to\infty}{\leftarrow} a_{n_k^{(j)}} & \Rightarrow & \exists k_j \in \mathbb{N} : \left|a_{n_{k_j}^{(j)}} - v_1\right| < \frac{1}{j}\ \wedge\ n_{k_j}^{(j)} > n_{k_{j-1}}^{(j-1)} \\ & \vdots & \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(a_{n_{k_j}^{(j)}}\right)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist Teilfolge von } (a_n), \\ a_{n_{k_j}^{(j)}} \to \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \text{ für } j \to \infty, \text{ denn} \\ \left|a_{n_{k_j}^{(j)}} - \limsup\limits_{n\to\infty} a_n\right| \le \underbrace{\left|a_{n_{k_j}^{(j)}} - v_j\right|}_{<1/j} + \underbrace{\left|v_j - \limsup\limits_{n\to\infty} a_n\right|}_{\to 0} < \varepsilon \text{ für } j \text{ genügend groß} \end{array} \right.$$

Also ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ein Verdichtungspunkt von (a_n).

□

3.80 Satz: Sei (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon < a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon.$$

Beweis: Widerspruchsbeweis, Annahme

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : \big(\underbrace{\liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \geq a_n}_{p} \ \vee\ \underbrace{a_n \geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon}_{q}\big).$$

$\Rightarrow$ ∞ viele a_n erfüllen p oder ∞ viele a_n erfüllen q

$\Rightarrow$ Es xistiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $\quad \forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \quad (1)$

oder $\quad \forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \quad (2)$

(a_{n_k}) ist beschränkt, da (a_n) beschränkt $\overset{\text{Bolzano}}{\underset{\text{Weierstraß}}{\Rightarrow}}$ Es existiert eine konv. Teilfolge $a_{n_{k_j}} \to a,\ j \to \infty$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a \in V(a_n) \\ \text{falls (1) gilt:} \quad a = \lim\limits_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} \leq \underbrace{\liminf\limits_{n\to\infty} a_n}_{=\min V(a_n)} - \varepsilon < \min V(a_n) \ ↯ \\ \text{falls (2) gilt:} \quad a = \lim\limits_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} \geq \underbrace{\limsup\limits_{n\to\infty} a_n}_{=\max V(a_n)} + \varepsilon > \max V(a_n) \ ↯ \end{cases}$$

$\square$

3.81 Folgerung: (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann

$$(a_n) \text{ konvergent} \ \Leftrightarrow\ \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \ \Leftrightarrow\ \sharp V(a_n) = 1.$$

In diesem Fall: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

3.82 Definiton:: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{R}$. Falls eine Teilfolge (a_{n_k}) existiert mit $a_{n_k} \to \infty$ (bzw. $a_{n_k} \to -\infty$), dann

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \infty \qquad (\text{bzw. } \liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty).$$

4 Die komplexen Zahlen

4.1 Der Körper der komplexen Zahlen

4.1 Vorüberlegung: Angenommen, es gibt einen Körper $\mathbb{K}$ mit

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K} \ \wedge \ \exists\, \mathrm{i} \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R} : \mathrm{i}^2 = -1.$$

Dann muss $\mathbb{K}$ mindestens alle $x + \mathrm{i} \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ enthalten. Außerdem muss für solche Zahlen gelten:

$$\begin{aligned}(x_1 + \mathrm{i}\, y_1) + (x_2 + \mathrm{i}\, y_2) &\overset{\text{AG+, KG+}}{=} x_1 + x_2 + \mathrm{i}\, y_1 + \mathrm{i}\, y_2 \\ &\overset{\text{DG}}{=} \underbrace{x_1 + x_2}_{\in\mathbb{R}} + \mathrm{i}\, \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in\mathbb{R}}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(x_1 + \mathrm{i}\, y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}\, y_2) &\overset{\text{DG}}{=} (x_1 + \mathrm{i}\, y_1)x_2 + (x_1 + \mathrm{i}\, y_1)\mathrm{i}y_2, \\ &\overset{\text{DG, KG}\cdot\text{, AG}\cdot}{=} x_1\, x_2 + \mathrm{i}\, y_1\, x_2 + x_1\, \mathrm{i}\, y_2 + \underbrace{\mathrm{i}\, y_1\, \mathrm{i}\, y_2}_{=\mathrm{i}^2 y_1 y_2 = -y_1 y_2} \\ &= \underbrace{x_1\, x_2 - y_1\, y_2}_{\in\mathbb{R}} + \mathrm{i}\, \underbrace{(y_1\, x_2 + x_1\, y_2)}_{\in\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Woher soll i kommen?

4.2 Satz: $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{(A1)}$$

$$\underbrace{(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)}_{\text{neue Verknüpfung}} := \underbrace{(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)}_{\text{nur relle Add./Mult. verwendet}} \qquad \text{(M1)}$$

ist ein Körper mit

$$\begin{aligned} &\text{Nullelement:} & 0 &= (0,0) \\ &\text{Einselement:} & 1 &= (1,0) \\ &\text{Inverses Element }+\text{:} & -(x,y) &= (-x,-y) \\ &\text{Inverses Element }\cdot\text{:} & (x,y)^{-1} &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}\, ,\, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \qquad \text{falls } (x,y) \neq (0,0). \end{aligned}$$

In $\mathbb{C}$ kann man also rechnen wie in jedem Körper.

Beweis: Durch Nachrechnen, z.B.

$(x, y) + (0, 0) \ =$

$(x, y) \cdot (1, 0) \ =$

$(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}\, ,\, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \ =$

□

4.3 Definition: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ heißt Körper der **komplexen Zahlen**.

4.4 $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$: Die Einbettungsabbildung $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$ ist injektiv und erhält die algebraische Struktur:

$$\begin{aligned}\underbrace{E(x) + E(y)}_{+ \text{ in } \mathbb{C}} &= (x,0) + (y,0) \overset{\text{(A1)}}{=} (x+y,0) = \underbrace{E(x+y)}_{+ \text{ in } \mathbb{R}} \\ \underbrace{E(x) \cdot E(y)}_{\cdot \text{ in } \mathbb{C}} &= (x,0) \cdot (y,0) \overset{\text{(M1)}}{=} (x \cdot y - 0 \cdot 0, 0 \cdot y - x \cdot 0) = (x \cdot y, 0) = \underbrace{E(x \cdot y)}_{\cdot \text{ in } \mathbb{R}}\end{aligned}$$

Es ist egal, ob man in $\mathbb{R}$ rechnet und dann abbildet, oder erst abbildet und dann in $\mathbb{C}$ rechnet. Wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit $E(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $(x,0) \in \mathbb{C}$: $x = (x,0)$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{C}$ gilt

$$\alpha \cdot (x,y) = (\alpha, 0) \cdot (x,y) = (\alpha x, \alpha y) = (x,y) \cdot \alpha.$$

4.5 Definition: $\mathrm{i} := (0,1)$ heißt **imaginäre Einheit**.

4.6 Satz: **1)** Es gilt $\mathrm{i}^2 = -1 \in \mathbb{R}$.

2) $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists x, y, \in \mathbb{R} : z = x + \mathrm{i}\, y$ (**Normalform** einer komplexen Zahl).

Beweis: **1)** $\mathrm{i}^2 = (0,1) \cdot (0,1) =$

2) $z = (x,y) =$

□

4.7 Beispiel: $\dfrac{4+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} =$

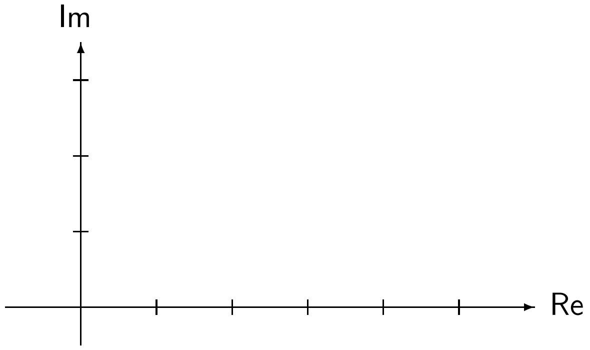
4.8 Definition: Sei $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

1) x heißt **Realteil** von z: $x = \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\, z$.

2) y heißt **Imaginärteil** von z: $y = \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Im}\, z$.

3) $\overline{z} := x - \mathrm{i}\, y$ heißt die zu z **konjugierte** Zahl.

4.9 Veranschaulichung in der **Gauß'schen Zahlenebene:**



4.10 Satz: Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten:

1) $z \mapsto \overline{z} \mathrel{\hat{=}}$ Spiegelung an reeller Achse in der Gauß'schen Zahlenebene,

2) $\overline{\overline{z}} \;=\; z$,

3) $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} \;=\; z$,

4) $\operatorname{Re} z \;=\; \dfrac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z \;=\; \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$,

5) $\overline{z_1 + z_2} \;=\; \overline{z}_1 + \overline{z}_2$,

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} \;=\; \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \quad \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} \;=\; \dfrac{1}{\overline{z}}$ falls $z \neq 0$,

7) $z \;=\; x + \mathrm{i}\, y \;\Rightarrow\; z \cdot \overline{z} \;=\; x^2 + y^2 \;\in \mathbb{R}_0^+ = [\,0, \infty\,[\,.$

Beweis: Durch Nachrechnen, z.B. 4)

$$z = x + \mathrm{i}y \;\Rightarrow\; \overline{z} = x - \mathrm{i}y \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{z + \overline{z}}{2} & = \\[2ex] \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} & = \end{cases}$$

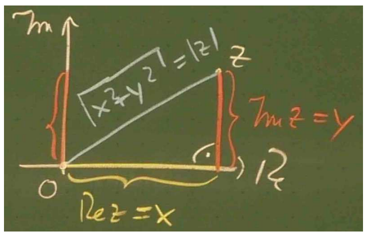
$\square$

4.11 Bemerkung: Wegen $\mathrm{i}^2 = -1^2$ kann $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden.

4.12 Definition: Sei $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \;\in\; \mathbb{R}$$

der **Betrag** von z. (Geometrisch: $|z|$ = Länge der Strecke von 0 bis z in Gauß'scher Ebene.)



4.13 Hilfssatz: 1) $|z| \;=\; |\overline{z}|$

2) $|\operatorname{Re} z| \;\leq\; |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \;\leq\; |z|$

3) $z \;=\; x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; |z|_{\mathbb{C}} \;=\; \sqrt{x^2 + 0} \;=\; |x|_{\mathbb{R}}$.
Also: Der Betrag in $\mathbb{C}$ verallgemeinert den Betrag in $\mathbb{R}$.

4.14 Satz: $(\mathbb{C}, |.|)$ ist ein bewerteter Körper, d.h. es gelten:

(B1) $\forall z \in \mathbb{C} : \Big(|z| \geq 0 \ \wedge \ \big(|z| = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 0\big)\Big)$,

(B2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 \cdot z_2| \ = \ |z_1| \cdot |z_2|$,

(B3) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : |z_1 + z_2| \ \leq \ |z_1| + |z_2|$ ($\triangle$-Ungleichung).

Insbesondere gelten: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \ z_2 \neq 0 : \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| \ = \ \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 \pm z_2| \ \geq \ \big||z_1| - |z_2|\big|$ ($\triangle$-Ungleichung nach unten).

Beweis: **(B1)** $|z| \geq 0$ okay

$$|z| \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ x \ = \ 0 \ \wedge \ y \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ z \ = \ 0$$

(B2) $|z_1\, z_2|^2 \ = \ (z_1\, z_2) \cdot \overline{(z_1\, z_2)} \ = \ z_1\, z_2\, \overline{z_1}\, \overline{z_2} \ = \ z_1\, \overline{z_1}\, z_2\, \overline{z_2} \ = \ |z_1|^2\, |z_2|^2$

(B3)
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 \ &= \ (z_1 + z_2)\, \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= \ (z_1 + z_2)\ (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= \ z_1\, \overline{z_1} + z_1\, \overline{z_2} + z_2\, \overline{z_1} + z_2\, \overline{z_2} \\ &= \ |z_1|^2 + |z_2|^2 + \underbrace{z_1\, \overline{z_2} + \overline{z_1\, \overline{z_2}}}_{=2\mathrm{Re}\,(z_1\, \overline{z_2}) \leq 2|z_1\, \overline{z_2}| = 2|z_1|\, |\overline{z_2}| = 2|z_1|\, |z_2|} \\ &\leq \ \big(|z_1| + |z_2|\big)^2 \end{aligned}$$
□

4.2 Folgen in $\mathbb{C}$

4.15 Definition: (z_n) Folge in $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.

1) (z_n) heißt **beschränkt**, falls

$$\exists S \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |z_n| \leq S.$$

2) (z_n) heißt **konvergent** zum den **Grenzwert** z ($z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$), falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |z_n - z| < \varepsilon.$$

3) (z_n) heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N_\varepsilon : |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

4.16 Hilfssatz Vergleich von Beträgen: Sei $z = x + \mathrm{i}\, y$. Dann gilt

$$|z| \;\leq\; |x| + |y| \;\leq\; \sqrt{2}\, |z|.$$

D.h. wenn $|z|$ klein ist, sind auch $|x|, |y|$ klein und umgekehrt.

Beweis: 1) $|z|^2 \;=\; x^2 + y^2 \;=\; |x|^2 + |y|^2 \;\leq\; |x|^2 + |y|^2 + 2|x|\,|y| \;=\; \big(|x| + |y|\big)^2$
$\Rightarrow\; |z| \;\leq\; |x| + |y|$.

2) Vorüberlegung: Es gilt $2|x|\,|y| \;\leq\; |x|^2 + |y|^2$, denn $|x|^2 - 2|x|\,|y| + |y|^2 = \big(|x| - |y|\big)^2 \geq 0$.

$\Rightarrow\; \big(|x|+|y|\big)^2 \;=\; |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 \;\overset{\text{Vorüberl.}}{\leq}\; 2(|x|^2 + |y|^2) \;=\; 2|z|^2 \;\Rightarrow\; |x|+|y| \;\leq\; \sqrt{2}\,|z|$.
□

4.17 Satz: Seien $z_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n,\; z = x + \mathrm{i}\, y$. Dann gelten

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \,\wedge\, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

2) (z_n) ist C-Folge in $\mathbb{C}$ $\;\Leftrightarrow\;$ $(x_n), (y_n)$ sind C-Folgen in $\mathbb{R}$.

3) $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede C-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Beweis: 1) folgt aus $|z_n - z| \;\leq\; |x_n - x| + |y_n - y| \;\leq\; \sqrt{2}\,|z_n - z|$.

2) Genauso.

3) (z_n) C-Folge in $\mathbb{C}$, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ $\;\overset{2)}{\Rightarrow}\;$ $(x_n), (y_n)$ C-Folgen in $\mathbb{R}$
$\overset{\mathbb{R}\text{ vollständig}}{\Rightarrow}\;$ $x_n \to x,\; y_n \to y$ in $\mathbb{R}$
$\overset{1)}{\Rightarrow}\;$ $z_n \to z := x + \mathrm{i}y$ in $\mathbb{C}$. □

4.18 Beispiele: 1) $z_n \;=\; \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \mathrm{i}\underbrace{\left(2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}_{\to 2} \;\to\; 2\mathrm{i}$

2) $z_n \;=\; \dfrac{1}{n} + \mathrm{i}\, n$:

3) $z_n = (-1)^n - \dfrac{\mathrm{i}}{n}$:

4) $|z| < 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$.

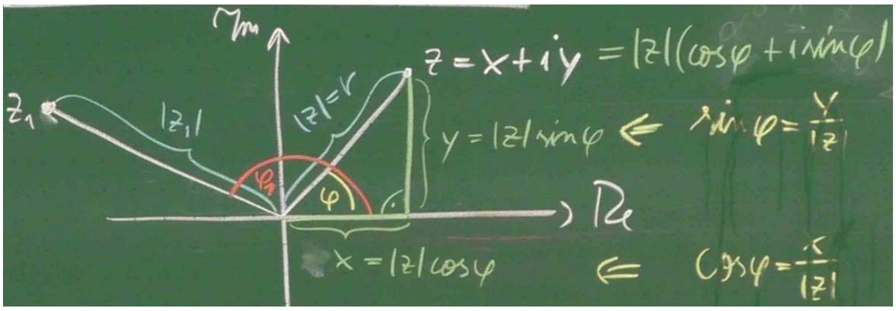
4.19 Bemerkung: Die Rechenregeln für konvergente Folgen gelten genauso in $\mathbb{C}$ (vgl. frühere Sätze), da für den Beweis nur die Eigenschaften der Betragsfunktion benützt wurden:

1) (z_n) konvergent $\Rightarrow$ (z_n) beschränkt.

2) $(z_n), (w_n)$ konvergent $\Rightarrow$ $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}(z_n + w_n) & = & \left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right) + \lim\limits_{n\to\infty} w_n \\ \lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) & = & \left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} w_n \end{cases}$

3) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0$ setze $v_n := \begin{cases} \dfrac{z_n}{w_n} & \text{falls } w_n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Dann $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}$.

4.3 Polardarstellung komplexer Zahlen



4.20 Satz: Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existieren eindeutige Zahlen $r \in\,]0, \infty[$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, so dass

$$z \;=\; r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \quad (\textbf{Polardarstellung} \text{ von } z).$$

Es gilt

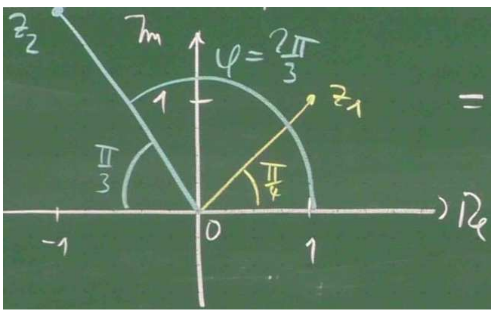
$$r = |z|, \ \cos\varphi = \frac{\mathsf{Re}\, z}{|z|}, \ \sin\varphi = \frac{\mathsf{Im}\, z}{|z|}.$$

Der Winkel φ heißt **Argument** von z: $\arg(z) := \varphi \in [0, 2\pi[$.

4.21 Tabelle:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\varphi$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\varphi$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

4.22 Beispiele:



1) $z_1 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\big)$,

2) $z_2 = -1 + \sqrt{3} = 2\big(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\big)$,

3) $z_3 = \mathrm{i} = 1\big(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\big)$,

4) $z_4 = -1 = 1(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$.

4.23 Multiplikation: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2)$

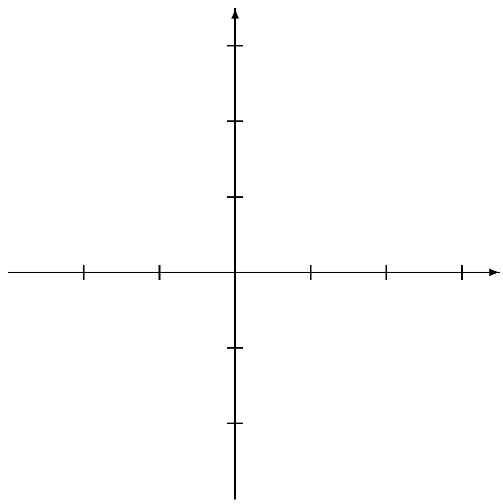
$$\begin{aligned}\Rightarrow\ z_1\,z_2 &= r_1\,r_2\big(\underbrace{\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2}_{=\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + \mathrm{i}\,(\underbrace{\cos\varphi_1\,\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\,\cos\varphi_2}_{=\sin(\varphi_1+\varphi_2)})\big) \quad \text{(Additionstheoreme)}\\ &= r_1\,r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1+\varphi_2))\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen werden in Polardarstellung multipliziert, in dem man ihre Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

4.24 Vereinfachung: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} := \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \Rightarrow$ Polardarstellung: $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.
Additionstheoreme $\Rightarrow\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$.
Multiplikation in Polardarstellung: $r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\cdot r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$.
Wichtig: Für $\varphi\in\mathbb{R}$ gilt $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right| = \left|\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$.

4.25 Beispiele: **1)** $(1+\mathrm{i})^n =$

2) Lösungen von $z^3 = -8$:



4.26 Satz: Zu gegebenen $n\in\mathbb{N}$, $r>0$ und $\varphi\in[0,2\pi[$ besitzt die Gleichung

$$z^n = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

genau n verschiedene Lösungen

$$z_k = r^{1/n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

D.h. für $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ besitzt die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene Lösungen $z\in\mathbb{C}$.

4.27 Bemerkung: Die Symbole $\sqrt[n]{a},\ a^{1/n}$ sind in $\mathbb{C}$ nicht eindeutig definiert, sie bezeichnen i.a. eine der Lösungen.

4.28 Quadratische Gleichungen: Die Gleichung $az^2 + bz + c \ = \ 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0$ hat die Lösungen

$$z_{1/2} \ = \ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \,.$$

($w = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ bezeichnet beide Lösungen der Gleichung $w^2 = b^2 - 4ac$).

4.4 Polynome

4.29 Definition: $1)$ Ein **Polynom** ist eine Funktion

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k \ = \ a_0 + a_1\, z + \ldots + a_n\, z^n$$

mit den **Koeffizienten** $a_k \in \mathbb{C}$. Falls $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, heißt das Polynom **reell** (dann betrachtet man auch $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der **Grad** des Polynoms: Grad$(P) := n$. Für das Nullpolynom: Grad$(0) := -1$.

2) Die Menge der komplexen/reellen Polynome: $\mathbb{C}[x],\ \mathbb{R}[x]$.

3) Rechnen mit Polynomen: Seien P, Q Polynome.

$$\begin{aligned} P + Q: &\quad z \mapsto P(z) + Q(z), \quad P + Q \text{ Polynom,} \\ P \cdot Q: &\quad z \mapsto P(z) \cdot Q(z), \quad\ \ P \cdot Q \text{ Polynom,} \end{aligned}$$

4.30 Division mit Rest: Seien $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\in \mathbb{R}[x]$) mit $1 \leq \text{Grad}Q \leq \text{Grad}P$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $P_1, R \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\in \mathbb{R}[x]$), so dass

$$P \ = \ P_1 \cdot Q + R \ \wedge \ \text{Grad}R < \text{Grad}Q.$$

4.31 Beispiel: $(4z^4 - 14z^3 + 6z^2 + 3z - 5) : (2z^3 + 3z + 1) =$

4.32 Satz: Sei $P \in \mathbb{C}[x]$, Grad $P \geq 1,\ \lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$P(\lambda) = 0 \ \Leftrightarrow\ (z-\lambda) \text{ ist } \textbf{Teiler} \text{ von } P, \text{ d.h. } \exists P_1 \in \mathbb{C}[x] : P(z) = (z-\lambda)P_1(z).$$

Beweis: "$\Leftarrow$" klar.

"$\Rightarrow$": Teilen mit Rest: $P(z) \ =\ (z-\lambda)P_1(z) + R(z)$, Grad$R < 1$, also $R =$ konstant.
$0 \ =\ P(\lambda) \ =\ 0 \cdot P_1(\lambda) + R(\lambda) \ \Rightarrow\ R(\lambda) \ =\ 0 \ \overset{R=\text{const}}{\Rightarrow}\ R = 0.$ $\square$

4.33 Satz: Ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Beweis: Annahme: Grad$(P) = n \geq 1 \ \wedge\ P(\lambda_j) = 0$ für $j = 0, \ldots, n+1$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ paarweise verschieden.

$$\Rightarrow\ P(z) \overset{4.32}{=} (z-\lambda_1)P_1(z) \overset{4.32}{=} (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)P_2(z) = \ldots = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_{n+1}) \cdot \underbrace{P_{n+1}(z)}_{P_{n+1} \neq 0}$$

$\Rightarrow$ Grad$(P) \geq n+1$ ↯ $\square$

4.34 Identitätssatz: Sind $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ Polynome mit Grad(P), Grad$(Q) \leq n$, die an mindestens $n+1$ paarweise verschiedenen Stellen übereinstimmen. so folgt $P = Q$.

Beweis: Grad$(P-Q) \leq n$, $P-Q$ hat mindestens $n+1$ verschiedene Nullstellen $\Rightarrow\ P - Q = 0$. $\square$

4.35 Definition: $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt ***k*-fache Nullstelle** von P oder Nullstelle mit **Vielfachheit *k***, falls $(z-\lambda)^k$, aber nicht $(z-\lambda)^{k+1}$ Teiler von P ist. D. h. $P(z) = (z-\lambda)^k P_1(z)$ mit $P_1(\lambda) \neq 0$.

4.36 Fundamentalsatz der Algebra (C. F. Gauß): Sei $P \in \mathbb{C}[x]$ Polynom vom Grad $n \geq 1$: $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k$, $a_n \neq 0$. Dann gelten

1) P hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.

2) Es gibt komplexe Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (nicht notwendig verschieden), so dass

$$P(z) \ =\ a_n(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n).$$

Die λ_j sind bis auf Nummerierung eindeutig. Zählt man jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit, so hat P genau Grad(P) Nullstellen.

(Ohne Beweis)

4.37 Reelle Polynome: Sei $P \in \mathbb{R}[x]$. Dann:

$$P(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; P(\overline{\lambda}) = 0.$$

Beweis: $0 \;=\; P(\lambda) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,\lambda^k$

$$\Rightarrow\; 0 \;=\; \overline{0} \;=\; \overline{P(\lambda)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k\,\lambda^k} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\overline{a_k}}_{=a_k}\,(\overline{\lambda})^k \;=\; P(\overline{\lambda}).$$

□

4.38 Relle Faktorisierung reller Polynome: Sei $P \in \mathbb{R}[x]$, Grad$(P) \geq 1$.
Fundamentalsatz $\Rightarrow\; \exists : \lambda \in \mathbb{C} : P(\lambda) = 0$.

Fall 1: $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad\Rightarrow\; P(z) = (z-\lambda)P_1(z), \quad P_1 \in \mathbb{R}[x]$.

Fall 2: $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$: 4.37 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P(\overline{\lambda}) &= 0 \\ \Rightarrow\; P(z) &= (z-\lambda)(z-\overline{\lambda})P_1(z) \;=\; \big(z^2 - \overline{\lambda}\,z - \lambda z + \lambda\,\overline{\lambda}\big)P_1(z) \\ &= \underbrace{\big(z^2 - (2\mathrm{Re}\,\lambda)z + |\lambda|^2\big)}_{\text{reelles Polynom}}\,P_1(z) \qquad \Rightarrow\; P_1 \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

Fortsetzung dieses Verfahrens: P ist darstellbar als Produkt linearer und quadratischer reeller Polynome, wobei die quadratischen Polynome keine reellen Nullstellen besitzen, d.h. sie sind über $\mathbb{R}$ irreduzibel.

4.39 Beispiel: $P(z) = z^4 + 4z^3 + 2z^2 + 4z + 1$ hat Nullstelle $z = \mathrm{i} \Rightarrow$ weitere Nullstelle $z = -\mathrm{i}$

4.40 Rationale Nullstellen: Sei $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,x^k$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Ist $x = \dfrac{p}{q}$ Nullstelle von P, wobei $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind, dann ist p Teiler von a_0 und q Teiler von a_n.

Beweis: $0 \;=\; P\Big(\dfrac{p}{q}\Big) \;=\; a_n\left(\dfrac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_0$

$$\Leftrightarrow\; 0 \;=\; a_n\,p^n + a_{n-1}\,p^{n-1}\,q + \ldots + a_0\,q^n \qquad (*)$$

$(*) \;\Leftrightarrow\; a_n\,p^n \;=\; -q(\ldots) \;\Rightarrow\; q$ teilt $a_n\,a^n \overset{p,q \text{ teilerfremd}}{\Rightarrow} q$ teilt a_n

Genauso: $(*) \;\Leftrightarrow\; q^n\,a_0 = -p(\ldots) \;\Rightarrow\; p$ teilt $q^n\,a_0 \overset{p,q \text{ teilerfremd}}{\Rightarrow} p$ teilt a_0

□

4.41 Beispiele: **1)** $P(x) \;=\; 1\cdot x^3 - 2x^2 - 6x + 4$,

2) $P(x) \;=\; 12x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 1$.

5 Mächtigkeit von Mengen

5.1 Vorüberlegung: Zählen der Elemente einer endlichen Menge $A = \{a, 4, \beta, \chi, Z\}$: Man nummeriert die Elemente

$$a \leftrightarrow 1,\ 4 \leftrightarrow 2,\ \beta \leftrightarrow 3,\ \chi \leftrightarrow 4,\ Z \leftrightarrow 5. \tag{5.1}$$

Dies ist eine bijektive Abbildung $f : A \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5.2 Definition: Zwei Mengen A, B heißen **gleich mächtig** ($A \sim B$), falls es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

5.3 Beispiele: **1)** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Z.B. $f(x) = 3x \ \Rightarrow\ A \sim B$.

2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{G} := \{2, 4, 6, \ldots\} : n \mapsto 2n$ ist bijektiv: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{G}$ sind gleich mächtig.

3) $]-1, 1[$ und $\mathbb{R}$ sind gleich mächtig:

$$f :]-1, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - 1 & \text{falls } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ \dfrac{1}{x} + 1 & \text{falls } -1 < x < 0 \end{cases}$$

ist bijektiv.

5.4 Definition: Eine Menge A heißt

- **unendlich**, falls es eine echte Teilmenge $B \subsetneqq A$ gibt mit $A \sim B$, andernfalls heißt A **endlich**,
- **abzählbar**, falls $A \sim \mathbb{N}$,
- **überabzählbar**, falls A unendlich und nicht abzählbar.

5.5 Satz: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beweis: Schreibe die Elemente von $\mathbb{Q}$ geschickt auf:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ -\frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\ -\frac{2}{1} & -\frac{2}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{4} & -\frac{2}{5} & \cdots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

Nummeriere die Elemente: Geh das Schema in Pfeilrichtung durch, überspringe alle bereits an anderer Stelle nummerierten Zahlen. Die Nummerierung ist die bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$:
$a_1 = \dfrac{1}{1},\ a_2 = -\dfrac{1}{1},\ a_3 = \dfrac{1}{2},\ a_3 = \dfrac{1}{3}, \ldots$.

$\square$

5.6 Satz: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis: Offensichtlich ist $\mathbb{R}$ unendlich.

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar: Widerspruchsbeweis.

Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Definiere

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } f(n) = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \ \wedge \ b_n \neq 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N} : f(n) = b_0, \ldots b_n \ldots \neq x = 0, \ldots a_n \ldots$ ↯ f surjektiv. □

5.7 Bemerkung: Die **Kontinuumshypothese** besagt: Ist $M \subseteq \mathbb{R}$, so gilt genau eine der drei Aussagen:

(i) M ist endlich, **(ii)** $M \sim \mathbb{N}$, **(iii)** $M \sim \mathbb{R}$.

Es gibt keine Menge, die „mächtiger“ ist als $\mathbb{N}$, aber „weniger mächtig“ als $\mathbb{R}$.

Man kann beweisen, dass die Kontinuumshypothese weder verifiziert noch falsifiziert werden kann (in unserem Axiomensystem).

5.8 Satz: Eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Beweis: Sei $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Menge, deren Elemente abzählbare Mengen sind. Schreibe alle Elemente von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in ein Schema:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{Elemente von } A_1: & a_1^{(1)}, & & a_2^{(1)}, & \to & a_3^{(1)}, & & a_4^{(1)}, & \to & a_5^{(1)}, & \ldots \\
& \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\text{Elemente von } A_2: & a_1^{(2)}, & & a_2^{(2)}, & & a_3^{(2)}, & & a_4^{(2)}, & & a_5^{(2)}, & \ldots \\
& & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\text{Elemente von } A_3: & a_1^{(3)}, & & a_2^{(3)}, & & a_3^{(3)}, & & a_4^{(3)}, & & a_5^{(3)}, & \ldots \\
& \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
\text{Elemente von } A_4: & a_1^{(4)}, & & a_2^{(4)}, & & a_3^{(4)}, & & a_4^{(4)}, & & a_5^{(4)}, & \ldots \\
\qquad \vdots & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Nummeriere die Elemente von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$: Gehe entlang der Pfeile und nummeriere jedes Element, an dem du vorbeikommst. Lasse dabei alle Elemente weg, die bereits als Element einer anderen Menge nummeriert wurden. Nummerierung = bijektive Abbildung auf $\mathbb{N}$. □

6 Stetigkeit

6.1 Abstand

6.1 Definition: Sei M nichtleere Menge. Eine **Metrik** (oder **Abstand**) auf M ist eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

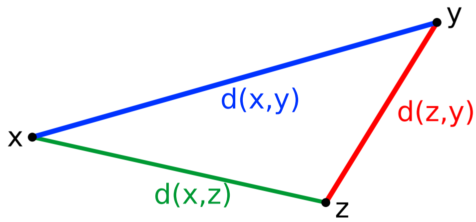
(M1) $\forall x, y \in M : \Big(d(x,y) \geq 0 \;\wedge\; \big(d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y\big)\Big)$ Positivität, Definitheit,

(M2) $\forall x, y \in M : d(x,y) = d(y,x)$ Symmetrie,

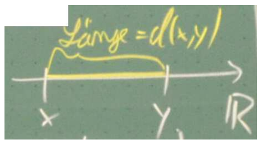
(M3) $\forall x, y, z \in M : d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\triangle$-Ungleichung.

(M, d) heißt **metrischer Raum**.

Veranschaulichung:
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(x,y)$



6.2 Beispiele: **1)** $(\mathbb{R}, d)$ mit $d_{|.|}(x,y) := |x - y|$ ist ein metrischer Raum.

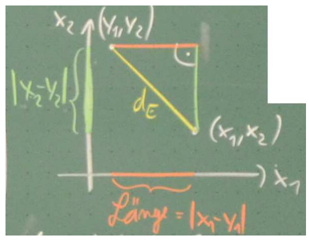


2) $(\mathbb{C}, d_{|.|})$ mit $d_{|.|}(z,u) := |z - u|$ ist ein metrischer Raum.

3) $(\mathbb{R}^2, d_{\mathsf{E}})$ mit

$$d_{\mathsf{E}}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

(euklidischer Abstand) ist ein metrischer Raum.



4) **Diskrete Metrik**: Sei $M \neq \emptyset$.

$$d(x,y) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

ist eine Metrik auf M.

6.3 Dreiecks-Ungleichung nach unten: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für $x, y, z \in M$ gilt

$$d(x,y) \;\geq\; \big|d(x,z) - d(z,y)\big|.$$

Beweis:
$$d(x,z) \overset{\triangle-\text{Ungl}}{\leq} d(x,y) + d(y,z) \;\Rightarrow\; d(x,y) \geq d(x,z) - d(z,y),$$
$$d(y,z) \overset{\triangle-\text{Ungl}}{\leq} d(y,x) + d(x,z) \;\Rightarrow\; d(x,y) \overset{\text{(M2)}}{=} d(y,x) \geq d(x,z) - d(z,y).$$ □

6.2 Folgen

6.4 Definition: Sei (M, d) ein metrischer Raum, $x \in M$, (x_n) Folge in M.

1) (x_n) heißt **konvergent zum Grenzwert** x, geschrieben $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ oder $x_n \to x$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

2) (x_n) heißt **konvergent**, falls

$$\exists x \in M : x_n \to x.$$

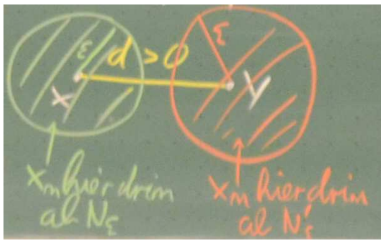
Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie **divergent**.

3) (x_n) heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n, m > N_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

6.5 Satz: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Folge in M besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Widerspruchsbeweis, Annahme: $x_n \to x, \;\; x_n \to y, \;\; x \neq y$.



$$\begin{aligned}
x \neq y \quad &\overset{\text{(M1)}}{\Rightarrow} \quad d(x,y) > 0 \;\Rightarrow\; \varepsilon := \frac{1}{2} d(x,y) > 0 \\
x_n \to x \quad &\Rightarrow \quad d(x_n, x) < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon \\
x_n \to y \quad &\Rightarrow \quad d(x_n, y) < \varepsilon \text{ für } n > N'_\varepsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\} : d(x,y) \overset{\triangle-\text{Ungl}}{\leq} d(x, x_n) + d(x_n, y) < 2\varepsilon = d(x,y) \\
&\Rightarrow \quad d(x,y) < d(x,y) \quad \lightning
\end{aligned}$$

$\square$

6.6 Satz und Definition: Sei (M, d) ein metrischer Raum.

1) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

2) Gilt umgekehrt: Jede Cauchy-Folge in M ist konvergent, dann heißt (M, d) **vollständig**.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ fest. $x_n \to x \;\Rightarrow\; \forall n > N_\varepsilon : d(x, x_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \; \forall m, n > N_\varepsilon : d(x_n, x_m) \overset{\triangle-\text{Ungl}}{\leq} d(x_n, x) + d(x, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

$\square$

6.7 Beispiele: 1) $M = \mathbb{Q}$, $d(x,y) = |x-y|$:

$$x_n \to x \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon.$$

Dies ist der Konvergenzbegriff, den wir bereits kennen. $(\mathbb{Q}, d)$ ist **nicht vollständig**.

2) $(\mathbb{R}, d_{|.|})$: Neue Definition = alte Definition, $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ ist vollständig.

3) $(\mathbb{C}, d_{|.|})$: Neue Definition = alte Definition, $(\mathbb{C}, d_{|.|})$ist vollständig (vgl. 4.17), genauso $(\mathbb{R}^2, d_{\mathsf{E}})$.

4) $M = \mathbb{Q}$, $d =$ diskrete Metrik $\Rightarrow$ $(\mathbb{Q}, d)$ ist vollständig.

6.3 Offene und abgeschlossene Mengen

6.8 Definition: Sei (M, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in M$.

1) Für $R > 0$ (bedeutet $R \in \mathbb{R}\ \wedge\ R > 0$) heißt

$$B_R(x_0) \ := \ \{x \in M : d(x, x_0) < R\}$$

offene Kugel um x_0 mit Radius R.

2) $U \subseteq M$ heißt **Umgebung** von x_0, falls

$$\exists R > 0 : B_R(x_0) \subseteq U.$$

6.9 Beispiele: 1) In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$: $B_R(x_0) =]x_0 - R, x_0 + R[$.

2) In $(\mathbb{R}^2, d_E)$: $B_R(x_1, x_2) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < R^2\}$.

6.10 Satz: (M, d) metrischer Raum, $x \in M$, (x_n) Folge in M. Dann

$$x_n \to x \iff \forall U \subseteq M,\ U \text{ Umgebung von } x\ \ \exists N_U \in \mathbb{N}\ \forall n > N_U : x_n \in U.$$

Beweis: " $\Rightarrow$ ": U Umgebung von x $\Rightarrow$ $\exists R > 0 : B_R(x) \subseteq U$
Wähle $\varepsilon := R \overset{x_n \to x}{\Rightarrow} \exists N_R \in \mathbb{N}\ \forall n > N_R : \underbrace{d(x, x_n) < R}_{\Leftrightarrow\ x_n \in B_R(x)} \overset{B_R(x) \subseteq U}{\Rightarrow} \forall n > N_R : x_n \in U.$

" $\Leftarrow$ ": Zu $\varepsilon > 0$ wähle $U := B_\varepsilon(x)$ $\Rightarrow$ $\forall n > N_\varepsilon : \underbrace{x_n \in B_\varepsilon(x)}_{\Leftrightarrow d(x, x_n) < \varepsilon}$.

$\square$

6.11 Satz: (M, d) metrischer Raum, $x_0 \in M$.

1) $U \subseteq M$ Umgebung von x_0 $\wedge$ $U \subseteq U' \subseteq M$ $\Rightarrow$ U' Umgebung von x_0.

2) $U_1, \dots, U_n$ (endlich viele) Umgebungen von x_0 $\Rightarrow$ $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ Umgebung von x_0.

Beweis: **1)** $B_R(x_0) \subseteq U \;\Rightarrow\; B_R(x_0) \subseteq U'$.

2) $\exists R_1, \dots, R_n > 0 : B_{R_1}(x_0) \subseteq U_1 \;\wedge\; \dots B_{R_n}(x_0) \subseteq U_n$.

$$R := \min\{R_1, \dots, R_n\} \;\Rightarrow\; \begin{cases} R > 0 \\ \forall k = 1, \dots, n : B_R(x_0) \subseteq B_{R_k}(x_0) \subseteq U_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; B_R(x_0) \;\subseteq\; \bigcap_{k=1}^{n} U_k$$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ ist Umgebung von x_0.

$\square$

6.12 Beispiel: In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$: $X = \{1\} \cup [2, 3\,[$ $\Rightarrow$ X ist keine Umgebung von 1 und von 2. X ist Umgebung aller Punkte aus $]\,2, 3\,[$.

6.13 Definition: Es sei (M, d) metrischer Raum, $A \subseteq M$.

1) $x \in A$ heißt **innerer Punkt** von A, falls A Umgebung von x ist.

2) A heißt **offen**, wenn: $x \in A$ $\Rightarrow$ x ist innerer Punkt von A.

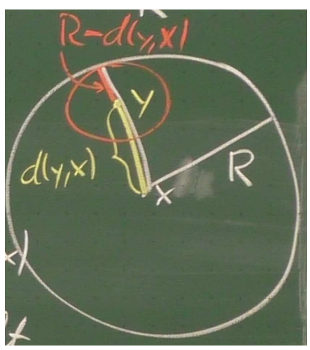
6.14 Satz: (M, d) metrischer Raum. Dann

1) M und $\emptyset$ sind offen.

2) $\forall x \in M\; \forall R > 0 : B_R(x)$ ist offen.

Beweis: **1)** $A = M$: $\forall x \in M\; \forall R > 0 : B_R(x) \subseteq M$.
$A := \emptyset$: $x \in A$ ist immer falsch, also ist „$x \in A \;\rightarrow\; x$ ist innerer Punkt von A“ immer wahr.

2) Sei $y \in B_R(x)$ beliebig aber fest.
Setze $R' := R - d(y, x) > 0$
Behauptung: $B_{R'}(y) \subseteq B_R(x)$
(dann ist y innerer Punkt, also $B_R(x)$ offen)



$$\begin{aligned} z \in B_{R'}(y) \;&\Leftrightarrow\; d(y, z) < R' \\ \Rightarrow\; d(x, z) \;&\overset{\triangle\text{ Ungl.}}{\leq}\; d(x, y) + d(y, z) \\ &<\; d(x, y) + R' \;=\; R \end{aligned}$$

$\Rightarrow\; z \in B_R(x)$.

$\square$

6.15 Satz: 1) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

2) Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Beweis: 1) Sei $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ eine Menge offener Mengen.

$x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha \;\Leftrightarrow\; \exists \alpha_0 \in A : x \in O_{\alpha_0}$.

O_{α_0} offen $\Rightarrow$ O_{α_0} Umgebung von $x \overset{O_{\alpha_0} \subseteq \bigcup O_\alpha}{\underset{6.11}{\Rightarrow}} \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha$ ist Umgebung von x.

2) Seien $O_1, \ldots, O_n$ offen.

$x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} O_k \;\Leftrightarrow\; \forall k = 1, \ldots, n : x \in O_k$

$\Rightarrow\; \forall k = 1, \ldots, n : O_k$ ist Umgebung von $x \overset{6.11}{\Rightarrow} \bigcap\limits_{k=1}^{n} O_k$ ist Umgebung von x.

□

6.16 Definition: $A \subseteq M$ heißt **abgeschlossen**, falls $M \setminus A$ offen ist.

6.17 Beispiele: 1) $\emptyset$ und M sind offen und abgeschlossen.

2) Endliche Mengen sind abgeschlossen: $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$.
Zeige: $M \setminus A$ offen.
Zu $y \in M \setminus A$ konstruiere $R > 0$, so dass $B_R(y) \subseteq M \setminus A$ ($\Rightarrow$ $M \setminus A$ offen)
Wähle $R := \min\{d(y, x_k) : k = 1, \ldots n\} > 0 \;\Rightarrow\; B_R(y) \subseteq M \setminus A$, denn
$z \in B_R(y) \;\Leftrightarrow\; d(z, y) < R$, aber $d(y, x_k) \geq R$ für $k = 1, \ldots, n$, also $x_k \notin B_R(y)$.

3) In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$: $]\,a, b\,[$, $]-\infty, a\,[$, $]\,a, \infty\,[$ sind offen ($a, b \in \mathbb{R}$)
$\Rightarrow$ $[a, b]$, $]-\infty, a]$, $[a, \infty\,[$ sind abgeschlossen.

6.18 Satz: 1) Der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

2) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis: Übungen

6.19 Definition: Sei (M, d) metrischer Raum, $X \subseteq M$.

1) $\overset{\circ}{X} = X^\circ := \bigcup\{O \subseteq M : O \subseteq X \;\wedge\; O \text{ offen}\}$ heißt **Inneres** von X.

2) $\overline{X} := \bigcap\{A \subseteq M : X \subseteq A \;\wedge\; A \text{ abgeschlossen}\}$ heißt **Abschluss** von X.

6.20 Bemerkungen: 1) $\overset{\circ}{X}$ ist offen (siehe 6.18) und ist die größte offene Teilmenge von X.

2) $\overline{X}$ ist abgeschlossen und ist die kleinste abgeschlossene Menge, die X als Teilmenge enthält (d.h. $Y \subseteq M$ abgeschlossen $\wedge\ X \subseteq Y \;\Rightarrow\; \overline{X} \subseteq Y$).

6.21 Beispiele: 1) X abgeschlossen $\Rightarrow\ \overline{X} = X$, $\quad X$ offen $\Rightarrow\ \overset{\circ}{X} = X$.

2) In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$:
$$\begin{aligned} \overline{]\,a,b\,[} &= [a,b] \\ \overline{]-\infty,a\,[} &=]-\infty,a] \\ [a,b]^\circ &=]\,a,b\,[\\ ]-\infty,a]^\circ &=]-\infty,a\,[\end{aligned}$$

6.22 Definition: Sei (M,d) metrischer Raum.

1) Sei $X \subseteq M$. Eine Menge $O = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ offener Mengen heißt **offene Überdeckung** von X, falls $X \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha$.

2) $K \subseteq M$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilmenge enthält, die offene Überdeckung von K ist.

6.23 Beispiele: 1) Endliche Mengen sind kompakt:
$K = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$ mit offener Überdeckung O.
$$K \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} \exists \alpha_1 \in A : x_1 \in O_{\alpha_1} \\ \exists \alpha_2 \in A : x_2 \in O_{\alpha_2} \\ \quad\vdots \\ \exists \alpha_n \in A : x_n \in O_{\alpha_n} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} O_{\alpha_k}, \\ \{O_{\alpha_1}, \ldots, O_{\alpha_n}\} \text{ endliche Teilmenge von } O \end{array}$$

2) In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$: $\mathbb{N}$ ist nicht kompakt: $O := \{B_{1/3}(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ist offene Überdeckung von $\mathbb{N}$, bei der kein einziges Element weggelassen werden kann, sonst liegt keine Überdeckung von $\mathbb{N}$ vor.

6.24 Definition: Sei (M,d) metrischer Raum. $A \subseteq M$ heißt **beschränkt**, falls
$$\exists x_0 \in M\ \exists R > 0 : A \subseteq B_R(x_0).$$

6.25 Satz: Sei (M,d) metrischer Raum. Dann gilt
$$K \subseteq M \text{ kompakt } \Rightarrow\; K \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.}$$

Beweis: 1) Wähle ein festes $x_0 \in M$. $O := \{B_R(0) : R > 0\}$ ist offene Überdeckung von K:
$x \in K \;\Rightarrow x \in B_R(x_0)$ für $R > d(x, x_0)$. Also $K \subseteq \bigcup\limits_{R>0} B_R(x_0)$.

K kompakt $\;\Rightarrow\; \exists R_1, \dots, R_n > 0 : K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{R_k}(0)$

$R := \max\{R_1, \dots, R_n\} > 0 \;\Rightarrow\; K \subseteq B_R(0)$, also K beschränkt.

2) Zeige $M \setminus K$ ist offen. Sei $x_0 \in M \setminus K$, Zeige $\exists R > 0 : B_R(x_0) \subseteq M \setminus K$.
$O := \{B_{d(x,x_0)/2}(x) : x \in K\}$ ist offene Überdeckung von K.

K kompakt $\;\Rightarrow\; \exists x_1, \dots x_n \in K : K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{d(x_k,x_0)/2}(x_k)$.

Setze $R := \min\{\frac{1}{2}\, d(x_k, x_0) : k = 1, \dots, n\} > 0$. Behauptung: $B_R(x_0) \subseteq M \setminus K$.
Seien $y \in B_R(x_0),\; x \in K$ mit $\underbrace{x \in B_{d(x_k,x_0)/2}(x_k)}_{(*)}$. Zeige $y \neq x$ (dann $B_R(x_0) \subseteq M \setminus K$).

$$
\begin{aligned}
(*) \;\Rightarrow\; d(x_0, x) \quad &> \quad \frac{1}{2} d(x_k, x_0) \;\geq\; R, \text{ denn} \\
d(x_0, x) \quad &\underset{\text{nach unten}}{\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\geq}} \quad \big| d(x_0, x_k) - d(x_k, x) \big| \\
&\geq \quad d(x_0, x_k) - d(x_k, x) \\
&> \quad d(x_0, x_k) - \frac{1}{2} d(x_0, x_k)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow\; d(x, y) \underset{\text{nach unten}}{\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\geq}} d(x, x_0) - d(x_0, y) \;>\; R - R \;=\; 0.$

$\Rightarrow\; d(x, y) \neq 0$, also $x \neq y$. □

6.4 Häufungspunkte

6.26 Definition: (M, d) metrischer Raum, $A \subseteq M$.

1) $h \in M$ heißt **Häufungspunkt** von A, falls

$$\forall U \subseteq M,\ U \text{ Umgebung von } h\ \exists x \in A \setminus \{h\} : x \in U.$$

2) $H(A) := \{h \in M : h \text{ ist Häufungspunkt von } A\}$.

6.27 Beispiele: **1)** In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$:

$$
\begin{aligned}
H(\,]-1, 1[\,) \;&=\; [-1, 1], \\
H\big(\{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}\big) \;&=\; \{0\}, \\
H(\mathbb{N}) \;&=\; \emptyset, \\
H(\mathbb{Q}) \;&=\; \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

2) In (M, d): $H\big(\{x_1, \dots, x_n\}\big) = \emptyset$, $H(\emptyset) = \emptyset$.

6.28 Satz: (M,d) metrischer Raum, $A \subseteq M$. Dann

1) $h \in H(A) \;\Leftrightarrow\; \exists (x_n)$ in $A : \big(x_n \to h \;\wedge\; \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq h\big)$.
Insbesondere liegen in jeder Umgebung eines Häufungspunktes unendlich viele El. von A.

2) A abgeschlossen $\;\Leftrightarrow\; H(A) \subseteq A$. Insbesondere: $H(A) = \emptyset \;\Rightarrow\; A$ abgeschlossen.

Beweis: **1)** "$\Rightarrow$": Sei $h \in H(A)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $B_{1/n}(h)$ Umgebung von h
$\overset{h \in H(A)}{\Rightarrow} \;\exists x_n \in A \setminus \{h\} : x_n \in B_{1/n}(h)$
$\Rightarrow\; (x_n)$ Folge in A, $x_n \to h$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq h$.

"$\Leftarrow$": Sei (x_n) eine solche Folge, U Umgebung von $h \;\Rightarrow\; \exists R > 0 : B_R(h) \subseteq U$
$x_n \to h \;\Rightarrow\; \forall n > N_R : x_n \in B_R(h) \;\overset{x_n \neq h}{\Rightarrow}\; \forall n > N_R : x_n \in A \setminus \{h\} \;\wedge\; x_n \in U$.

2) "$\Rightarrow$": Sei A abgeschlossen. Dann $M \setminus A$ offen.
Zeige $x \in H(A) \;\Rightarrow\; x \in A$ durch Kontraposition: $x \notin A \;\Rightarrow\; x \notin H(A)$:
$x \notin A \;\Rightarrow\; x \in M \setminus A \;\overset{M \setminus A \text{ offen}}{\Rightarrow}\; \exists R > 0 : B_R(x) \in M \setminus A \;\Rightarrow\; x \notin H(A)$.
(da $B_R(x)$ Umgebung von von x ist, die kein Element von A enthält.)

"$\Leftarrow$": Sei $H(A) \subseteq A$. Zeige: $M \setminus A$ ist offen (dann A abgeschlossen):
$x \in M \setminus A \;\Leftrightarrow\; x \notin A \;\overset{H(A) \subseteq A}{\Rightarrow}\; x \notin H(A)$
$\Rightarrow\; \exists U \subseteq M,\; U$ Umgebung von $x \;\; \forall y \in \underbrace{A \setminus \{x\}}_{=A} : y \notin U$
$\Rightarrow\; U \subseteq M \setminus A \;\wedge\; U$ Umgebung von $x \;\overset{6.11}{\Rightarrow}\; M \setminus A$ Umgebung von x.
$x \in M \setminus A$ beliebig $\;\Rightarrow\; M \setminus A$ offen.

$\square$

6.29 Satz: Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen, (x_n) Folge in A. Dann:

$$(x_n) \text{ konvergent in } M \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n \in A.$$

Beweis: Sei $x_n \to x$ in M.
Fall 1: $\exists N_0 \in \mathbb{N}\; \forall n > N_0 : x_n = x$. Dann $x = x_{N_0+1} \in A$.
Fall 2: $\forall N \in \mathbb{N}\; \exists n > N : x_n \neq x$: Dann existiert eine Teilfolge mit $x_{n_k} \to x$ mit $\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \neq x$.
$x_n \to x \;\Rightarrow\; x_{n_k} \to x \;\underset{A \text{ abgeschlossen}}{\overset{6.28}{\Rightarrow}}\; x \in H(A) \subseteq A$.

$\square$

6.30 Satz: Sei (M,d) metrischer Raum, $A \subseteq M$. Dann

1) $H(A) \subseteq \overline{A}$,

2) $\overline{A} = A \cup H(A)$.

Beweis: 1) $h \in H(A) \;\Rightarrow\; \exists \underbrace{(x_n) \text{ in } A}_{\Rightarrow (x_n) \text{ in } \overline{A}} : x_n \to h \overset{\overline{A} \text{ abgeschlossen}}{\underset{6.29}{\Rightarrow}} h \in \overline{A}.$

2) Aus 1) und Definition von $\overline{A}$: $A \subseteq A \cup H(A) \subseteq \overline{A}$. Wenn $A \cup H(A)$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{A} = A \cup H(A)$ (denn $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A als Teilmenge enthält).

Zeige $H\big(A \cup H(A)\big) \subseteq A \cup H(A)$ (dann ist $A \cup H(A)$ abgeschlossen nach 6.28).

Sei $h \in H\big(A \cup H(A)\big) \;\Rightarrow\; \exists (x_n)$ in $A \cup H(A) : x_n \to h \;\wedge\; x_n \neq h$. Betrachte jedes einzelne x_n. Falls $x_n \in H(A)$, existiert ein $x_n' \in A$ mit $d(x_n, x_n') < \dfrac{1}{n}$ und $x_n' \neq h$ (in der Umgebung $B_{1/n}(x_n)$ von x_n liegen unendlich viele Elemente von A). Definiere

$$y_n := \begin{cases} x_n & \text{falls } x_n \in A, \\ x_n' & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann: (y_n) in A, $y_n \neq h$, $y_n \to h$ (denn $d(y_n, h) \leq d(x_n, h) + \frac{1}{n}$). Also $h \in H(A)$.
Da h beliebig: $H\big(A \cup H(A)\big) \subseteq H(A) \subseteq A \cup H(A)$. □

6.5 Kompakte Mengen in $\mathbb{R}$

6.31 Satz (Heine-Borel für $\mathbb{R}$): In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ gilt für $K \subseteq \mathbb{R}$:

$$K \text{ kompakt} \;\Leftrightarrow\; K \text{ beschränkt und abgeschlossen.}$$

Beweis: 1) "$\Rightarrow$": Gilt in jedem metrischen Raum, siehe 6.25.

2) "$\Leftarrow$": Sei K beschränkt und abgeschlossen. Annahme: K ist nicht kompakt, d.h. es gibt eine offene Überdeckung O von K, so dass jede endliche Teilmenge keine Überdeckung von K ist.
K beschränkt $\;\Rightarrow\; \exists R > 0 : K \subseteq [-R, R]$.
Schritt 1: Halbiere $[-R, R]$:
O ist auch offene Überdeckung von $[-R, 0] \cap K$ und von $[0, R] \cap K$. Für mindestens eine dieser beiden Mengen gilt: Jede endliche Teilmenge von O ist keine Überdeckung mehr. Wir wählen diese Menge und bezeichnen das das dazugehörige Intervall mit $[a_1, b_1]$.
Schritt 2: Halbiere $[a_1, b_1]$. Dasselbe Argument liefert uns ein abgeschlossenes Intervall $[a_2, b_2]$ mit $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$ und: O ist offene Überdeckung von $[a_2, b_2] \cap K$ und jede endliche Teilmenge von O ist keine Überdeckung.
So fortfahrend erhalten wir eine Intervallschachtelung

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_1.$$
$$b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b_1 - a_1) \;\to\; 0.$$

$\Rightarrow$ $(a_n), (b_n)$ sind monoton und beschränkt, konvergieren also in $\mathbb{R}$, und zwar gilt:

$$a_n \to a,\ b_n \to b = a,\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a \leq b_n.$$

In jedem Schritt muss $[a_n, b_n] \cap K \neq \emptyset$ gelten (sonst würde ein Element von O zur Überdeckung ausreichen). Wähle eine Folge (x_n) mit $x_n \in [a_n, b_n] \cap K$.
Einschließungskriterium $\Rightarrow$ $x_n \to a$.
K abgeschlossen $\overset{6.29}{\Rightarrow}$ $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in K$.
$K \subseteq \bigcup\limits_{U \in O} U \Rightarrow$ $\exists U \in O : a \in U$.
U offen $\Rightarrow$ $\exists R > 0 : B_R(a) \subseteq U$
Für n genügend groß gilt $0 < b_n - a_n < R \overset{a\in[a_n,b_n]}{\Rightarrow} [a_n, b_n] \subseteq\ ]\,a - R, a + R\,[\ = B_R(a) \subseteq U$
$\Rightarrow$ die einelementige Teilmenge $\{U\} \subseteq O$ reicht zur Überdeckung von $[a_n, b_n] \cap K$ aus. $\lightning$
Nach Konstruktion gilt: Jede endliche Teilmenge von O ist keine Überdeckung von $[a_n, b_n] \cap K$.

$\square$

6.32 Satz: In $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ gilt:

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ kompakt} \quad \Rightarrow \quad \sup(A), \inf(A) \in A.$$

Im Fall einer kompakten Menge A gilt also $\sup(A) = \max(A),\ \inf(A) = \min(A)$.

Beweis: A kompakt $\overset{6.25}{\Rightarrow}$ A beschränkt und abgeschlossen.
A beschränkt $\overset{3.71}{\Rightarrow}$ $\exists (a_n)$ in $A : a_n \to \sup(A)$.
A abgeschlossen $\overset{6.29}{\Rightarrow}$ $\sup(A) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in A$.
Genauso für $\inf(A)$.

$\square$

6.6 Stetige Abbildungen

6.33 Vereinbarung: Im Folgenden seien (M_j, d_j) metrische Räume. Ist $D(f) \subseteq M_1$ und $f : D(f) \to M_2$ eine Abbildung, so schreiben wir:

$$f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2.$$

$D(f)$ heißt **Definitionsbereich** von f. Die Schreibweisen

$$f : M_1 \supseteq D(f) \to \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$$

bedeuten, dass $M_2 = \mathbb{R},\ d_2 = d_{|.|}$ bzw. $M_1 = M_2 = \mathbb{R},\ d_1 = d_2 = d_{|.|}$.

6.34 Definition: Sei $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$.

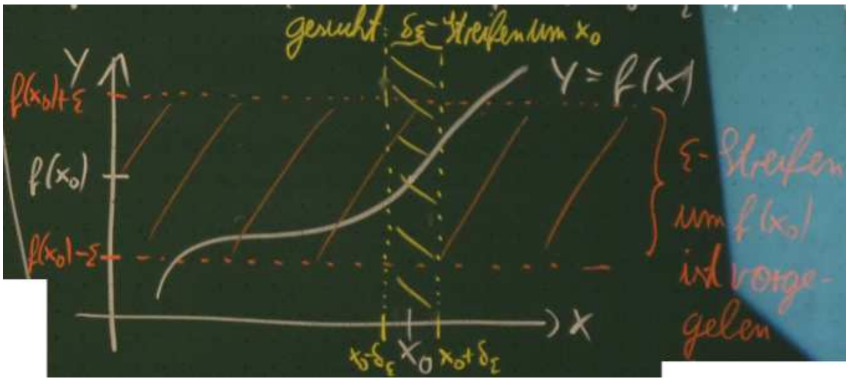
1) Für $x_0 \in D(f)$ heißt f **stetig in x_0**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x \in D(f) : d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

2) f heißt **stetig**, falls f stetig in allen $x_0 \in D(f)$.

6.35 Spezialisierung: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$. Dann ist f stetig in $x_0 \in D(f)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x \in D(f) : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$$



6.36 Beispiele: **1)** Konstante Funktionen sind stetig.

2) Für $M_1 = M_2 = M,\ d_1 = d_2 = d$: Die identische Abbildung $\mathrm{Id} : M \to M : x \mapsto x$ ist stetig.

6.37 Satz über Folgenstetigkeit: Sei $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$, $x_0 \in D(f)$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in x_0.

(ii) Für alle Folgen (x_n) in $D(f)$ gilt

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0).$$

D.h. f und $\lim$ sind vertauschbar: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\big)$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei (x_n) Folge in $D(f)$, $x_n \to x_0$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest.
f stetig $\;\Rightarrow\;$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$, so dass $\;d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
$x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; \exists N_\delta \; \forall n > N_\delta : d_1(x_n, x_0) < \delta_\varepsilon$.

$\Rightarrow\ \forall n > N_\delta : d_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$
$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow\ f(x_n) \to f(x_0)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Zeige $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii).
$\neg$(i) $\Leftrightarrow\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D(f) : d_1(x, x_0) < \delta\ \wedge\ d_2\big(f(x), f(x_0)\big) \geq \varepsilon$
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle $\delta_n := \frac{1}{n} : \Rightarrow\ \exists x_n \in D(f) : d_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n}\ \wedge\ d_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon$
$\Rightarrow\ x_n \to x_0\ \wedge\ \neg\big(f(x_n) \to f(x_0)\big)$
$\Rightarrow\ \neg$(ii), $\square$

6.38 Beispiele: 1) Einschaltfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

2) Die Dirichletsche Sprungfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ist nirgends stetig.

3) Unglaublich, aber wahr: $f : \mathbb{R} \supseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist stetig.

4) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig.

6.39 Definition: Seien $f : M \supseteq D(f) \to\ \mathbb{R},\ g : M \supseteq D(g) \to \mathbb{R}$.

1) Summe/Differenz von f und g: $D(f \pm g) := D(f) \cap D(g),\ (f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$.

2) Produkt von f und g: $D(f \cdot g) := D(f) \cap D(g),\ (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

3) Quotient von f und g: $D(\frac{f}{g}) := D(f) \cap \{x \in D(g) : g(x) \neq 0\},\ \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$.

6.40 Satz: Summe, Differenz, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in D(f+g)$ beliebig aber fest, (x_n) Folge in $D(f+g)$ mit $x_n \to x_0$. Dann folgt

$$(f+g)(x_n) \overset{\text{Def } f+g}{=} f(x_n) + g(x_n) \underset{\text{Rechenregeln für konv. Folgen}}{\overset{f,g \text{ stetig in } x_0}{\longrightarrow}} f(x_0) + g(x_0) \overset{\text{Def } f+g}{=} (f+g)(x_0).$$

Also ist $f+g$ stetig in x_0.
Genauso für Differenz, Produkt und Quotient. $\square$

6.41 Beispiele: 1) Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind stetig,

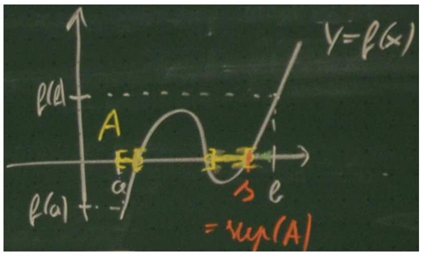
2) Seien P, Q Polynome. Die **gebrochen rationale Funktion**

$$f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ mit } D(f) = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

ist stetig.

6.42 Nullstellensatz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann

$$\exists x \in \,]a,b[\, : f(x) = 0.$$



Beweis: O.B.d.A: $f(a) < 0 \;\wedge\; f(b) > 0$. Betrachte

$$A \;:=\; \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}.$$

Dann
- $A \neq \emptyset$, denn $a \in A$,
- A beschränkt, da b obere Schranke, a untere Schranke.

$\Rightarrow\; s := \sup(A) \leq b \;\wedge\; \exists (x_n)$ in A mit $x_n \to s$.
Behauptung: $f(s) = 0$.
f stetig $\;\Rightarrow\; f(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{<0} \leq 0$. Insbesondere $s \neq b$, also $s < b$.
$\Rightarrow\; \forall x \in \,]s,b] : f(x) \geq 0$.
Für $y_n := s + \frac{1}{n}$ gilt $y_n \in \,]s,b]$ für $n \geq N_0$ und $y_n \to s$.
$f(y_n) \geq 0$ für $n \geq N_0 \;\Rightarrow\; f(s) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) \geq 0$.
$\Rightarrow\; f(s) = 0 \;\wedge\; s \in \,]a,b[\,$. $\square$

6.43 Hintereinanderausführung stetiger Funktionen:
Seien $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2,\; g : M_2 \supseteq D(g) \to M_3$, Bild$(f) \subseteq D(g)$.
Ist f stetig in $x_0 \in D(f)$ und g stetig in $f(x_0)$, so ist $g \circ f$ stetig in x_0.

Beweis: Sei (x_n) in $D(f)$, $x_n \to x_0$.
f stetig in $x_0 \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(x_0)$.
g stetig in $f(x_0) \;\Rightarrow\; \underbrace{g\big(f(x_n)\big)}_{=g\circ f(x_n)} \to \underbrace{g\big(f(x_0)\big)}_{=g\circ f(x_0)}$.
(x_n) beliebig $\overset{6.37}{\Rightarrow}$ $g \circ f$ stetig. $\square$

6.7 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

6.44 Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$ stetig und $K \subseteq D(f)$ kompakt. Dann ist

$$f(K) \;=\; \{f(x) : x \in K\}$$

kompakt (Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt).

Beweis: Zeige: K beschränkt und abgeschlossen $\Rightarrow$ $f(K)$ beschränkt und abgeschlossen. Dann folgt die Behauptung mit Heine-Borel 6.31.

1) $f(K)$ ist beschränkt: Annahme $f(K)$ nicht beschränkt.
$\Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in f(K) : |y_n| > n.$
$y_n \in f(K) \ \Rightarrow\ \exists x_n \in K : f(x_n) = y_n.$
(x_n) in K, K beschränkt $\Rightarrow$ (x_n) beschränkt $\overset{\text{Bolzano-Weierstraß}}{\Rightarrow}$ $\exists (x_{n_k}) : x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}.$
K abgeschlossen $\overset{6.29}{\Rightarrow}$ $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K.$
f stetig $\overset{6.37}{\Rightarrow}$ $f(x_{n_k}) \to f(x)$ $\lightning$ $|f(x_{n_k})| = |y_{n_k}| \to \infty.$

2) $f(K)$ ist abgeschlossen: Zeige $H\big(f(K)\big) \subseteq f(K)$. Dann folgt Abgeschlossenheit aus 6.28
Fall $H\big(f(K)\big) = \emptyset$: ✓
Fall $H\big(f(K)\big) \neq \emptyset$: Sei $h \in H\big(f(K)\big)$. Zeige $h \in f(K)$.
6.28 $\Rightarrow$ $\exists (y_n)$ in $f(K) : y_n \to h.$
Wähle wie oben (x_n) in K mit $f(x_n) = y_n$.
Wie in 1): $\exists (x_{n_k}) : x_{n_k} \to x \in K$, $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x)$
$\Rightarrow\ h = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = f(x) \in f(K).$

□

6.45 Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq K \to \mathbb{R}$ stetig und K kompakt. Dann

$$\exists x_+, x_- \in K : f(x_-) = \min\{f(x) : x \in K\} \ \wedge\ f(x_+) = \max\{f(x) : x \in K\}.$$

Stetige Funktionen auf kompakten Mengen haben einen größten und einen kleinsten Funktionswert.

Beweis: 6.44 $\Rightarrow$ $f(K)$ ist kompakt $\overset{6.32}{\Rightarrow}$ $\sup f(K) = \max f(K)$
$\Rightarrow\ \exists y \in f(K) : y = \max f(K)\ \Rightarrow\ \exists x_+ \in K : f(x_+) = y = \max f(K).$
Genauso für Minimum.

□

6.46 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R} \supseteq\ ]0,1[\ \to \mathbb{R} : x \mapsto x.$

2) $f : \mathbb{R} \supseteq [-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$

6.47 Zwischenwertsatz von Bolzano: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und

$$m := \min\{f(x) : x \in [a,b]\} \leq c \leq M := \max\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Dann

$$\exists x \in [a,b] : f(x) = c.$$

Beweis: Letzter Satz $\Rightarrow$ $\exists x_-, x_+ \in [a,b] : f(x_-) = m \ \wedge \ f(x_+) = M$.
Fall 1 $c = m$: Dann $f(x_-) = c$.
Fall 2 $c = M$: Dann $f(x_+) = c$.
Fall 3 $m < c < M$: $g(x) := f(x) - c$, $D(g) = \begin{cases} [x_-, x_+] & \text{falls } x_+ > x_- \\ \text{bzw. } [x_+, x_-] & \text{sonst} \end{cases}$
$g(x_-) \cdot g(x_+) = (m - c)(M - c) < 0$, g ist stetig
$\overset{\text{Nullstellensatz}}{\underset{6.42}{\Rightarrow}} \quad \exists x \in D(g) : \underbrace{g(x) = 0}_{\Leftrightarrow f(x) = c}$

□

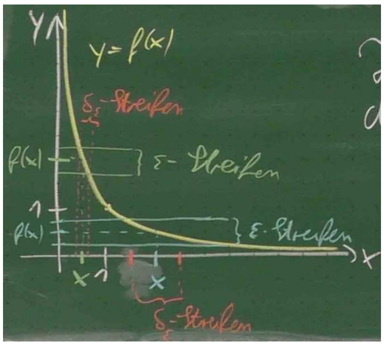
6.48 Beispiel: $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[\, : x \mapsto x^2$ ist surjektiv.

6.49 Erinnerung: $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$ heißt stetig, falls

$$\forall x \in D(f) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x' \in D(f) : d_1(x, x') < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ d_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

6.50 Beispiel: $f : \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Je näher x an 0, desto kleiner muss δ_ε gewählt werden.



6.51 Definition: $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x, x' \in D(f) : d_1(x, x') < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ d_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

D.h. δ_ε ist universal, unabhängig von x, x' wählbar.

6.52 Satz: $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$ stetig und $D(f)$ kompakt $\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig.

Beweis:
f stetig $\Rightarrow$ $\forall x \in D(f)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0\ \forall x' \in D(f) : d_1(x,x') < \delta_{\varepsilon,x} \Rightarrow d\big(f(x), f(x')\big) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Setze $O := \big\{B_{\frac{1}{2}\delta_{\varepsilon,x}}(x) : x \in D(f)\big\}$ $\Rightarrow$ O offene Überdeckung von $D(f)$.
$D(f)$ kompakt $\Rightarrow$ $\exists x_1, \dots x_n \in D(f) : D(f) \subseteq \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B_{\frac{1}{2}\delta_{\varepsilon,x_k}}(x_k)$
Setze $\delta := \min\{\frac{1}{2}\delta_{\varepsilon,x_k} : k = 1, \dots, n\}$. Seien $x, x' \in D(f)$ beliebig mit $d_1(x,x') < \delta$.
$x \in D(f)$ $\Rightarrow$ $\exists l \in \{1, \dots, n\} : x \in B_{\frac{1}{2}\delta_{\varepsilon,x_l}}(x_l)$.
$\Rightarrow$ $d_1(x', x_l) \leq d_1(x', x) + d_1(x, x_l) < \delta + \dfrac{1}{2}\delta_{\varepsilon,x_l} \leq \delta_{\varepsilon,x_l}$
$\Rightarrow$ $d_2\big(f(x), f(x')\big) \leq d_2\big(f(x), f(x_l)\big) + d_2\big(f(x_l), f(x')\big) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

6.53 Beispiel: Gilt $0 < a < b$, so ist $f : \mathbb{R} \supseteq [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ gleichmäßig stetig.

6.8 Grenzwerte von Funktionen

6.54 Definition: Sei $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$, $x_0 \in H\big(D(f)\big)$. Dann heißt $y \in M_2$ **Grenzwert** von f für $x \to x_0$, geschrieben $y = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x \in D(f) \setminus \{x_0\} : d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2\big(f(x), y\big) < \varepsilon.$$

6.55 Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x = 3 \end{cases}$

6.56 Satz: Sei $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$, $x_0 \in H\big(D(f)\big)$, $y \in M_2$. Dann sind äquivalent:

(i) $y = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

(ii) $\forall (x_n)$ in $D(f) \setminus \{x_0\} : x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to y$.

Beweis: Genauso wie bei Folgenstetigkeit, siehe Beweis von 6.37. $\square$

6.57 Satz: Sei $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$, $x_0 \in H\big(D(f)\big)$ und $x_0 \in D(f)$. Dann sind äquivalent:

(i) f stetig in x_0,

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \;=\; f(x_0)$.

Beweis: (ii) $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x \in D(f) \setminus \{x_0\} : d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$.

$\overset{x_0 \in D(f)}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x \in D(f) : d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow$ (i) $\square$

6.58 Definition: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to M$.

1) Ist $A \subseteq D(f)$, so heißt $f\big|_A : A \to M : x \mapsto f(x)$ **Einschränkung** von f auf A.

2) Ist $x_0 \in H\big(D(f) \cap \,]-\infty, x_0[\,\big)$, und existiert

$$y \;=\; \lim_{x \to x_0} f\big|_{D(f) \cap \,]-\infty, x_0[}(x),$$

so heißt y **linksseitiger Grenzwert** von f für $x \to x_0$. Schreibe

$$f(x_0 - 0) \;:=\; \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \;:=\; y.$$

3) Ist $x_0 \in H\big(D(f) \cap \,]x_0, \infty[\,\big)$, so ist der **rechtsseitige Grenzwert** von f für $x \to x_0$ definiert durch

$$f(x_0 + 0) \;:=\; \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \;:=\; \lim_{x \to x_0} f\big|_{D(f) \cap \,]x_0, \infty[}(x).$$

6.59 Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

6.60 Unstetigkeitsstellen: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq \,]a, b[\, \to M$, $x_0 \in \,]a, b[\,$, f nicht stetig in x_0. Dann heißt x_0

1) **hebbare Unstetigkeitsstelle**, falls $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ existieren und gleich sind.

2) **Unstetigkeitsstelle 1. Art** oder **Sprungstelle**, falls $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ existieren und verschieden sind.

3) **Unstetigkeitsstelle 2. Art**, falls $f(x_0 - 0)$ oder $f(x_0 + 0)$ nicht existiert.

6.61 Beispiel: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}0, & x<-1\\ 1, & x=-1\\ 0, & -1<x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}.$

6.62 Definition: **1)** Seien $f:[a,\infty[\,\to M,\ g:\,]-\infty,b]\to M$. Dann

$$y=\lim_{x\to\infty}f(x)\ /\ z=\lim_{x\to-\infty}g(x),$$

falls für jede Folge (x_n) in $D(f)$ gilt

$$x_n\to\infty\ \Rightarrow\ f(x_n)\to y\ /\ x_n\to-\infty\ \Rightarrow\ g(x_n)\to z.$$

2) Sei $f:M\supseteq D(f)\to\mathbb{R},\ x_0\in H\big(D(f)\big)$. Dann

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\ =\ \infty\ (=-\infty),$$

falls für jede Folge (x_n) in $D(f)\setminus\{x_0\}$ gilt

$$x_n\to x_0\ \Rightarrow\ f(x_n)\to\infty\ (\to-\infty).$$

3) Entsprechend $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\pm\infty.$

6.63 Beispiele: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x}=\infty,\ \lim\limits_{x\to0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty.$

6.9 Monotone Funktionen

6.64 Definition: Sei $f:\mathbb{R}\supseteq D(f)\to\mathbb{R}$, $A\subseteq D(f)$. Dann heißt f auf A

monoton wachsend, falls	$\forall x,x'\in A: x<x'\Rightarrow f(x)\le f(x')$
streng monoton wachsend, falls	$\forall x,x'\in A: x<x'\Rightarrow f(x)<f(x')$
monoton fallend, falls	$\forall x,x'\in A: x<x'\Rightarrow f(x)\ge f(x')$
streng monoton fallend, falls	$\forall x,x'\in A: x<x'\Rightarrow f(x)>f(x')$

f heißt auf A (streng) monoton), falls f auf A (streng) monoton wachsend oder auf A (streng) monoton fallend ist.

6.65 Beispiele:: **1)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto1$ ist monoton wachsend und monoton fallend.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^2$ ist auf $]-\infty,0]$ streng monoton fallend, auf $[0,\infty[$ streng monoton wachsend.

6.66 Satz: $f : \mathbb{R} \supseteq\,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ monoton, $x_0 \in\,]a,b[$. Dann existieren $f(x_0 - 0)$ und $f(x_0 + 0)$. Das bedeutet: Unstetigkeitsstellen monotoner Funktionen sind immer von 1. Art.

Beweis: Für f monoton wachsend, $f(x_0 - 0)$:

1) Sei $x_n := x_0 - \dfrac{1}{n}$, $n > N_0$ so dass $x_n \in\,]a, x_0[$.

$$x_n < x_{n+1} < x_0 \overset{f \text{ monoton}}{\underset{\text{wachsend}}{\Rightarrow}} f(x_n) \leq f(x_{n+1} \leq f(x_0) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \big(f(x_n)\big) \text{ monoton wachsend} \\ f(x_n) \text{ nach oben beschränkt} \end{cases}$$

$\Rightarrow\; f(x_n) \to y \in \mathbb{R} \;\wedge\; \forall n \in \mathbb{N} : f(x_n) \leq y$.

2) Sei (x'_n) Folge in $]a, x_0[$, $x'_n \to x_0$. Zeige $f(x'_n) \to y$. Dann folgt $f(x_0 - 0) = y$.

a) Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. $x'_m < x_0 \;\wedge\; x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall n > N : x'_m < x_n$

$\Rightarrow\; f(x'_m) \leq f(x_n) \leq y$

b) Sei $\varepsilon > 0$: $f(x_n) \to y \;\Rightarrow\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\; \forall n > N_\varepsilon : y - \varepsilon < f(x_n) \leq y$

$$x'_n \to x_n \;\Rightarrow\; \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}\; \forall n > N'_\varepsilon : x_0 - \frac{1}{N_\varepsilon + 1} = x_{N_\varepsilon+1} < x'_n$$

$$\Rightarrow\; \forall n > N'_\varepsilon : y - \varepsilon < f(x_{N_\varepsilon+1}) \leq f(x'_n)$$

a) und b) $\;\Rightarrow\; \forall n > N'_\varepsilon : y - \varepsilon < f(x_n) \leq y$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\;\Rightarrow\; f(x'_n) \to y$.

(x'_n) beliebig mit $x'_n \to x_0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = y$.

□

6.67 Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (fallend). Dann:

1) f ist injektiv. Insbesondere ist $f : D(f) \to \text{Bild}(f)$ bijektiv.

2) $f^{-1} : \text{Bild}(f) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend (fallend).

Beweis: Sei f streng monoton wachsend.

1) Sei $x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow \begin{cases} \text{Fall } x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(_2) \\ \text{Fall } x_1 > x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(_2) \end{cases} \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$.

2) Sei $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. Zeige $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$

Annahme $x_1 \geq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$ ↯

□

6.68 Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \\ x-1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

f ist stetig und streng monoton wachsend,
aber die Umkehrfunktion f^{-1} : Bild$(f) \to D(f)$ ist nicht stetig.

6.69 Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton, und sei $D(f)$ kompakt. Dann ist f^{-1} : Bild$(f) \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Sei $y_0 \in$ Bild(f), (y_n) in Bild(f), $y_n \to y_0$. Zeige $x_n := f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0) =: x_0$.
Annahme: $\neg x_n \to x_0$, d.h. $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |x_n - x_0| \ge \varepsilon$
$\Rightarrow\ \exists (x_{n_k})\ \forall k \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - x_0| \ge \varepsilon$
(x_{n_k}) in $D(f)$ und $D(f)$ kompakt $\underset{\text{und 6.29}}{\overset{\text{Bolzano-Weierstraß}}{\Longrightarrow}}$ $\exists (x_{n_{k_j}}) : x_{n_{k_j}} \to x \in D(f)$.
f stetig $\Rightarrow\ \underbrace{f(x_{n_{k_j}})}_{=y_{n_{k_j}} \to y_0} \to f(x) \ \Rightarrow\ f(x) = y_0 = f(x_0)\ \Rightarrow x = x_0$
$\Rightarrow\ x_{n_{k_j}} \to x_0$ ↯ $|x_{n_{k_j}} - x_0| \ge \varepsilon$.
Also $x_n \to x_0$. Dies bedeutet $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$
$y_0 \in$ Bild(f) beliebig $\Rightarrow\ f^{-1}$ stetig. □

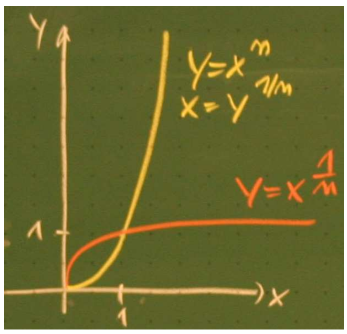
6.10 Potenz- und Exponentialfunktion

6.70 Satz und Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$, $f : [0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$. Dann

1) f ist stetig und streng monoton wachsend.

2) Bild$(f) = [0, \infty[$.

3) $f^{-1} : [0,\infty[\to [0, \infty[$ ist stetig und streng monoton wachsend.
Schreibe $x^{1/n} := \sqrt[n]{x} := f^{-1}(x)$.



Beweis: 1) klar.

2) Siehe Beispiel 6.48.

3) 6.67 $\Rightarrow\ f^{-1}$ existiert und ist streng monoton wachsend.
Stetigkeit: Sei $y \in [0, \infty[$. Wähle $b > 0$ mit $b^n > y$ ($\Rightarrow\ y \in$ Bild$\big(f\big|_{[0,b]}\big)$).
6.69 $\Rightarrow\ \left(f\big|_{[0,b]}\right)^{-1}$ ist stetig.
$f^{-1}(z) = \left(f\big|_{[0,b]}\right)^{-1}(z)$ für $0 \le z \le b^n\ \Rightarrow\ f^{-1}$ stetig in y.
$y \ge 0$ beliebig $\Rightarrow\ f^{-1}$ stetig. □

6.71 Definition: **1)** Sei $r \in \mathbb{Q}$, $r = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Für $x \geq 0$: $x^r := \left(x^{1/q}\right)^p$.

2) Für $r \in \mathbb{Q}$ heißt $f :]0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^r$ **Potenzfunktion**.

3) Für $a > 0$ heißt $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$ **Exponentialfunktion**.

6.72 Hinweise: **1)** Es ist zu zeigen: $\forall m \in \mathbb{N} : \left(x^{1/q}\right)^p = \left(x^{1/(mq)}\right)^{mp}$.

2) Die Potenzfunktion ist Hintereinanderausführung stetiger streng monoton wachsender (falls $r > 0$) Funktionen, also auch stetig und streng monoton wachsend falls $r > 0$.

3) Für $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{Q}$ gelten:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ a^r \cdot b^r &= (ab)^r \\ (a^r)^s &= a^{rs} \end{aligned}$$

4) Für $a > 1$ ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend, für $0 < a < 1$ ist sie streng monoton fallend.

6.73 Satz: Sei $a > 0$, (x_n) in $\mathbb{Q}$, $x_n \to 0$. Dann $a^{x_n} \to 1$.

Beweis: Fall $a > 1$: $a^{1/n} \to 1 \;\Rightarrow\; a^{-1/n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{1/n} \to 1$.
$\forall n \geq N_0 \; \exists k_n \in \mathbb{N} : -\frac{1}{k_n} < x_n < \frac{1}{k_n} \;\wedge\; k_n \to \infty$

$$\overset{\text{Monotonie}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{a^{-1/k_n}}_{>1-\varepsilon,\ n>N_\varepsilon} < a^{x_n} < \underbrace{a^{1/k_n}}_{<1+\varepsilon,\ n>N'_\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad a^{x_n} \to 1.$$

Genauso für $0 < a < 1$. □

6.74 Satz: Seien $a > 0$, $(x_n), (x'_n)$ in $\mathbb{Q}$, $x_n \to x$, $x'_n \to x$ in $\mathbb{R}$. Dann

1) $(a^{x_n}), (a^{x'_n})$ konvergieren in $\mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x'_n}$.

Beweis: **1)** $x_n \to x \;\Rightarrow\; \exists K \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq K \;\Rightarrow\; a^{x_n} \leq \begin{cases} a^K & \text{falls } a \geq 1 \\ a^{-K} & \text{falls } 0 < a < 1 \end{cases}$

$$\left|a^{x_n} - a^{x_m}\right| = \underbrace{a^{x_n}}_{\leq a^K \text{ oder } \leq a^{-K}} \cdot \underbrace{\left|1 - a^{x_n - x_m}\right|}_{<\varepsilon/a^K \text{ (letzter Satz)}} < \varepsilon \;\Rightarrow\; (a^{x_n}) \text{ C-Folge.}$$

2) $a^{x_n} - a^{x'_n} = \underbrace{a^{x_n}}_{\text{konv}} \Big(\underbrace{1 - a^{x_n - x'_n}}_{\to 0 \text{ (letzter Satz)}} \Big) \to 0.$ □

6.75 Definition: Sei $a > 0, x \in \mathbb{R}$. Wähle (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$. Dann:

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{x_n}.$$

6.76 Satz: Für $a, b > 0,\ r, s \in \mathbb{R}$ gelten:

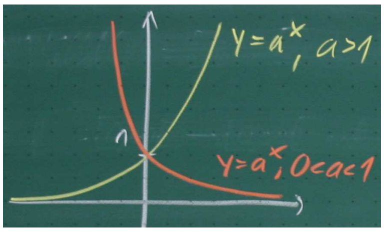
$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ a^r \cdot b^r &= (ab)^r \\ (a^r)^s &= a^{rs} \end{aligned}$$

Beweis: Z.B.: $(r_n), (s_n)$ Folgen in $\mathbb{Q}$ mit $r_n \to r,\ s_n \to s$. Dann

$$a^r \cdot a^s \overset{\text{Def. } a^x}{=} \left(\lim_{n\to\infty} a^{r_n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} a^{s_n} \underset{\text{konv. Folgen}}{\overset{\text{Satz über}}{=}} \lim_{n\to\infty} \left(a^{r_n} \cdot a^{s_n}\right) \overset{6.72}{=} \lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} \overset{\text{Def. } a^x}{=} a^{r+s}.$$

□

6.77 Satz und Definition: Sei $a > 1$ $(0 < a < 1)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$.

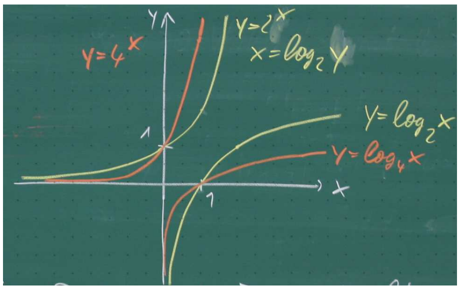


1) f ist stetig und streng monoton wachsend (fallend).

2) Bild$(f) =]0, \infty[$.

6.78 Definition: Sei $a > 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$. Die stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion $f^{-1} :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ heißt **Logarithmus zur Basis a**. Schreibe $\log_a x := f^{-1}(x)$.

6.79 Rechenregeln für den Logarithmus: Für $a > 1$ gelten



1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0).$

2) $\log_a 1 = 0, \quad \log_a(\frac{1}{x}) = -\log x, \quad \log_a a = 1.$

3) $\log_a(x^y) = y \log_a x \qquad (x > 0,\ y \in \mathbb{R}).$

Beweis in Übungen.

6.80 Satz: Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann ist $f :]0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^r$ stetig.

Beweis: Sei $b > 1$ fest. $x^r = b^{\log_b(x^r)} = b^{r \log_a x}$.
Also ist f Hintereinanderausführung stetiger Funktionen.

□

6.81 Satz: Sei (h_n) in $\mathbb{R}$ mit $0 < |h_n| < 1$ und $h_n \to 0$. Dann

$$\lim_{n\to\infty} (1+h_n)^{1/h_n} \;=\; \mathrm{e}.$$

Beweis: Betrachte $x_n := \dfrac{1}{h_n}$.
Fall 1: $x_n \to \infty$ (nur endlich viele $x_n < 0$),
Fall 2: $x_n \to -\infty$ (nur endlich viele $x_n > 0$),
Fall 3: (x_n) besteht aus zwei Teilfolgen (x_{n_k}) und $(x_{n'_k})$ mit $x_{n_k} > 0,\ x_{n_k} \to \infty$ und $x_{n'_k} < 0,\ x_{n'_k} \to -\infty$.

Fall 1: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0\ \exists k_n \in \mathbb{N} : k_n \leq x_n < k_n + 1$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 1+\frac{1}{k_n+1} \;<\; 1+\frac{1}{x_n} \;\leq\; 1+\frac{1}{k_n}\\
&\Rightarrow\ \underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}}_{\to \mathrm{e}\cdot 1} \;<\; \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \;\leq\; \underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}}_{\to \mathrm{e}\cdot 1}
\end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} &= \left(1-\frac{1}{|x_n|}\right)^{-|x_n|} = \left(\frac{|x_n|-1}{|x_n|}\right)^{-|x_n|} = \left(\frac{|x_n|}{|x_n|-1}\right)^{|x_n|}\\
&= \left(\frac{|x_n|-1+1}{|x_n|-1}\right)^{|x_n|} = \left(1+\frac{1}{|x_n|-1}\right)^{|x_n|-1}\left(1+\frac{1}{|x_n|-1}\right) \overset{\text{Fall 1}}{\to} \mathrm{e}\cdot 1
\end{aligned}$$

Fall 3: Aus Fall 1: $\left(1+\dfrac{1}{x_{n_k}}\right)^{x_{n_k}} \to \mathrm{e}$,

Aus Fall 2: $\left(1+\dfrac{1}{x_{n'_k}}\right)^{x_{n'_k}} \to \mathrm{e}$,

$\Rightarrow\ \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to \mathrm{e}$ $\square$

6.82 Satz: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

Beweis in den Übungen.

7 Differentialrechnung

7.1 Ableitung

7.1 Definition: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R},\ D(f)$ offen, $x_0 \in D(f)$.

1) f heißt **differenzierbar in x_0**, falls

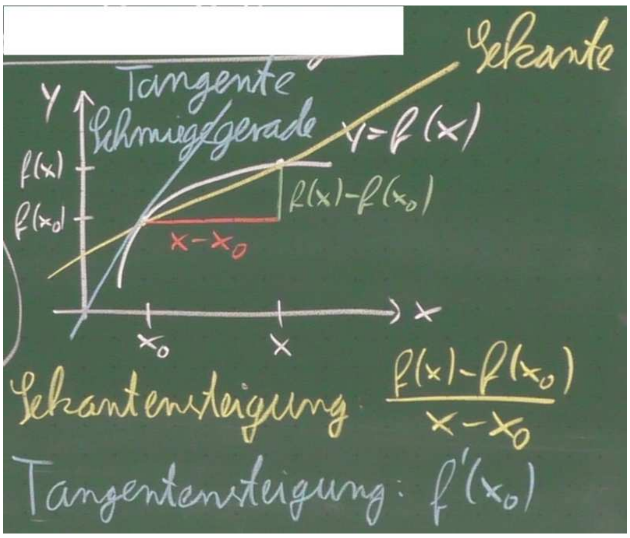
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \ := \ f'(x_0) \ := \ \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{Differenzenquotient}} \overset{h:=x-x_0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert, $f'(x_0)$ heißt **Ableitung von f in x_0**.

2) f heißt **differenzierbar**, falls f in jedem $x_0 \in D(f)$ differenzierbar ist. Dann heißt $f' : D(f) \to \mathbb{R}$ **Ableitung** von f.

7.2 Veranschaulichungen:

1)



2) $x : [0, T] \to \mathbb{R}$, $x(t) =$ zurückgelegte Entfernung zur Zeit t

$\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h} =$ Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $[t, t+h]$

$x'(t) =$ Momentangeschwindigkeit

7.3 Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \to \mathbb{R},\ D(f)$ offen, $x_0 \in D(f)$. Dann sind äquivalent:

(i) f differenzierbar in x_0.

(ii) Es gibt $R > 0$, $c \in \mathbb{R}$, $g : B_R(x_0) \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + |x-x_0| g(x) \text{ für } x \in B_R(x_0),$$
$$\text{und} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 = g(x_0).$$

Dann gilt $c = f'(x_0)$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Definiere

$$g(x) \;:=\; \begin{cases} \left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right)\dfrac{x-x_0}{|x-x_0|} & \text{für } x \in B_R(x_0)\setminus\{x_0\}, \\ 0 & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x-x_0|g(x) = f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0) \text{ für } x \in B_R(x_0)\setminus\{x_0\}, \\ g(x) \overset{x\neq x_0}{=} \Big(\underbrace{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} - f'(x_0)\Big)\underbrace{\dfrac{x-x_0}{|x-x_0|}}_{\in\{1,-1\}} \to 0 \text{ für } x \to x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $x \neq x_0$. Dann

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{\text{(ii)}}{=} c + \frac{|x-x_0|}{x-x_0}\,g(x) \overset{x\to x_0}{\to} c \;\Rightarrow\; f'(x_0) = c \text{ existiert } \;\Rightarrow\; \text{(i)}.$$

$\square$

7.4 Satz: f ist differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0.

Beweis: 7.3, (ii) $\Rightarrow$ $f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + |x-x_0|g(x) \overset{x\to x_0}{\to} f(x_0)$
$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\overset{6.57}{\Rightarrow}$ f stetig in x_0.

$\square$

7.5 Beispiele: **1)** $f(x) = c \;\Rightarrow\; f'(x) = 0.$

2) $f(x) = x^n,\; n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; f'(x) = n\,x^{n-1}.$

3) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$: f nicht stetig in $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ f nicht differenzierbar in 0.

4) $f(x) = |x|$: $f'(x) = 1$ falls $x > 0$, $f'(x) = -1$ falls $x < 0$, f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

5) Sei $a > 1$ und $f(x) = \log_a(x),\; D(f) = \,]0,\infty[$. Dann: $f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a(\mathrm{e})$ für $x > 0$.
Insbesondere $a = \mathrm{e}$: $f(x) = \ln(x) = \log_{\mathrm{e}}(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

6) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}.$

7.6 Satz: Sei f differenzierbar in x_0. Dann

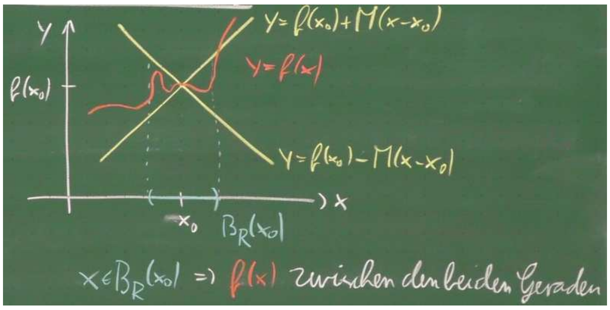
$$\exists B_R(x_0) \subseteq D(f)\; \exists K > 0\; \forall x \in B_R(x_0) : \big|f(x)-f(x_0)\big| \leq K|x-x_0|.$$

Beweis: Aus 7.3: $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + |x - x_0| g(x)$.
$\Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| \le |x - x_0| \big(|c| + |g(x)|\big)$.

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in D(g) = B_R(x_0) : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |g(x) - 0| < \varepsilon$.
Wähle $\varepsilon := 1$. Dann $x \in B_{\delta_1}(x_0) \ \Rightarrow \ |g(x)| < 1$.

$\Rightarrow \ \big|f(x) - f(x_0)\big| \le |x - x_0| \, (|c| + 1|)$ für $x \in B_{\delta_1}(x_0) \subseteq D(f)$. $\square$

7.7 Veranschaulichung:



7.2 Landau-Symbole

7.8 Definition: $f, g : \mathbb{R} \supseteq X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in H(X)$. Dann

$$\begin{aligned} f = O(g) \text{ für } x \to x_0 \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists K > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X : \big(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \le K|g(x)|\big) \\ f = o(g) \text{ für } x \to x_0 \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X : \big(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \le \varepsilon|g(x)|\big) \end{aligned}$$

Falls $\exists a \in \mathbb{R} : [a, \infty[\ \subseteq X$:

$$\begin{aligned} f = O(g) \text{ für } x \to \infty \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists K > 0 \ \exists L > 0 \ \forall x > L : |f(x)| \le K|g(x)|\big) \\ f = o(g) \text{ für } x \to \infty \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists L > 0 \ \forall x > L : |f(x)| \le \varepsilon|g(x)|\big) \end{aligned}$$

Entsprechend für $x \to -\infty$.
Schreibe $f_1(x) = f_2(x) + o\big(g(x)\big)$ für $f_1 - f_2 = o(g)$, $f_1(x) = f_2(x) + O\big(g(x)\big)$ für $f_1 - f_2 = O(g)$.

7.9 Rechenregeln: **1)** $f = o(g) \ \Rightarrow \ f = O(g)$ für $x \to x_0$.

2) $f_1 = O(g) \ \wedge \ f_2 = O(g) \ \Rightarrow \ f_1 + f_2 = O(g)$ für $x \to x_0$.

3) $f_1 = o(g) \ \wedge \ f_2 = o(g) \ \Rightarrow \ f_1 + f_2 = o(g)$ für $x \to x_0$.

4) $f_1 = O(g_1) \ \wedge \ f_2 = O(g_2) \ \Rightarrow \ f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \, g_2)$ für $x \to x_0$.

5) $f_1 = O(g_1) \ \wedge \ f_2 = o(g_2) \ \Rightarrow \ f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \, g_2)$ für $x \to x_0$.

Beweis: **1)** Wähle $\varepsilon := 1$ in der Def. von $o(g)$ $\Rightarrow$ Def. von $O(g)$ mit $K = 1$ erfüllt.

2)
$$\begin{aligned} |f_1(x)| &\leq K|g(x)| \quad \text{für } |x - x_0| < \delta \\ |f_2(x)| &\leq K'|g(x)| \quad \text{für } |x - x_0| < \delta' \end{aligned}$$
$\Rightarrow$ $|f_1(x) + f_2(x)| \leq (K + K')\,|g(x)|$ für $|x - x_0| \leq \min\{\delta, \delta'\}$.

3) Wie 2)

4)
$$\begin{aligned} |f_1(x)| &\leq K|g_1(x)| \quad \text{für } |x - x_0| < \delta \\ |f_2(x)| &\leq K'|g_2(x)| \quad \text{für } |x - x_0| < \delta' \end{aligned}$$
$\Rightarrow$ $|f_1(x) \cdot f_2(x)| \leq K \cdot K'\,|g_1(x) \cdot g_2(x)|$ für $|x - x_0| \leq \min\{\delta, \delta'\}$.

5) Übungen

$\square$

7.10 Beispiele: **1)** Es gilt immer $f = O(f)$ für $x \to x_0$.

2) $g(x) = x^2$, $f(x) = x + 1$: $f = o(g)$ für $x \to \infty$, $f^2 = O(g)$ für $x \to \infty$.

7.11 Satz: Sei $x_0 \in D(f)$.

1) f stetig in x_0 $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(x_0) + o(1)$ für $x \to x_0$.

2) f differenzierbar in x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + o(|x - x_0|)$ für $x \to x_0$.
Dann gilt $c = f'(x_0)$.

Beweis: **1)** f stetig in x_0 $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x \in D(f) : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \cdot 1$
$\Leftrightarrow$ $f - f(x_0) = o(1)$ für $x \to x_0$.

2) f differenzierbar in x_0 $\Leftrightarrow$
$\overset{7.3}{\Leftrightarrow}$ $\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + |x - x_0| g(x)\ \wedge\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$
$\Rightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + o(|x - x_0|)$ für $x \to x_0$.
$\Leftarrow$
$\uparrow$
$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)}{|x - x_0|} & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases} \Rightarrow\ g(x) \cdot |x - x_0| = o\big(|x - x_0|\big)\ \Rightarrow\ g = o(1)$$
Nach 7.3: $c = f'(x_0)$.

$\square$

7.3 Rechenregeln für Ableitungen

7.12 Satz: Seien $f, g : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten

1) $\lambda \cdot f$ ist differenzierbar in x_0, und es gilt $(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda\, f'(x_0)$.

2) $f + g$ ist differenzierbar in x_0, und es gilt $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

3) $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0 mit

$$(f \cdot g)'(x_0) \;=\; f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) \quad \textbf{(Produktregel)}.$$

4) Falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \;=\; \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \textbf{(Quotientenregel)}.$$

Beweis: Nach 7.11:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o\big(|x - x_0|\big) \quad \text{für } x \to x_0 \\ g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o\big(|x - x_0|\big) \quad \text{für } x \to x_0 \end{aligned} \qquad (*)$$

1) Selber

2) $(*) \overset{7.9}{\Rightarrow} (f+g)(x) = (f+g)(x_0) + \big(f'(x_0) + g'(x_0)\big)(x - x_0) + o\big(|x - x_0|\big) \overset{7.11}{\Rightarrow}$ Behauptung.

3)
$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow (f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(x_0) &+ \big(f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)\big)(x - x_0) \\ &\left.\begin{aligned} &+ \underbrace{f'(x_0)(x - x_0) \cdot g'(x_0)(x - x_0)}_{=o(|x-x_0|)} \\ &+ \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o\big(|x - x_0|\big)\big) o\big(|x - x_0|\big) \\ &+ \big(\underbrace{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o\big(|x - x_0|\big)}_{=O(1)}\big) o\big(|x - x_0|\big) \end{aligned}\right\} = o\big(|x - x_0|\big) \\ \overset{7.9}{\Rightarrow} (f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(x_0) &+ \big(f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)\big)(x - x_0) + o\big(|x - x_0|\big) \end{aligned}$$

4) Später

□

7.13 Beispiel: Polynome: $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \;\Rightarrow\; P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k\, x^{k-1}$.

7.14 Kettenregel: Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D' \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq D'$. Ist f in $x_0 \in D$ differenzierbar und g in $f(x_0) \in D'$ differenzierbar, dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; \underbrace{g'(f(x_0))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}} \quad \textbf{(Kettenregel)}.$$

Beweis: Sei (h_n) in $\mathbb{R}$ mit $h_n \to 0$ und $h_n \neq 0$.
f stetig in $x_0 \;\Rightarrow\; y_n := f(x_0+h_n) \to f(x_0) =: y_0$.
Fall 1: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : f(x_0+h_n) \neq f(x_0)$.

$$\overset{\text{für } n\geq N}{\Rightarrow} \quad \frac{(g\circ f)(x_0+h_n)-(g\circ f)(x_0)}{h_n} = \underbrace{\frac{g\big(f(x_0+h_n)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x_0+h_n)-f(x_0)}}_{=\frac{g(y_n)-g(y_0)}{y_n-y_0}\to g'(y_0)} \cdot \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$
$$\to \quad g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Fall 2: $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : f(x_0+h_n) = f(x_0)$.
$\Rightarrow$ Es gibt eine Teilfolge (h_{n_k}) mit $\forall k \in \mathbb{N} : f(x_0+h_{n_k}) = f(x_0)$
$\Rightarrow \; f'(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{f(x_0+h_{n_k})-f(x_0)}{h_{n_k}} = 0$
Also zu zeigen: $(g\circ f)'(x_0) = 0$.

$$\frac{(g\circ f)(x_0+h_n)-(g\circ f)(x_0)}{h_n} = \begin{cases} 0 & \text{falls } f(x_0+h_n) = f(x_0) \\ \dfrac{g\big(f(x_0+h_n)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x_0+h_n)-f(x_0)} \cdot \dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\to 0 = (g\circ f)'(x_0).$$
□

Beweis der Quotientenregel: Sei $h(y) := \dfrac{1}{y}$. Dann $\dfrac{1}{g(x)} = (h\circ g)(x)$.

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \overset{\text{Kettenregel}}{=} h'\big(g(x_0)\big)g'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Nun mit Produktregel:

$$\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}.$$

□

7.15 Ableitung der Umkehrfunktion: Sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$ injektiv, $D(f)$ offen, Bild(f) offen, f^{-1} : Bild$(f) \to D(f)$ die Umkehrfunktion. Ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ und ist f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ stetig, dann ist f^{-1} in y_0 differenzierbar mit

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}.$$

Beweis: Sei (h_n) in $\mathbb{R}$ mit $h_n \to 0$ und $h_n \neq 0$.
f^{-1} stetig in $y_0 \;\Rightarrow\; x_n := f^{-1}(y_0+h_n) \to f^{-1}(y_0) = x_0$. Außerdem $f(x_n) - f(x_0) = h_n$.

$$\Rightarrow \quad \frac{f^{-1}(y_0+h_n)-f^{-1}(y_0)}{h_n} = \frac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

(Da $y_0+h_n \neq y_0$ und f^{-1} injektiv, ist auch $x_n \neq x_0$.)
Also ist der Grenzwert unabhängig von der gewählten Folge (h_n)
$\Rightarrow \; f^{-1}(y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f^{-1}(y_0+h)-f(y_0)}{h} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.
□

7.16 Beispiele: **1)** $f(x) = x^n$, $x > 0$, $f'(x) = n\,x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ fest.

$f^{-1}(y) = y^{1/n}$ ist stetig

$$\Rightarrow\ f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} = \frac{1}{n\big(f^{-1}(y)\big)^{n-1}} = \frac{1}{n\,y^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}y^{(1-n)/n} = \frac{1}{n}\,y^{\frac{1}{n}-1}.$$

2) $f(x) = \ln(x) := \log_{\mathrm{e}}(x),\ x > 0\ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{1}{x}$.

$f^{-1}(y) = \mathrm{e}^y$ ist stetig

$$\Rightarrow\ (\mathrm{e}^y)' = f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{\frac{1}{f^{-1}(y)}} = f^{-1}(y) = \mathrm{e}^y.$$

3) Sei $a > 0$ fest, $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$

Kettenregel $\Rightarrow\ f'(x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

4) $a \in \mathbb{R}$ fest, $f(x) = x^a,\ x > 0\ \Rightarrow\ f'(x) = a\,x^{a-1}$.

7.17 Höhere Ableitungen: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$, D offen und $k \in \mathbb{N}$.

1) f heißt in $x_0 \in D$ ***k*-Mal differenzierbar**, falls f in $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$ $(k-1)$-Mal differenzierbar und die $(k-1)$-te Ableitung von f in x_0 differenzierbar ist. Schreibe

$$f^{(k)}(x_0) \ := \ \frac{\mathsf{d}^k f}{\mathsf{d}x^k}(x_0) \ := \ \frac{\mathsf{d}f^{(k-1)}}{\mathsf{d}x}(x_0) \qquad (f^{(2)} =: f'',\ f^{(3)} =: f''',\ f^{(0)} =: f).$$

2) f heißt ***k*-Mal differenzierbar** (auf D), falls f in jedem $x_0 \in D$ k-Mal differenzierbar ist; $x \mapsto f^{(k)}(x)$ heißt die ***k*-te Ableitung** von f.

3) f heißt ***k*-Mal stetig differenzierbar**, falls f k-Mal differenzierbar und $f^{(k)}$ stetig ist. Die Menge der auf D k-Mal stetig differenzierbaren Funktionen bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, bezeichnet mit $C^k(D \to \mathbb{R})$. $C^\infty(D \to \mathbb{R})$ ist der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf D.

7.18 Leibniz-Regel: Sei $n \in \mathbb{N},\ f, g$ in x_0 n-Mal differenzierbar. Dann

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0).$$

(Beweis durch vollständige Induktion.)

7.4 Extrema

7.19 Definition: Sei (M,d) metrischer Raum. Die Funktion $f : M \supseteq D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**), falls

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in D : d(x, x_0) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad \text{(bzw. } f(x) \geq f(x_0)\text{)}.$$

Ein lokales Maximum oder Minimum heißt auch **lokales Extremum**. Falls $f(x) = f(x_0)$ nur für $x = x_0$ in $B_\varepsilon(x_0)$, so heißt das lokale Extremum **strikt** oder **isoliert**.

Falls

$$\forall x \in D : f(x) \leq f(x_0) \ / \ f(x) \geq f(x_0),$$

hat f in x_0 ein **globales Maximum/globales Minimum**.

7.20 Notwendiges Kriterium für Extremum: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann:

$$f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales Extremum} \ \Rightarrow \ f'(x_0) = 0.$$

Ist f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 **stationärer** oder **kritischer** Punkt von f.

Beweis: f habe ein lokales Maximum in x_0. Dann folgt

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x_0) & = & \lim\limits_{h \to 0+0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \\ f'(x_0) & = & \lim\limits_{h \to 0-0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

□

7.21 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^3 = x^3(x-1)$: Kritische Punkte: $x = 0 \ \vee \ x = \frac{3}{4}$.
In $x_0 = \frac{3}{4}$ hat f ein lokales und globales Minimum, in $x_0 = 0$ kein Extremum.

2) $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x$:
Keine kritischen Punkte, aber bei $x_0 = 1$ hat f ein lokales und globales Maximum, bei $x_0 = 0$ ein lokales und globales Minimum.

7.5 Mittelwertsätze und Anwendungen

7.22 Satz von Rolle: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gilt:

$$f(a) = f(b) \ \Rightarrow \ \exists \xi \in]a,b[: f'(\xi) = 0.$$

Beweis: $[a,b]$ kompakt $\overset{6.45}{\Rightarrow}$ f nimmt auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an.

Fall 1) Minimum und Maximum liegen in a und b.

$$\Rightarrow \; f(x) = \text{const} = f(a) \text{ für } x \in [a,b] \; \Rightarrow \; f'(x) = 0 \text{ in } [a,b]$$

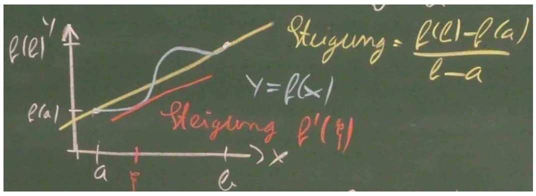
Fall 2) Maximum oder Minimum in $x_0 \in \,]a,b[\,$.

$$\overset{7.20}{\Rightarrow} \; f'(x_0) = 0.$$

$\square$

7.23 Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gilt:

$$\exists \xi \in \,]a,b[: f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Beweis: Setze $F(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

$$\Rightarrow \; F \text{ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle } (F(a) = f(a) = F(b))$$
$$\Rightarrow \; \exists \xi \in \,]a,b[: 0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$\square$

7.24 Verallgemeinerter Mittelwertsatz: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$, und $\forall x \in \,]a,b[\, : g'(x) \neq 0$. Dann gilt:

$$\exists \xi \in \,]a,b[: \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Beweis: Falls $g(a) = g(b) \overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \xi \in \,]a,b[: g'(\xi) = 0$ ↯
$F(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big) \;\Rightarrow\; F$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle.
$\Rightarrow \; \exists \xi \in \,]a,b[: 0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi).$

$\square$

7.25 Nullableitung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gilt:

$$\big(\forall x \in \,]a,b[: f'(x) = 0\big) \;\Rightarrow\; f = \text{konstant auf } [a,b].$$

Beweis: $y \in]a,b] \;\Rightarrow\; f\big|_{[a,y]}$ erfüllt die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes.

$$\Rightarrow \quad \exists \xi \in]a,y[: \underbrace{f'(\xi)}_{=0} = \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \;\Rightarrow\; f(y) = f(a)$$

y beliebig $\;\Rightarrow\; \forall y \in]a,b[: f(y) = f(a)$. □

7.26 Monotonie: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$.

1) Falls

$$\forall x \in]a,b[: f'(x) \geq 0 \qquad (f'(x) > 0 \quad / \quad f'(x) \leq 0 \quad / \quad f'(x) < 0),$$

so ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend (streng monoton wachsend/monoton fallend/ streng monoton fallend).

2) Ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend/fallend, dann $\forall x \in]a,b[: f'(x) \geq 0 / f'(x) \leq 0$ auf $]a,b[$.

Beweis: **1)** Sei $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$. Zeige $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) < f(x_2)$ durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf $f\big|_{[x_1,x_2]}$:

$$\exists \xi \in]x_1,x_2[: \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0 \text{ oder } > 0.$$

2) $$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\geq 0 \text{ falls } f \text{ mon. wachsend}} .$$ □

7.27 Lokale Extrema: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$, $x_0 \in]a,b[$.

1) Gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \; (f'(x) > 0) \quad &\text{für} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0, \\ f'(x) \leq 0 \; (f'(x) < 0) \quad &\text{für} \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon, \end{aligned}$$

so hat f in x_0 ein lokales (striktes) Maximum: $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.

Entsprechend für Minimum.

2) Ist f in x_0 zwei Mal differenzierbar und $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum (Minimum).

3) Ist f in x_0 zwei Mal differenzierbar, und besitzt f in x_0 ein lokales Maximum (Minimum), so folgt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \leq 0$ (≥ 0).

Beweis: 1) Aus letztem Satz:

$$\left.\begin{array}{llll} f'(x) \geq 0 & \Rightarrow & f \text{ ist monoton wachsend} & \text{für } x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 \\ f'(x) \leq 0 & \Rightarrow & f \text{ ist monoton fallend} & \text{für } x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ hat in } x_0 \text{ ein} \\ \text{lokales Maximum.} \end{array}$$

Genauso für striktes Maximum.

2) $f'(x_0) = 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - 0}{x - x_0} = f''(x_0) < 0$

$$\Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 : \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \text{ für } x_0 - \varepsilon < x < x_0 \ \vee \ x_0 < x < x_0 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x_0 < x < x_0 + \varepsilon \\ > 0 & \text{für } x_0 - \varepsilon < x < x_0 \end{cases}$$

$$\overset{1)}{\Rightarrow} \quad f \text{ hat in } x_0 \text{ lokales striktes Maximum.}$$

3) f habe in x_0 lokales Maximum.
7.20 $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$.
Wäre $f''(x_0) > 0 \ \Rightarrow f$ hat in x_0 ein lokales striktes Minimum ↯ □

7.28 Achtung: $f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) = 0$ bedeutet gar nichts! Z.B. $f : x \mapsto x^4$ oder $f : x \mapsto x^5$ bei $x_0 = 0$. In diesem Fall muss man höhere Ableitungen betrachten (später).

7.6 Taylorentwicklung

7.29 Vorbemerkung: Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ n-Mal stetig differenzierbar, $x_0 \in]a,b[$. Es gibt genau ein Polynom $T_n(x_0, x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j \, (x - x_0)^j$ n-ten Grades, so dass

$$T_n^{(k)}(x_0, x)\big|_{x = x_0} \ = \ f^{(k)}(x_0) \qquad \text{für } 0 \leq k \leq n$$

($n + 1$ Unbekannte $a_0, \ldots a_n$ und $n + 1$ Gleichungen). Für dieses Polynom gilt

$$T_n(x_0, x) \ = \ \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \, (x - x_0)^j.$$

$T_n(x_0, .)$ heißt das ***n*-te Taylorpolynom** für f, $R_n(x_0, x) := f(x) - T_n(x_0, x)$ das ***n*-te Restglied**.

7.30 Beispiel: $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

$$x_0 = 0 : \quad f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1 \text{ für } k \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow \ T_n(0, x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \, x^j, \quad \underbrace{R_n(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!},}_{\text{bringt so nichts}}$$

$$x_0 = 1 : \quad f^{(k)}(1) = \mathrm{e} \qquad \Rightarrow \ T_n(1, x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathrm{e}}{j!} (x - 1)^j.$$

7.31 Satz (Taylor, Lagrange): Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $(n+1)$-Mal stetig differenzierbar, $x_0 \in]a,b[$ und $x \in]x_0, b[$. Dann:

$$\exists \xi \in]x_0, x[: f(x) = T_n(x_0, x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{=R_n(x_0,x)}$$

(gilt genauso für $x \in]a, x_0[$, nur dann $\xi \in]x, x_0[$).

Beweis: Sei $x \in]x_0, b[$ fest, $t \in [x_0, x]$ variabel und

$$\begin{aligned} F(t) &:= f(x) - T_n(t,x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j \\ G(t) &:= \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x) = f(x) - T_n(x,x) = 0 \\ G(x) = 0 \\ F'(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!} j(x-t)^{j-1}}_{\overset{k=j-1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k} - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \\ G'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} \end{cases}$$

Verallgemeinerter Mittelwertsatz:

$$\exists \xi \in]x_0, x[: \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(x) - f(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F(x_0)}{G(x_0)} = \frac{f(x) - T_n(x_0,x)}{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$$\Rightarrow f(x) - T_n(x_0, x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{-f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{-(x-\xi)^n}.$$

□

7.32 Beispiel: $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x_0 = 0$, $x = 1$: e^1 soll bis auf Genauigkeit 10^{-5} durch $T_n(1)$ bestimmt werden. Wähle n so groß, dass $|R_n(x_0, x)| < 10^{-5}$:

$$|R_n(0,1)| = \left| \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \right| \overset{0<\xi<1}{\leq} \frac{\mathrm{e}^1}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} \overset{!}{\leq} 10^{-5}.$$

Für $n = 8$ gilt $(n+1)! = 9! = 362880$, also $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$.

$$\Rightarrow \mathrm{e} \approx T_8(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2,7182788.$$

7.33 Bemerkung: $T_n(x_0, .)$ approximiert f an der Stelle x_0 bis zur n-ten Ableitung. Erst durch Diskussion des Restgliedes erkennt man, wie gut die Approximation in einer Umgebung von x_0 ist.

7.34 Satz: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{e}^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Taylorentwicklung bei $x_0 = 0$:

$$\mathrm{e}^x = T_n(0,x) + R_n(0,x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + R_n(0,x)$$

$$|R_n(0,x)| = \left| \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} \right| \leq \underbrace{\max\{\mathrm{e}^x, 1\}}_{=\text{ konst}} \underbrace{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{\to 0} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

□

7.35 Hinreichende Bedingungen für Extrema: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ n-Mal stetig differenzierbar, $x_0 \in D$ und $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

1) Ist n ungerade, so hat f in x_0 einen **Sattelpunkt**, d.h. Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

2) Falls n gerade ist:

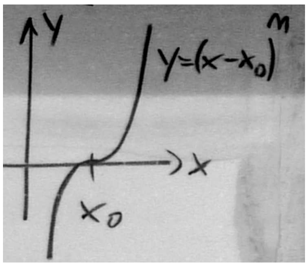
   a) Ist $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum.

   b) Ist $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

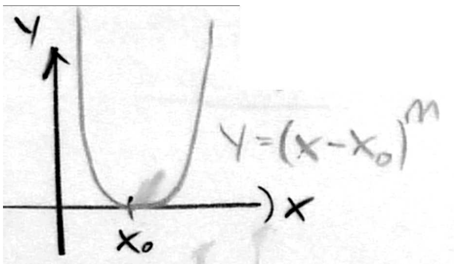
Beweis: Taylorentwicklung: $f(x) = \underbrace{T_{n-1}(x_0,x)}_{=f(x_0)+0} + r_{n-1}(x_0,x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} 0 + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$,

$f^{(n)}$ stetig $\wedge$ $f^{(n)}(x_0) \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \;\Rightarrow\; f^{(n)}(\xi) \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$ in $B_\varepsilon(x_0)$.

Falls n ungerade:



Falls n gerade:



Multiplikation mit $f(\xi)$ mit konstantem Vorzeichen ändert den Graph nicht wesentlich (z.B. Vorzeichenwechsel bei x_0 bleibt), Addition von $f(x_0)$ verschiebt den Graphen.

□

7.36 Beispiele: $f(x) = x^6$, $f(x) = x^7$.

7.7 Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$

7.37 Regeln von de l'Hospital: Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$, und es existiere

$$l = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Gilt zusätzlich

$$\lim_{x \to b} f(x) = 0 \ \wedge \ \lim_{x \to b} g(x) = 0 \tag{$*$}$$

oder

$$\lim_{x \to b} g(x) = \infty \tag{$**$}$$

so folgt

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Beweis: **1)** Sei $l' > l$ gegeben. Zeige $\dfrac{f(x)}{g(x)} < l'$ für $x \to b$.

Wähle $l'' \in]l, l'[$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{x \to b}{\to} l < l'' \Rightarrow \exists K \in]a, b[\ \forall x \in]K, b[: \frac{f'(x)}{g'(x)} < l''.$$

Wähle $x_1 \in]K, b[$ fest. Verallgemeinerter Mittelwertsatz im Intervall $[x_1, x]$ für $x_1 < x < b$:

$$\forall x \in]x_1, b[\ \exists \xi_x \in]x_1, x[: \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \overset{\xi_x \in]K,b[}{<} l''.$$

a) Gilt $(*)$, so folgt

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \leq l'' < l'.$$

Da x_1 fest, aber beliebig, folgt $\forall x_1 \in]K, b[: \dfrac{f(x_1)}{g(x_1)} < l'$.

b) Gilt $(**)$, so folgt

$$\exists K' \in]K, b[\ \forall x \in]K', b[: g(x) > \max\{0, g(x_1)\}.$$

Für $x \in]K', b[$ folgt dann

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)}}_{>0} < l'' \underbrace{\frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)}}_{=1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < l'' \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)} \overset{x \to b}{\to} l'' < l'$$

$$\Rightarrow \exists K'' \in]K', b[\ \forall x \in]K'', b[: \frac{f(x)}{g(x)} < l'.$$

Damit ist bewiesen: Aus $(*)$ oder $(**)$ folgt

$$\forall l' > l \ \exists K \in]a,b[\ \ \forall x \in]K,b[: \frac{f(x)}{g(x)} \ < \ l'.$$

2) Genauso zeigt man

$$\forall l'' < l \ \exists K' \in]a,b[\ \ \forall x \in]K',b[: \frac{f(x)}{g(x)} \ > \ l''. \qquad (***)$$

3) Sei $\varepsilon > 0$. Setze $l' := l + \varepsilon, \ l'' := l - \varepsilon$. Dann

$$\forall x \in]\max\{K, K'\}, b[: l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon.$$

Dies beweist $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$. □

7.38 Bemerkungen: $\mathbf{1)}$ Der Satz gilt genauso, wenn $\lim\limits_{x \to} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \ (= -\infty)$. Dies folgt direkt aus $(***)$ (bzw. aus der Aussage vor $(***)$).

2) Der Satz gilt entsprechend auch für den Grenzwert $x \to a$.

3) Als Kurzhinweis auf die Anwendung des Satzes schreibt man $\left[\frac{0}{0}\right]$ bzw. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

4) Anwendung beim Typ "$0 \cdot \infty$": $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to b} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad (\text{Fall } \left[\frac{0}{0}\right]) \\ &= \lim_{x \to b} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad (\text{Fall } \left[\frac{\infty}{\infty}\right]) \end{aligned}$$

5) Anwendung beim Typ "1^∞": $\lim f(x) = 1$, $\lim g(x) = \infty$: $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ geht mit vorigem Fall und Stetigkeit der Exponentialfunktion.

7.39 Beispiele: $\mathbf{1)}$ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} \ = \ 0.$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \ = \ \dfrac{1}{2}.$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x} = 1.$

4) $\lim\limits_{x \downarrow 0} x \ \ln x = 0.$

7.40 Krasse Funktion: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

f ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$: Für $x_0 \neq 0$: ✓

$x_0 = 0 : \lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^{1/x^2}} = 0 = f(0)$.

f ist differenzierbar: Es gilt $f'(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Ableitung im Punkt $x = 0$:

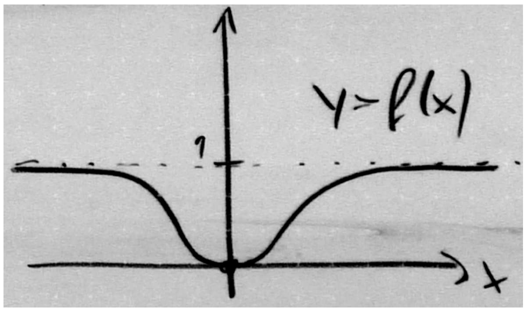
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2} \cdot (-\frac{2}{x^3})} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0.$$

Mit Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(0) = 0$.

Taylorentwicklung:

$$f(x) = 0 + R_n(0, x).$$

Diese Funktion ist um $x_0 = 0$ nicht durch das Taylorpolynom approximierbar.



7.8 Eigenschaften der Ableitungsfunktion

7.41 Satz: Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gebe zwei Punkte $x_1, x_1 \in]a, b[$ mit $x_1 < x_2$ und $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$. Dann

$$\exists \xi \in]x_1, x_2[: f'(\xi) = 0.$$

Beweis: Fall $f'(x_1) > 0 \ \wedge \ f'(x_2) < 0$:

f differenzierbar $\wedge$ $[x_1, x_2] \subseteq]a, b[\ \Rightarrow \ f$ stetig auf $[x_1, x_2]$.

$[x_1, x_2]$ kompakt $\overset{6.45}{\Rightarrow}$ $\exists \xi \in [x_1, x_2] : f(\xi) = \max\{f(x) : x \in [x_1, x_2]\}$.

Zeige $\xi \neq x_1 \ \wedge \ \xi \neq x_2$. Dann folgt $\xi \in]x_1, x_2[\overset{7.20}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$.

Annahme: $\xi = x_1$, also $f(x) \leq f(x_1)$ für $x \in [x_1, x_2]$. Dann

$$f'(x_1) = \lim_{x\to x_1+0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0 \ \lightning \ f'(x_1) > 0$$

Genauso: $\xi = x_2 \ \Rightarrow \ f'(x_2) \geq 0 \ \lightning \ f'(x_2) < 0$.

Fall $f'(x_1) < 0 \ \wedge \ f'(x_2) > 0$: Wähle $\xi \in [x_1, x_2]$ mit $f(\xi) = \min\{f(x) : x \in [x_1, x_2]\}$. Dann wie anderer Fall.

□

7.42 Satz von Darboux: Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gebe zwei Punkte $x_1, x_2 \in]a, b[$ mit $x_1 < x_2$ und $f'(x_1) > f'(x_2)$. Dann

$$\forall \lambda \in]f'(x_2), f'(x_1)[\ \exists \xi \in]x_1, x_2[: f'(\xi) = \lambda.$$

Beweis: Wende den letzten Satz auf $g(x) := f(x) - \lambda x$ an:

$$\left.\begin{array}{rcl} g'(x_1) &=& f'(x_1) - \lambda \;>\; 0 \\ g'(x_2) &=& f'(x_2) - \lambda \;<\; 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; \exists \xi \in\,]x_1, x_2[\, : 0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \lambda.$$

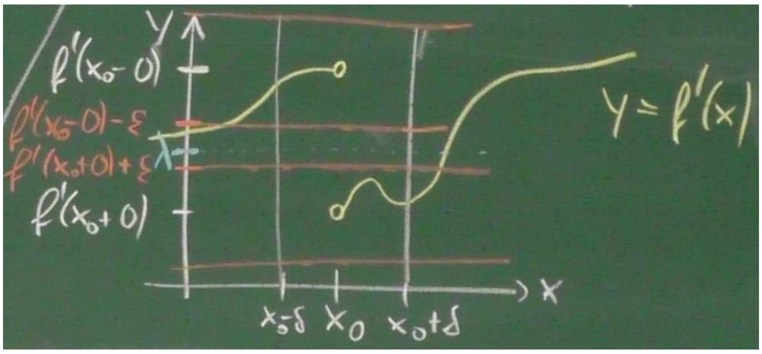
□

7.43 Satz: Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann besitzt $f' :]a, b[\to \mathbb{R}$ keine Unstetigkeitsstellen 1. Art (Sprungstellen).

Beweis: Annahme: $x_0 \in\,]a, b[$ sei Sprungstelle von f', d.h.

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(x_0 - 0) &=& \lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) \\ f'(x_0 + 0) &=& \lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) \end{array}\right\} \text{ existieren und } f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0).$$

O.B.d.A. $f'(x_0 - 0) > f'(x_0 + 0)$ (Sonst betrachte $-f$).



Setze $\varepsilon := \dfrac{1}{3}\big(f'(x_0 - 0) - f'(x_0 + 0)\big) > 0.$
$f'(x) \to f'(x_0 - 0)$ für $x \to x_0 - 0$

$$\Rightarrow\; \exists \delta > 0\; \forall x \in\,]x_0 - \delta, x_0[\, : \underbrace{|f'(x) - f'(x_0 - 0)| < \varepsilon}_{\Leftrightarrow\; -\varepsilon < f'(x) - f'(x_0 - 0) < \varepsilon \;\Rightarrow\; f'(x) > f'(x_0 - 0) - \varepsilon}$$

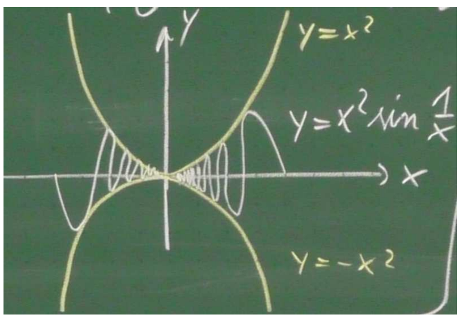
$f'(x) \to f'(x_0 + 0)$ für $x \to x_0 + 0$

$$\Rightarrow\; \exists \delta' > 0\; \forall x \in\,]x_0, x_0 + \delta'[\, : f'(x) < f'(x_0 + 0) + \varepsilon$$

Wähle $x_1 := x_0 - \dfrac{\delta}{2}, \quad x_2 := x_0 + \dfrac{\delta'}{2}, \;\; \lambda \in [f'(x_0 + 0) + \varepsilon, f'(x_0 - 0) - \varepsilon] \setminus \{f'(x_0)\} \neq \emptyset.$
$\Rightarrow\; \forall \xi \in\,]x_1, x_2[\, : f'(\xi) \neq \lambda$ ↯ Satz von Darboux.

□

7.44 Beispiel: $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$



$\Rightarrow\; f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
f' besitzt in $x_0 = 0$ eine Unstetigkeitsstelle 2. Art.

8 Reihen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

In diesem Kapitel steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Damit gilt $d(x,y) = |x-y|$ für $x, y \in \mathbb{K}$.

8.1 Grundlegendes

8.1 Erinnerung: Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{K}$.

1) Die (unendliche) **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet die Folge (s_n) der **Partialsummen** mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Die Folgenglieder a_k heißen **Summanden** der Reihe.

2) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **konvergent**, falls (s_n) konvergiert, sonst **divergent**.

3) Falls die Reihe konvergiert, schreibe
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

4) Eine relle Reihe (d.h. die Summanden sind reell) heißt **bestimmt divergent**, falls $s_n \to \infty$ oder $s_n \to -\infty$. Schreibe
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty.$$

5) Genauso $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit $k_0 \in \mathbb{Z}$.

8.2 Bemerkung: Jede Folge kann als Reihe dargestellt werden:
$$x_n = \underbrace{x_1}_{=:a_1} + \underbrace{x_2 - x_1}_{=:a_2} + \underbrace{x_3 - x_2}_{=:a_3} + \ldots + \underbrace{x_n - x_{n-1}}_{=:a_n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = (x_n).$$

8.3 Eigenschaften: 1) Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind auch $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda\, a_k$ konvergent mit
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda\, a_k = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

2) Cauchy-Kriterium: Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N_\varepsilon : \underbrace{\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right|}_{=|s_m - s_n|} < \varepsilon \, .$$

3) Sind (a_k) und (b_k) Folgen, die sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden, so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert. (Die Grenzwerte können verschieden sein.)

4) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, dann folgt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Die Umkehrung gilt nicht: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.
Nullfolge-Kriterium: $\neg(a_n \to 0) \;\Rightarrow\; \sum a_k$ ist divergent.

5) Ist $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{N}$, und sind die Partialsummen beschränkt, so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Beweis: 1) Folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \;=\; s_n + \tilde{s}_n \;\to\; \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k .$$

Genauso: $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda\, a_n \;=\; \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \;\to\; \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k.$

2) Folgt aus

$$\begin{aligned} (s_n) \text{ ist konvergent} \quad &\Rightarrow \quad (s_n) \text{ ist C-Folge} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall m, n > N_\varepsilon : |s_n - s_m| < \varepsilon, \\ (s_n) \text{ ist C-Folge} \quad &\overset{\mathbb{K} \text{ vollständig}}{\Rightarrow} \quad (s_n) \text{ ist konvergent} . \end{aligned}$$

3) $a_k = b_k$ für $k \geq K \;\Rightarrow\; \left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k \right| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} b_k \right|$ für $k \geq K \overset{2)}{\Rightarrow}$ Behauptung.

4) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, $\varepsilon > 0$

$$\overset{2)}{\Rightarrow} \; \forall m = n+1, n > N_\varepsilon : |a_{n+1}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k \right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; a_n \to 0.$$

Das Nullfolge-Kriterium ist die Kontraposition zur bewiesenen Aussage.

5) $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \;\Rightarrow\; (s_n)$ ist monoton wachsend
Nach Voraussetzung ist (s_n) beschränkt
$\Rightarrow\; (s_n)$ ist konvergent $\;\Leftrightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

$\square$

8.2 Absolute und bedingte Konvergenz

8.4 Leibniz-Kriterium: Sei (a_n) reelle, positive, monoton fallende Nullfolge, d.h.

$$\big(\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0 \ \wedge \ a_n \geq a_{n+1}\big) \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dann ist die **alternierende** Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \, a_k$ konvergent, und es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \, a_k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \, a_k \right| \ \leq \ a_{n+1}.$$

Beweis: Setze $s_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \, a_k$.

1) $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend: $s_{2(k+1)} - s_{2k} \ = \ a_{2k+2} - a_{2k+1} \ \leq \ 0.$

2) $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend: $s_{2(k+1)+1} - s_{2k+1} \ = \ -a_{2k+3} + a_{2k+2} \ \geq \ 0.$

3) Es gilt: $s_1 \ \leq \ s_{2k+1} \ = \ s_{2k} - a_{2k+1} \ \leq \ s_{2k} \ \leq \ s_2.$

$\Rightarrow$ $(s_{2k}), (s_{2k+1})$ sind monoton und beschränkt, also konvergent.
Wegen $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \to 0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} \ = \ \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} \ =: \ s.$$

$\Rightarrow$ (s_n) ist konvergent, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

4) Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} s_{2k-1} \leq s \leq s_{2k} \quad &\Rightarrow \quad |s - s_{2k-1}| = s - s_{2k-1} \leq s_{2k} - s_{2k-1} = a_{2k}, \\ s_{2k+1} \leq s \leq s_{2k} \quad &\Rightarrow \quad |s - s_{2k}| = s_{2k} - s \leq s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1}. \end{aligned}$$

□

8.5 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist konvergent (später: gegen $\ln 2$).

8.6 Definition: Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{K}$ heißt **absolut konvergent**, falls $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, heißt **bedingt konvergent**.

8.7 Beispiele: 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist bedingt konvergent.

2) Geometrische Reihe: Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ absolut konvergent, denn $\sum_{k=0}^{\infty} |q|^k$ ist konvergent.

8.8 Satz: In $\mathbb{K}$ ist jede absolut konvergente Reihe konvergent.

Beweis: Cauchy-Kriterium:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon \qquad \text{für } m, n > N_\varepsilon.$$

$\square$

8.9 Beispiel: Sei $s := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Wir sortieren die Reihe um zu

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \pm \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}}_{= \frac{2-1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)} \Big)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{s}{2}.$$

8.10 Definition: Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ **Umordnung** der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

8.11 Satz: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sei absolut konvergent, und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei bijektiv. Dann konvergiert die Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut und $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis: Sei $s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\varepsilon > 0$.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

φ bijektiv $\Rightarrow$ $\exists N \in \mathbb{N} : \{1, 2, \ldots, N_\varepsilon\} \subseteq \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(N)\}$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{N} \setminus \{\varphi(1), \ldots, \varphi(N)\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$

1) Für $m \geq n > N$ folgt

$$\sum_{k=n}^{m} |a_{\varphi(k)}| \;\leq\; \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist konvergent.

2) Für $n > N$ folgt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - s\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k - \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} a_k\right| \\ &\leq \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k\right|}_{\leq \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2} + \underbrace{\left|\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} a_k\right|}_{\leq \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s.$

□

8.12 Satz: Es sei (a_k) eine reelle Folge und

$$a_k^+ := \max\{0, a_k\} = \begin{cases} a_k & \text{falls } a_k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad a_k^- := -\min\{0, a_k\} = \begin{cases} -a_k & \text{falls } a_k \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gelten

1) $a_k = a_k^+ - a_k^-$, $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$, $a_k^+ = \frac{1}{2}\big(|a_k| + a_k\big)$, $a_k^- = \frac{1}{2}\big(|a_k| - a_k\big)$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ konvergent $\wedge \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergent.

3) Ist genau eine der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ divergent, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bestimmt divergent.

4) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty \wedge \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$.

Beweis: **1)** Mit Fallunterscheidung $a_k \geq 0$ bzw. $a_k < 0$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\big(|a_k| + a_k\big)}_{=a_k^+}$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\big(|a_k| - a_k\big)}_{=a_k^-}$ konvergent.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ konvergent $\wedge \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^+ + a_k^-)}_{=|a_k|}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^+ - a_k^-)}_{=a_k}$ konvergent.

3) Z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty \ \wedge \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergent. Dann $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ \to \infty \ \wedge \ s_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k^- \leq S$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k^+ - a_k^-) = s_n - s_n' \geq s_n - S \to \infty.$
Im anderen Fall: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty.$

4) Nur eine der beiden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ divergent $\overset{3)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\lightning$
Beide Reihen konvergent $\overset{2)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\lightning$
Also sind beide Reihen divergent $\overset{a_k^+, a_k^- \geq 0}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$ $\square$

8.13 Riemannscher Umordnungsatz: Sei (a_n) reelle Folge und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent. Dann existiert zu jedem $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ eine Umordnung der Reihe mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s$.

Beweisidee: Addiere so lange positive Folgengleider, bis Summe $> s$, addiere so lange negative Glieder, bis Summe $< s$, ...

Beweis: Sei (a_{n_k}) die Teilfolge aller nicht negativen Glieder von (a_n) und (a_{m_k}) die Teilfolge aller negativen Glieder.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + = \infty \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} = -\infty.$$

Sei $s \in \mathbb{R}$. Die Abbildung φ wird rekursiv konstruiert.

Schritt 1: Wähle $K_1 \in \mathbb{N}$, so dass $O_1 := \sum_{k=1}^{K_1} a_{n_k} > s$.

Schritt 2: Wähle $L_1 \in \mathbb{N}$, so dass $U_1 := O_1 + \sum_{k=1}^{L_1} a_{m_k} < s \leq O_1 + \sum_{k=1}^{L_1 - 1} a_{m_k}$.

Schritt 3: Wähle $K_2 \geq K_1 + 1$, so dass $O_2 := U_1 + \sum_{k=K_1+1}^{K_2} a_{n_k} > s \geq U_1 + \sum_{k=K_1+1}^{K_2-1} a_{n_k}$.

Schritt 4: Wähle $L_2 \geq L_1 + 1$, so dass $U_2 := O_2 + \sum_{k=L_1+1}^{L_2} a_{m_k} < s \leq O_2 + \sum_{k=L_1+1}^{L_2-1} a_{m_k}$.

usw.

Definiere

$$\varphi(k) := \begin{cases} n_k & \text{für } 1 \le k \le K_1 \\ m_{k-K_1} & \text{für } K_1+1 \le k \le K_1+L_1 \\ n_{k-L_1} & \text{für } K_1+L_1+1 \le k \le L_1+K_2 \\ m_{k-K_2} & \text{für } L_1+K_2+1 \le k \le K_2+L_2 \\ \vdots & \end{cases}$$

Nach Konstruktion gelten:

- $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bijektiv.
- $0 < O_j - s \le a_{n_{K_j}} \to 0 \;\Rightarrow\; O_j \to s$,
- $0 > U_j - s \ge a_{m_{L_j}} \to 0 \;\Rightarrow\; U_j \to s$,
- $$\left.\begin{array}{ll} U_j \le \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \le O_{j+1} & \text{für } L_j + K_j + 1 \le n \le L_j + K_{j+1} \\ U_{j+1} \le \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \le O_{j+1} & \text{für } L_j + K_{j+1} + 1 \le n \le L_{j+1} + k_{j+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s.$$

□

8.3 Kriterien für absolute Konvergenz

8.14 Vergleichskriterium: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$, (b_n) in $\mathbb{R}$.

1) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N : |a_n| \le b_n \ \wedge\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N : |a_n| \ge b_n \ge 0 \ \wedge\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist divergent.

Beweis: 1) Cauchy-Kriterium:

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \;\le\; \sum_{k=n+1}^{m} b_k \;<\; \varepsilon \qquad \text{für } m, n > \max\{N_\varepsilon, N\}.$$

2) Annahme: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\overset{1)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent. $\lightning$

□

8.15 Erinnerung: 1) Sei (a_n) beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.

a) Die Menge der Verdichtungspunkte: $V(a_n) := \{v \in \mathbb{R} \mid \exists (a_{n_k}) : a_{n_k} \to v\}$.

b) Limes superior: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \max V(a_n)$.

c) Limes inferior: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \min V(a_n)$.

d) Für jede beschränkte Folge (a_n) gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon : \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon < a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$$

2) Falls (a_n) eine Teilfolge (a_{n_k}) besitzt mit $a_{n_k} \to \infty$: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \infty$.
Falls (a_n) eine Teilfolge (a_{n_k}) besitzt mit $a_{n_k} \to -\infty$: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := -\infty$.

8.16 Wurzelkriterium: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$ und $a := \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

1) $a < 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) $a > 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent.

8.17 Bemerkung: Im Fall $a = 1$ kann alles passieren:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konvergiert für $s > 1$, divergiert für $s \le 1$, und $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{k^s}\right|^{1/n} = 1$ für jedes $s \in \mathbb{R}$.

Beweis: **1)** Wähle $b \in\,]a, 1[$.

$$\left.\begin{array}{l} b > \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \;\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : |a_n|^{1/n} < b \\ \quad \Rightarrow\; \forall n > N : |a_n| < b^n. \\ \quad 0 < b < 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} b^k \text{ konvergiert} \end{array}\right\} \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ absolut konvergent.}$$

2) Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $|a_{n_k}|^{1/n_k} \to a$ (auch im Fall $a = \infty$).

$$\begin{array}{lll} a > 1 & \Rightarrow & \exists K \in \mathbb{N} \; \forall k > K : |a_{n_k}|^{1/n_k} > 1 \\ & \Rightarrow & \forall k > K : |a_{n_k}| > 1 \\ & \Rightarrow & \neg(a_{n_k} \to 0) \\ & \Rightarrow & \neg(a_n \to 0) \\ & \overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Rightarrow} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert.} \end{array}$$

$\square$

8.18 Quotientenkriterium: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$.

1) $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent.

Beweis: 1) Wähle $b \in \left]\limsup_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, 1\right[$.

$$\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall n > N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < b$$

$$\Rightarrow\; |a_{N+2}| < b|a_{N+1}|,\; |a_{N+3}| < b|a_{N+2}| < b^2|a_{N+1}|,\; \ldots,\; |a_{N+k}| < b^{k-1}|a_{N+1}|$$

$$\Rightarrow\; \forall k \geq 2 : |a_{N+k}| < b^{N+k} \underbrace{\frac{|a_{N+1}|}{b^{N+1}}}_{=:c}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} c\, b^k$ ist konvergent $\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) $1 < \liminf_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \;\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall n > N : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$

$\Rightarrow\quad |a_{N+1}| < |a_{N+2}| < |a_{N+3}| < \ldots$

$\Rightarrow\quad \neg(a_n \to 0)$

$\overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Rightarrow}\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.

$\square$

8.19 Beispiele: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{4^n}$ konvergiert absolut.

Wurzelkriterium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{1/n}}{4} = \dfrac{1}{4} \lim_{n\to\infty} (n^{1/n}) = \dfrac{1}{4} < 1.$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ ist absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| \geq 1$.

Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|n^2 z^n|} = \sqrt[n]{n^2}\,|z| = \left(n^{1/n}\right)^2 |z| \to |z| \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{absolute Konvergenz für } |z| < 1 \\ \text{Divergenz für } |z| > 1 \end{cases}$$

Für $|z| = 1$: $|n^2 z^n| = n^2 \to \infty \;\Rightarrow\; \neg(n^2 z^n \to 0) \;\Rightarrow\; \sum n^2 z^n$ ist divergent.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

Quotientenkriterium: $\left| \dfrac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = |z| \frac{1}{n+1} \to 0 < 1 \;\Rightarrow\;$ absolute Konvergenz..

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2 + (-1)^n)^n}{4^n}$ ist absolut konvergent:

$$\text{Wurzelkriterium: } \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{4^n}} = \dfrac{3}{4} & \text{für gerades } n, \\ \sqrt[n]{\dfrac{1^n}{4^n}} = \dfrac{1}{4} & \text{für ungerades } n. \end{cases} \;\Rightarrow\; \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{3}{4} < 1$$

$\Rightarrow$ absolute Konv.

Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \dfrac{1}{4\cdot 3^{n+1}} & \text{für gerades } n \\ \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \dfrac{3^n}{4} & \text{für ungerades } n \end{cases}$

$\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty,\ \liminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$

Mit dem Quotientenkriterium ist keine Aussage möglich!

8.20 Wurzelkriterium ist schärfer: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$ mit $\forall n\in\mathbb{N} : a_n \neq 0$. Dann

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ \le\ \liminf_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \ \le\ \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \ \le\ \limsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

D.h.: Ist $\sum a_k$ nach Quotientenkriterium konvergent, dann liefert auch das Wurzelkriterium Konvergenz.

Beweis: Sei $l := \limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n > N : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < l+\varepsilon$

$\Rightarrow\ |a_{N+2}| < (l+\varepsilon)|a_{N+1}|,\ |a_{N+3}| < (l+\varepsilon)|a_{N+2}| < (l+\varepsilon)^2|a_{N+1}|, \ldots$

$\Rightarrow\ |a_{N+k}| < (l+\varepsilon)^{k-1}|a_{N+1}| = (l+\varepsilon)^{N+k}\underbrace{\dfrac{|a_{N+1}|}{(1+\varepsilon)^{N+1}}}_{=:c>0}$

$\Rightarrow\ |a_{N+k}|^{1/(N+k)} < (l+\varepsilon)\,c^{1/(N+k)}$

$\Rightarrow\ \forall n > N+2 : |a_n|^{1/n} < (l+\varepsilon)\,c^{1/n} \overset{n\to\infty}{\to} (l+\varepsilon)$

$\underset{(*)}{\Rightarrow}\ \limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \le l+\varepsilon.$

Zu $(*)$: Wähle Teilfolge mit $|a_{n_k}|^{1/n_k} \to \limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}$.

$|a_{n_k}|^{1/n_k} < (l+\varepsilon)\,c^{1/n_k}\ \Rightarrow\ \limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_k}|^{1/n_k} \le \lim\limits_{k\to\infty}(l+\varepsilon)\,c^{1/n_k} = l+\varepsilon.$

Also bewiesen: $\forall\varepsilon>0 : \limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \le l+\varepsilon$.

$\Rightarrow\ \limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \le l.$

Genauso $\liminf\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \ge \liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. □

8.21 Kriterium von Kummer: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$, $\forall n\in\mathbb{N} : a_n\neq 0$, (b_n) Folge in $\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N} : b_n > 0$, und sei

$$D_n \ :=\ b_n\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - b_{n+1}.$$

1) $\liminf\limits_{n\to\infty} D_n > 0\ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

2) $\big(\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : D_n \leq 0\big) \ \wedge\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ divergiert $\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist divergent.

Beweis: **1)** Wähle $d \in \ ]0, \liminf_{n\to\infty} D_n[\ \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : D_n > d.$

$\Rightarrow\ \forall n > N : b_n|a_n| - b_{n+1}|a_{n+1}| = D_n\,|a_{n+1}| > d|a_{n+1}| > 0 \qquad (*)$

Insbesondere $\forall n > N : b_n|a_n| > b_{n+1}|a_{n+1}|$, d.h. $(b_n|a_n|)$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt durch 0, also konvergent

$$\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \big(b_k|a_k| - b_{k+1}|a_{k+1}|\big) \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} b_1|a_1| - b_{n+1}|a_{n+1}| \ \to\ b_1|a_1| - \lim_{n\to\infty} b_n|a_n|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \big(b_k|a_k| - b_{k+1}|a_{k+1}|\big) \text{ ist konvergent.} \\ (*)\ \Rightarrow\ |a_{n+1}| < \frac{1}{d}\big(b_n|a_n| - b_{n+1}|a_{n+1}|\big) \end{array}\right\} \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ ist konvergent.}$$

2) Sei $n > N$.

$D_n \leq 0\ \Rightarrow\ b_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - b_{n+1} \leq 0\ \Rightarrow\ b_n|a_{n+1}| \leq b_{n+1}|a_{n+1}|$

$\Rightarrow\ b_{n+1}|a_{n+1}| \geq b_n|a_n| \geq b_{n-1}|a_{n-1}| \ldots \geq b_{N+1}|a_{N+1}|$

$\Rightarrow\ \forall n > N : b_n|a_n| \geq b_{N+1}|a_{N+1}| =: c$ (c konstant bezüglich n)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow\ \forall n > N : |a_n| \geq \frac{c}{b_n} > 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} \text{ div.} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{b_k} \text{ div.} \end{array}\right\} \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ ist divergent.}$$

$\square$

8.22 Kriterium von Raabe: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$, und sei

$$D_n \ := \ n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right).$$

1) $\liminf_{n\to\infty} D_n > 1\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

2) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : D_n \leq 1\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist divergent.

Beweis: Wende Kummer an mit $b_n := n$. Beachte

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) = 1\ \Leftrightarrow\ \underbrace{n}_{=b_n}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - \underbrace{(n+1)}_{b_{n+1}} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

$\square$

8.4 Reihen mit positiven Summanden

8.23 Verdichtungskriterium von Cauchy: Sei (a_n) monoton fallende Folge positiver Zahlen. Dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k\, a_{2^k} \text{ konvergent.}$$

Beweis in Übungen

8.24 Satz: Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit

$$\Big(\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n, b_n > 0\Big) \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \ > \ 0.$$

Dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent.}$$

Beweis: Sei $l := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

Vorüberlegung: $0 < \dfrac{l}{2} < l < 2l \ \Rightarrow\ \exists N' \in \mathbb{N}\ \forall n > N' : \dfrac{l}{2} < \dfrac{a_n}{b_n} < 2l$

$\Rightarrow\ \forall n > \max\{N, N'\} : 0 < a_n < 2l\, b_n \ \wedge\ 0 < b_n < \dfrac{2}{l}\, a_n.$

"$\Rightarrow$": $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l}\, a_k$ konvergent $\underset{|b_n|=b_n<\frac{2}{l}\,a_n}{\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent.

"$\Leftarrow$": $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2lb_k$ konvergent $\underset{|a_n|=a_n<2lb_n}{\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

$\square$

8.25 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^3-4k^2-8}{k^4+3k^3+10}\right)^s$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^s$ konvergent $\Leftrightarrow$ $s > 1$.

8.5 Das Produkt von Reihen

8.26 Vorüberlegung: Zur Berechnung des Produkts der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ müssen alle Produkte

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0\, b_0 & a_0\, b_1 & a_0\, b_2 & a_0\, b_3 & a_0\, b_4 & a_0\, b_5 & \dots \\
a_1\, b_0 & a_1\, b_1 & a_1\, b_2 & a_1\, b_3 & a_1\, b_4 & a_1\, b_5 & \dots \\
a_2\, b_0 & a_2\, b_1 & a_2\, b_2 & a_2\, b_3 & a_2\, b_4 & a_2\, b_5 & \dots \\
a_3\, b_0 & a_3\, b_1 & a_3\, b_2 & a_3\, b_3 & a_3\, b_4 & a_3\, b_5 & \dots \\
a_4\, b_0 & a_4\, b_1 & a_4\, b_2 & a_4\, b_3 & a_4\, b_4 & a_4\, b_5 & \dots \\
a_5\, b_0 & a_5\, b_1 & a_5\, b_2 & a_5\, b_3 & a_5\, b_4 & a_5\, b_5 & \dots \\
\vdots & \vdots & & & & &
\end{array}$$

summiert werden.

8.27 Definition: Die Reihe

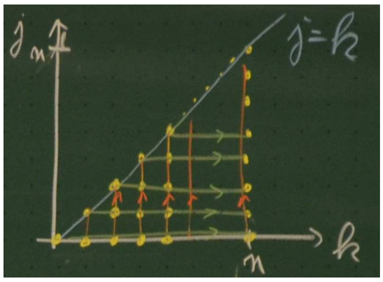
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}\, b_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j} \right)$$

heißt **Cauchy-Produkt** der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

8.28 Satz (Mertens): $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent. Dann konvergiert das Cauchy-Produkt, und für die Grenzwerte gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_k\, b_{k-j} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Beweis: Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} b_k,\ s := \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Damit



$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k\, b_{k-j} \quad &= \quad \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_j\, b_{k-j} \\
&\overset{l:=k-j}{=} \sum_{j=0}^{n} a_j \underbrace{\sum_{l=0}^{n-j} b_l}_{=s_{n-j}} \\
&= \quad \sum_{j=0}^{n} a_j\,(s_{n-j}-s) + s\sum_{j=0}^{n} a_j \\
&\underset{j=n-k}{\overset{k:=n-j}{=}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\,(s_k - s)}_{\overset{\text{zu zeigen}}{\to} 0} + \underbrace{s\sum_{j=0}^{n} a_j}_{\to s\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)}
\end{aligned}
$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall k > N : |s_k - s| < \dfrac{\varepsilon}{2\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|}$. Für $n > N$ folgt

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\,(s_k - s)\right| \quad &\le \quad \sum_{k=0}^{N} |a_{n-k}| \underbrace{|s_k - s|}_{\le \max\{|s_j - s| : 1 \le j \le N\}} + \sum_{k=N+1}^{n} |a_{n-k}| \underbrace{|s_k - s|}_{\le \varepsilon/2\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|} \\
&< \quad \max_{1\le j\le N} |s_j - s| \sum_{k=0}^{N} |a_{n-k}| + \frac{\varepsilon}{2\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|} \sum_{k=N+1}^{n} |a_{n-k}| \\
&\underset{k=n-l}{\overset{l:=n-k}{<}} \max_{1\le j\le N} |s_j - s| \sum_{l=n-N}^{n} |a_l| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

Wähle $N' \in \mathbb{N}$, so dass

$$
\forall n > N' : \sum_{l=n}^{\infty} |a_l| \ < \ \frac{\varepsilon}{2\max_{1\le j\le N} |s_j - s|}.
$$

Für $n > N + N'$ gilt dann $n - N > N'$ und

$$
\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\,(s_k - s)\right| \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon.
$$

$\square$

8.29 Satz: Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, so ist das Cauchy-Produkt der beiden Reihen absolut konvergent.

Beweis: $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|,\ \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ absolut konvergent $\overset{\text{letzter Satz}}{\Rightarrow}$ $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} |a_k|\,|b_{k-j}|$ konvergent.

$\square$

8.30 Beispiele: 1) Die komplexe Exponentialfunktion:

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Wir wissen: **a)** Reihe konvergiert absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$ (siehe 8.19).

b) Für $z \in \mathbb{R}$ ist e^z gleich dem Reihengrenzwert (siehe 7.34).

Für $z, w \in \mathbb{C}$ folgt aus dem letzten Satz:

$$\begin{aligned}
e^z \cdot e^w &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{j!\,(k-j)!}}_{=\binom{k}{j}} z^j\, w^{k-j} \\
&\overset{\text{Binom. Satz}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z+w)^k \\
&= e^{z+w}
\end{aligned}$$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ ist bedingt konvergent.

Cauchy-Produkt mit sich selber:

$$c_k := \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}} \frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k-j+1}} = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{j+1}\,\sqrt{k-j+1}}.$$

Die Produktreihe $\sum c_k$ ist divergent:

$$c_{3n} \geq \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{j+1}\,\sqrt{3n-j+1}} \geq \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\,\sqrt{2n+1}} = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \neg(c_n \to 0)$

$\Rightarrow \sum c_n$ ist divergent.

9 Folgen und Reihen von Funktionen

9.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

9.1 Prinzip der Gleichmäßigkeit: Sei P Menge. Eine Aussageform $H(p)$ ist gleichmäßig erfüllt bezüglich $p \in P$, falls:

1) $\forall p \in P : H(p)$,

2) Die Konstanten in $H(p)$ hängen nicht von $p \in P$ ab.

9.2 Beispiel: Seien M_1, M_2 metrische Räume, $f : M_1 \supseteq D(f) \to M_2$.
f heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \underset{\uparrow\, \delta_\varepsilon \text{ hängt nicht von } x \text{ ab}}{\exists \delta_\varepsilon} > 0 \; \forall x \in D(f) \; \forall x' \in D(f) : d_1(x, x') < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; d_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

f heißt stetig, wenn

$$\forall x \in D(f) \; \forall \varepsilon > 0 \; \underset{\uparrow\, \delta_\varepsilon \text{ kann von } x \text{ abhängen}}{\exists \delta_\varepsilon} > 0 \; \forall x' \in D(f) : d_1(x, x') < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; d_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

Im Kontext von 9.1 entspricht dies: $P = M$, $p = x$ und

$$H(x) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x' \in D(f) : d_1(x, x') < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; d_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

Die Eigenschaft $H(x)$ ist für alle $x \in M$ erfüllt. Bei der gleichmäßigen Konvergenz hängt δ_ε nicht von x ab.

9.3 Definition: Sei (M, d) metrischer Raum, $a : \mathbb{N} \times P \to M$ eine Folge in M, die von $p \in P$ abhängt: $\big(a_n(p)\big)_{n \in \mathbb{N}}$, und $u : P \to M$.

1) $\big(a_n(p)\big)$ heißt **punktweise konvergent** gegen $u(p)$, falls

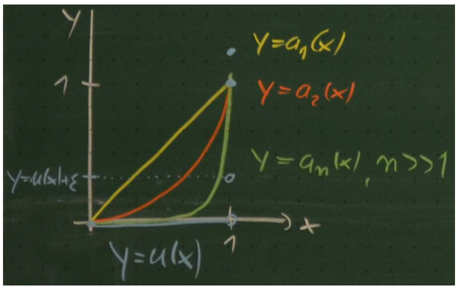
$$\forall p \in P \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_{\varepsilon,p} \in \mathbb{N} \; \forall n > N_{\varepsilon,p} : d\big(a_n(p), u(p)\big) < \varepsilon.$$

2) $\big(a_n(p)\big)$ heißt **auf *P* gleichmäßig konvergent** gegen $u(p)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon \; \forall p \in P : d\big(a_n(p), u(p)\big) < \varepsilon.$$

9.4 Beispiel: $a_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$:

$$a_n(x) \to a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1[\,, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases} \quad \text{punktweise.}$$



Kann $\big(a_n(x)\big)$ gleichmäßig konvergieren?

Falls $a_n(x) \to v(x)$ gleichmäßig, dann auch punktweise $\Rightarrow$ $v(x) = u(x)$

$\big(a_n(x)\big)$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen $u(x)$, denn sei $\varepsilon > 0$ und $x < 1$:

$$|a_n(x) - u(x)| < \varepsilon \overset{x<1}{\Leftrightarrow} \underbrace{|x^n - 0|}_{\to 1 \text{ für } x \to 1-0} \lightning < \varepsilon.$$

Aber $a_n(x) \to u(x)$ gleichmäßig auf $[0, \frac{1}{2}]$, denn

$$|a_n(x) - u(x)| < \varepsilon \overset{x \leq 1/2}{\Leftrightarrow} |x^n| < \varepsilon \Leftarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \text{ für } n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}.$$

9.5 Satz: Sei (M,d) metrischer Raum, $a : \mathbb{N} \times P \to M$, $u : P \to M$. Dann

$$a_n(p) \to u(p) \text{ für } n \to \infty \text{ gleichmäßig bezüglich } p \in P \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{p \in P} d\big(a_n(p), u(p)\big) \right) = 0.$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_{\varepsilon/2}\ \forall n > N_{\varepsilon/2}\ \underbrace{\forall p \in P : d\big(a_n(p), u(p)\big) < \frac{\varepsilon}{2}}_{\Rightarrow \sup_{p\in P} d\left(a_n(p), u(p)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon}$

"$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon : \underbrace{\sup_{p \in P} d\big(a_n(p), u(p)\big) < \varepsilon}_{\Rightarrow \forall p \in P : d\left(a_n(p), u(p)\right) < \varepsilon}$

$\square$

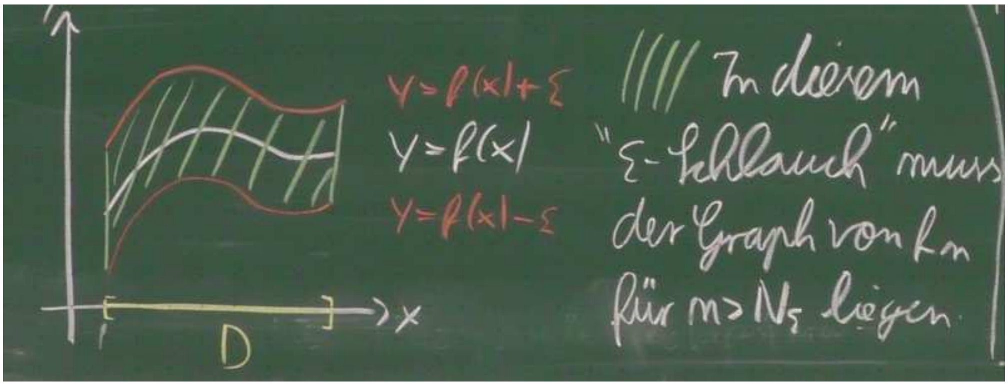
9.6 Zum Beispiel 9.4:

$\sup_{x\in[0,1]} \big|a_n(x) - u(x)\big| \geq \sup_{x \in [0,1[} |x^n| = 1 \quad \Rightarrow$ keine gleichmäßige Konvergenz auf $[0,1]$.

$\sup_{x\in[0,1/2]} \big|a_n(x) - u(x)\big| = \sup_{x\in[0,1/2]} |x^n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz auf $[0, \frac{1}{2}]$.

9.7 Veranschaulichung: Seien $f, f_n : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$:

$$f_n(x) \to f(x) \text{ gleichmäßig auf } D \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon \; \forall x \in D : \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$$



9.8 Bemerkung: Direkt aus der Definition folgt:

$$a_n(p) \to u(p) \text{ gleichmäßig auf } P \;\Rightarrow\; a_n(p) \to u(p) \text{ punktweise für } p \in P$$

9.9 Stetigkeit der Metrik: Sei M metrischer Raum, $a_n \to a$ und $b_n \to b$ in M. Dann

$$d(a,b) \;=\; \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\big|d(a_n,b_n) - d(a,b)\big| &\overset{\triangle\text{-Ungl. in } \mathbb{R}}{\leq} \big|d(a_n,b_n) - d(b_n,a)\big| + \big|d(b_n,a) - d(a,b)\big| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl. nach unten für } d}{\leq} d(a_n,a) + d(b_n,a) \\
&\to 0
\end{aligned}$$

□

9.10 Kriterium von Cauchy: Sei (M,d) vollständiger metrischer Raum, $a : \mathbb{N} \times P \to M$. Dann sind äquivalent:

(i) $\big(a_n(p)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent auf P,

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall m, n > N_\varepsilon \; \forall p \in P : d\big(a_n(p), a_m(p)\big) < \varepsilon$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $u : P \to M$ die Grenzfunktion und $\varepsilon > 0$.

(i) $\Rightarrow \; \exists N_\varepsilon \; \forall n > N_\varepsilon \; \forall p \in P : d\big(a_n(p), u(p)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \; \forall m, n > N_\varepsilon \; \forall p \in P : d\big(a_m(p), a_n(p)\big) \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} d\big(a_m(p), u(p)\big) + d\big(u, a_n(p)\big) < \varepsilon.$

"$\Leftarrow$": Sei zunächst $p \in P$ fest gewählt.

(ii) $\Rightarrow$ $\big(a_n(p)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in M $\overset{M \text{ vollständig}}{\Rightarrow}$ konvergent.

Setze $u(p) := \lim\limits_{n\to\infty} a_n(p)$ für $p \in P$.

Nun sei $p \in P$ variabel.

Sei $\varepsilon > 0 \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m,n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : d\big(a_n(p), \underbrace{a_m(p)}_{\to u(p) \text{ für } m\to\infty}\big) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\Rightarrow\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : d\big(a_n(p), u(p)\big) \overset{9.9}{=} \lim\limits_{m\to\infty} d\big(a_n(p), a_m(p)\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$ □

9.11 Definition: Sei $a : \mathbb{N} \times P \to \mathbb{K}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, die von $p \in P$ abhängt.
Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(p)$ heißt **punktweise/gleichmäßig konvergent auf P**, falls die Teilsummenfolge $\big(s_n(p)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise/gleichmäßig auf P konvergiert ($s_n(p) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(p)$).

9.12 Kriterium von Cauchy: Sei $a : \mathbb{N} \times P \to \mathbb{K}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, die von $p \in P$ abhängt. Dann sind äquivalent:

(i) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(p)$ ist gleichmäßig konvergent auf P.

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon > 0\ \forall m,n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : \left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k(p)\right| < \varepsilon.$

Beweis: $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k(p)\right| = \big|s_m(p) - s_{n-1}(p)\big| = d\big(s_m(p), s_{n-1}(p)\big)$. Anwendung von 9.10 (beachte: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind vollständig. □

9.13 Majorantenkriterium von Weierstraß: Seien $a : \mathbb{N} \times P \to \mathbb{K}$ und (b_n) Folgen in $\mathbb{K}$. Gilt

$$\Big(\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall p \in P : \big|a_n(p)\big| \leq b_n\Big) \ \wedge\ \sum_{k=0}^{\infty} b_n \text{ konvergent,}$$

so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(p)$ gleichmäßig konvergent auf P. Die Folge (b_n) heißt **Majorante** für $\big(a_n(p)\big)$.

Beweis: $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k(p)\right| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} \big|a_k(p)\big| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon$ für $m,n > N_\varepsilon$ und $m,n > N$. Dann 9.12. □

9.14 Beispiel: Betrachte $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$. Für jedes feste $q \in]0,1[$ gilt

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-q,q] : |x^n| \le q^n\Big) \ \wedge\ \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ konvergiert.}$$

Also ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ auf $[-q,q]$ gleichmäßig konvergent (gegen $\frac{1}{1-x}$).

Genauso folgt: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sin(kx)\, x^k$ ist gleichmäßig konvergent auf $[-q,q]$.

9.2 Vertauschen von Grenzwerten

9.15 Beispiel: Doppelfolgen:

$$a_{n,p} = \frac{n}{1+n\cdot p}: \left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{n\to\infty} a_{n,p} &=& \frac{1}{p} \\ \lim\limits_{p\to\infty} a_{n,p} &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{p\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} a_{n,p}\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{p\to\infty} a_{n,p}\big)$$

$$a_{n,p} = \frac{n}{1+n+p}: \left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{n\to\infty} a_{n,p} &=& 1 \\ \lim\limits_{p\to\infty} a_{n,p} &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{p\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} a_{n,p}\big) \ne \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{p\to\infty} a_{n,p}\big)$$

9.16 Satz: Sei M vollständiger metrischer Raum, $a : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to M$, $u, v : \mathbb{N} \to M$ und

$$\begin{array}{lll} a_{n,p} \to u_p & \text{für } n \to \infty \text{ gleichmäßig bezüglich } p \in \mathbb{N}, & (*) \\ a_{n,p} \to v_n & \text{für } p \to \infty \text{ punktweise für } n \in \mathbb{N}. & (**) \end{array}$$

Dann konvergieren (u_p) für $p \to \infty$, (v_n) für $n \to \infty$, und es gilt

$$\lim_{p\to\infty} u_p = \lim_{n\to\infty} v_n \quad \text{bzw.} \quad \lim_{p\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} a_{n,p}\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{p\to\infty} a_{n,p}\big). \qquad (***)$$

Beweis: **1)** Zeige: (u_p) ist Cauchy-Folge. $\Big(\overset{M \text{ vollständig}}{\Rightarrow} (u_p)$ konvergent.$\Big)$

Es gilt:

$$d(u_p,u_q) \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\le} d(u_p,a_{n,p}) + d(a_{n,p},a_{n,q}) + d(a_{n,q},u_q).$$

Sei $\varepsilon > 0$.

$(*)$ $\Rightarrow$ $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall p \in P : d(a_{N,p},u_p) < \frac{\varepsilon}{4}$.

$(**)$ $\Rightarrow$ $(a_{N,p})_{p\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge $\Rightarrow$ $\exists P_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall p,q > P_\varepsilon : d(a_{N,p},a_{N,q}) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ $\forall p > P : d(u_p,u_q) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$.

2) Sei $u := \lim\limits_{p\to\infty} u_p$, $\varepsilon > 0$. Zeige: $v_n \to u$.

$(*)$ $\Rightarrow$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : d(a_{n,p},u_p) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\overset{9.9}{\Rightarrow}$ $\forall n > N_\varepsilon : d(v_n,u) = \lim\limits_{p\to\infty} d(a_{n,p},u_p) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ $\square$

9.17 Satz: Sei M metrischer Raum, $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M$, $u, v : \mathbb{N} \to M$, und es gelten $(*)$, $(**)$ und

$$(u_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert } \;\vee\; (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert.}$$

Dann folgt $(***)$.

Beweis: 1) Es sei (u_p) konvergent. Dann beweist Teil 2) des vorigen Beweises die Gültigkeit von $(***)$.

2) Sei (v_n) konvergent, $v := \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$d(u_p, v) \leq d(u_p, a_{n,p}) + d(a_{n,p}, v_n) + d(v_n, v).$$

$$(*) \;\wedge\; v_n \to v \;\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall p \in P : d(u_p, a_{N,p}) < \frac{\varepsilon}{3} \;\wedge\; d(v_N, v) < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$(**) \;\Rightarrow\; \exists P_\varepsilon \in \mathbb{N}\; \forall p > P_\varepsilon : d(a_{N,p}, v_N) < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\Rightarrow\; \forall p > P_\varepsilon : d(u_p, v) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

9.18 Satz: M_1, M_2 metrische Räume, M_2 vollständig, $f_n : M_1 \supseteq D \to M_2$, $\xi \in H(D)$. Gilt

1) $f_n(x) \to \varphi(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf D und

2) $\forall n \in \mathbb{N} : \lim\limits_{x\to\xi} f_n(x) = a_n$ existiert,

so existeren die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x)$, und es gilt

$$\lim_{x\to\xi} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to\xi} \big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\lim_{x\to\xi} f_n(x)\big)$$

Beweis: Sei (x_p) in D mit $x_p \to \xi$, $x_p \neq \xi$.
Zeige: $\lim\limits_{p\to\infty} \varphi(x_p)$ existiert und ist unabhängig von (x_p).
Setze $c_{n,p} := f_n(x_p)$. Dann
1) $\Rightarrow$ $c_{n,p} \to \underbrace{\varphi(x_p)}_{\hat{=} u_p}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig bezüglich $p \in \mathbb{N}$.
2) $\Rightarrow$ $c_{n,p} \to \underbrace{a_n}_{\hat{=} v_n}$ für $p \to \infty$ punktweise für $n \in \mathbb{N}$.
9.16 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{p\to\infty} \varphi(x_p) = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}_{\text{unabhängig von } (x_p)}$.
Da die Folge (x_p) beliebig war, folgt $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

□

9.3 Eigenschaften der Grenzfunktion

9.19 Satz: Seien M_1, M_2 metrische Räume, $f_n : M_1 \supseteq D \to M_2$ stetig und $f_n(x) \to \varphi(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf D. Dann ist $\varphi : D \to M_2$ stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in D$. Zeige $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \overset{6.57}{\Rightarrow} \varphi$ stetig in x_0.
Sei (x_p) in D mit $x_p \to x_0$, $x_p \neq x_0$. Setze $c_{n,p} := f_n(x_p)$. Dann

- $f_n(x) \to \varphi(x)$ gleichmäßig auf $D \;\Rightarrow\; c_{n,p} \to \varphi(x_p)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig bezüglich $p \in \mathbb{N}$,
- $\forall n : f_n$ stetig $\;\Rightarrow\; c_{n,p} \to f_n(x_0)$ für $p \to \infty$ punktweise für $n \in \mathbb{N}$.
- $f_n(x_0) \to \varphi(x_0)$ für $n \to \infty$.

9.17 $\Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty} \varphi(x_p) = \lim\limits_{p\to\infty} \big(\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,p}\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \big(\lim\limits_{p\to\infty} c_{n,p}\big) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \varphi(x_0)$.
$\overset{(x_p)\text{ beliebig}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$. □

9.20 Satz: Seien $f_n : \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$ stetig und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent auf D. Dann ist $f(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_n(x)$ stetig auf D.

Beweis: $\forall n \in \mathbb{N} : s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ ist stetig (endliche Summe stetiger Funktionen).
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent $\;\Leftrightarrow\; \big(s_n(x)\big)$ gleichmäßig konvergent
9.19 $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ ist stetig. □

9.21 Beispiel: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \mathrm{e}^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist stetig:
Letzter Satz ist nicht direkt anwendbar, da die Reihe auf $\mathbb{C}$ nicht gleichmäßig konvergiert: Für $z = R > 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k!} \right| \overset{z=R}{\geq} \frac{R^n}{n!} \;\to\; \infty \text{ für } R \to \infty.$$

Betrachte $f\big|_{B_R(0)}$ für festes $R > 0$. Dann

- $\forall z \in B_R(0) : \left| \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{R^k}{k!}$,

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$ ist konvergent $(= \mathrm{e}^R)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Weierstraß} \ \Rightarrow \ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \text{ ist gleichmäßig konvergent auf } B_R(0). \\ \forall n \in \mathbb{N} : z \mapsto \dfrac{z^k}{k!} \text{ ist stetig.} \end{array}\right\} \overset{9.20}{\Rightarrow} \ f \text{ ist stetig auf } B_R(0).$$

Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$. Wähle $R > |z_0|$. $\Rightarrow$ $f\big|_{B_R(0)}$ ist stetig in z_0.
z_0 innerer Punkt von $B_R(0)$ $\Rightarrow$ f stetig in z_0.
$\Rightarrow$ $z \mapsto \mathrm{e}^z f$ ist stetig auf $\mathbb{C}$.

9.22 Satz: Sei $f_n : \,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f_n'(x) \to g(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $]a,b[$, und $\exists x_0 \in \,]a,b[\, : \big(f_n(x_0)\big)$ ist konvergent. Dann:

1) $\big(f_n(x)\big)$ konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$ und

2) $f : \,]a,b[\, \to \mathbb{R} : x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ist differenzierbar auf $]a,b[$, und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)'(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} f'(x).$$

Beweis: **1)** Vorüberlegung: Für $x \in \,]a,b[\, \setminus \{x_0\}$ und $m,n \in \mathbb{N}$ gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\exists \xi \in \,]a,b[\, : \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)}{x - x_0} = (f_n - f_m)'(\xi)$$
$$\text{bzw. } f_n(x) - f_m(x) - \big(f_n(x_0) - f_m(x_0)\big) = (x - x_0)\big(f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\big).$$

Die letzte Gleichung gilt auch für $x = x_0$ mit beliebigem $\xi \in \,]a,b[$.

2) Für $x \in \,]a,b[$ folgt

$$\begin{aligned} \big|f_n(x) - f_m(x)\big| \ &\leq \ \big|f_n(x) - f_m(x) - \big(f_n(x_0) - f_m(x_0)\big)\big| + \big|f_n(x_0) - f_m(x_0)\big| \\ &= \ |x - x_0| \, \big|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\big| + \big|f_n(x_0) - f_m(x_0)\big| \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall m,n > N : \sup_{x \in \,]a,b[} \big|f_n'(x) - f_m'(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \ \wedge \ \big|f_n(x_0) - f_m(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Rightarrow \ \forall n,m > N \ \forall x \in \,]a,b[\, : \big|f_n(x) - f_m(x)\big| < |x - x_0| \, \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ $\big(f_n(x)\big)$ konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$. Setze $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

3) Sei $x \in \,]a,b[$ fest, (x_p) Folge in $]a,b[\,\setminus\{x\}$ mit $x_p \to x$.
Zeige $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{f(x_p)-f(x)}{x_p-x} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x'\to x} \dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

Setze

$$c_{n,p} \;:=\; \frac{f_n(x_p)-f_n(x)}{x_p-x}.$$

Dann gilt

$$c_{n,p} \;\to\; \frac{f(x_p)-f(x)}{x_p-x} \text{ für } n\to\infty \;\underbrace{\text{gleichmäßig}}_{\text{noch zu zeigen}} \text{ auf }]a,b[\,,$$

$$c_{n,p} \;\to\; f_n'(x) \text{ für } p\to\infty \text{ punktweise für } n\in\mathbb{N}.$$

$$9.16 \;\Rightarrow\; \lim_{p\to\infty} \frac{f(x_p)-f(x)}{x_p-x} \;=\; \lim_{p\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} c_{n,p}\big) \;=\; \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{p\to\infty} c_{n,p}\big) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \;=\; g(x)$$

Die Folge (x_p) war beliebig und der Grenzwert $g(x)$ ist unabhängig von der Folge
$\Rightarrow$ f ist in x differenzierbar mit $f'(x)=g(x)$.

4) Zur gleichmäßigen Konvergenz von $c_{n,p}$:

$$\begin{aligned}
|c_{n,p}-c_{m,p}| &= \left|\frac{f_n(x_p)-f_n(x)}{x_p-x} - \frac{f_m(x_p)-f_m(x)}{x_p-x}\right| \\
&= \left|\frac{f_n(x_p)-f_m(x_p)-\big(f_n(x)-f_m(x)\big)}{x_p-x}\right| \\
&\overset{\substack{\text{Mittelwertsatz}\\ \text{Differentialrechnung}}}{=} \big|f_n'(\xi_p)-f_m'(\xi_p)\big| \\
&\leq \underbrace{\sup_{\xi\in\,]a,b[} \big|f_n'(\xi)-f_m'(\xi)\big|}_{\text{unabhängig von } p} \\
&< \varepsilon \text{ für } m,n>N_\varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

9.23 Satz: Sei $f_n : \,]a,b[\,\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ in einem Punkt $x_0\in\,]a,b[$, und konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k'(x)$ gleichmäßig auf $]a,b[$, dann:

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$ und

2) $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ist differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n'(x) \quad \text{bzw.} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_n'(x).$$

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt für $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$:

- $\big(s_n(x_0)\big)$ ist konvergent,
- s_n ist differenzierbar und $\big(s_n'(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$.

Nach letztem Satz: $s_n(x) \to s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig auf $]a,b[$, s ist differenzierbar und

$$s'(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_n'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n'(x).$$

□

9.4 Potenzreihen

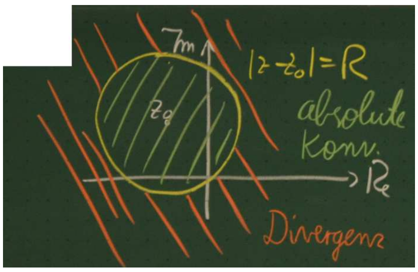
9.24 Definition: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und (a_n) eine komplexe Folge. Dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ **Potenzreihe um z_0** mit den **Koeffizienten** a_n.
Falls $z_0 \in \mathbb{R}$, (a_n) reelle Folge und nur $z \in \mathbb{R}$ betrachtet werden, heißt die Potenzreihe **reell**.

9.25 Satz: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ gegeben.

1) Es gibt eine eindeutig bestimmte Größe $R \in [0,\infty[\,\cup\{\infty\}$, so dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{falls } |z-z_0| < R, \\ \text{divergent} & \text{falls } |z-z_0| > R. \end{cases}$$

(Für $|z-z_0| = R$ kann alles passieren.) R heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.



2) Formel von Cauchy-Hadamard: Es gilt

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}},$$

wobei im Fall $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ $R = \infty$ und im Fall $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty$ $R = 0$ zu setzen ist.

Beweis: Wende das Wurzelkriterium an:

1) Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < \infty$: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n(z-z_0)^n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z-z_0|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{absolute Konvergenz} & \text{falls } |z-z_0| \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1 \\ \text{Divergenz} & \text{falls } |z-z_0| \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 1 \end{cases}$$

2) Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty$: Für $z \neq z_0$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n(z-z_0)^n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z-z_0| = \infty$$

$\Rightarrow$ Divergenz für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

$\square$

9.26 Bemerkung: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert $\Rightarrow$ $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ (siehe 8.20).

2) Sei $z_1 \in \mathbb{C}$, so dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z_1-z_0)^k$ konvergiert

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R \geq |z_1 - z_0|$

$\Rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < |z_1-z_0| \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ ist absolut konvergent.

Sei $z_1 \in \mathbb{C}$, so dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z_1-z_0)^k$ divergiert

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R \leq |z_1-z_0|$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ divergiert für $|z-z_0| > |z_1-z_0|$.

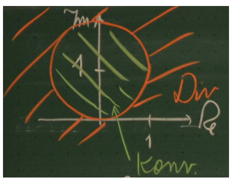
9.27 Beispiele: 1) $\sum \dfrac{z^k}{k!}$: $a_n = \dfrac{1}{n!} \Rightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{n+1} \to 0 \Rightarrow R = \infty$.

2) $\sum k^2\,(z-\mathrm{i})^k$: $a_n = n^2 \Rightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n^2}{(n+1)^2} \to 1 \Rightarrow R = 1$.

$\Rightarrow$ absolute Konvergenz für $|z-\mathrm{i}| < 1$, Divergenz für $|z-\mathrm{i}| > 1$.

$|z-\mathrm{i}| = 1 \Rightarrow |n^2(z-\mathrm{i})^n| = n^2 \to \infty$

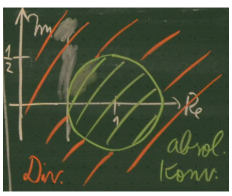
$\overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Rightarrow}$ Divergenz für $|z-\mathrm{i}| = 1$.



3) $\sum \dfrac{2^k}{k^2}(z-1)^k$: $a_n = \dfrac{2^n}{n^2} \Rightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{(n+1)^2}{n^2}2 \to 2 \Rightarrow R = \dfrac{1}{2}$.

$|z-1| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{2^n}{n^2}\,(z-1)^n\right| = \dfrac{1}{n^2} \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}$ absolute Konvergenz.

$\Rightarrow$ absolute Konvergenz für $|z-1| \leq \dfrac{1}{2}$, Divergenz für $|z-1| > \dfrac{1}{2}$.



4) $\sum \left(3+(-1)^k\right)^k z^k$: $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 2, & n \text{ ungerade} \\ 4, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{4}.$

$|z| = \frac{1}{4}$: $|(3+(-1)^n)^n z^n| = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \text{ ungerade,} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases} \overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Longrightarrow}$ Divergenz.

Also: Absolute Konvergenz für $|z| < \frac{1}{4}$, Divergenz für $|z| \geq \frac{1}{4}$.

9.28 Satz: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gegeben mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann

$$\forall r \in]0, R[: \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ ist gleichmäßig konvergent auf } B_r(z_0).$$

Beweis: Beachte: Wähle z_1 mit $|z_1 - z_0| = r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k$ ist absolut konvergent

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, r^k$ ist konvergent.

Für $z \in B_r(z_0)$ gilt $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n (z - z_0)^n| < |a_n| \, r^n$.

$\overset{\text{Weierstraß-Kriterium}}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ ist gleichmäßig konvergent auf $B_r(z_0)$.

$\square$

9.29 Satz: Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gegeben mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f stetig (auf ganz $B_R(z_0)$).

Beweis: Sei $z_1 \in B_R(z_0)$. Wähle $r \in]0, R[$, so dass $z_1 \in B_r(z_0)$.

$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ gleichmäßig konvergent auf } B_r(z_0) \\ \forall n \in \mathbb{N} : z \mapsto a_n z^n \text{ ist stetig} \end{array}\right\} \Rightarrow f\big|_{B_r(z_0)} \text{ ist stetig.}$

z_1 innerer Punkt von $B_r(z_0)$ und $B_r(z_0) \subseteq B_R(z_0) \Rightarrow f$ ist stetig in z_1.

$\square$

9.30 Identitätssatz: Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$, $z \in B_R(z_0)$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(z-z_0)^k$, $z \in B_{R'}(z_0)$ mit $R, R' > 0$. Existiert eine Folge (z_n) mit

$$z_n \to z_0, \ \wedge \ \forall n \in \mathbb{N} : z_n \neq z_0 \ \wedge \ f(z_n) = g(z_n),$$

so folgt $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = b_n$ bzw. $f = g$.

Insbesondere: Jede Funktion ist auf höchstens eine Weise als Potenzreihe um z_0 darstellbar.

Beweis: O.B.d.A. $z_0 = 0$.
Setze $h(z) := f(z) - g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k - b_k)z^k$ für $z \in B_{R''}(0)$ mit $R'' := \min\{R, R'\} > 0$.
$\Rightarrow$ h ist stetig und $\forall n \in \mathbb{N} : h(z_n) = 0$.
Zeige $a_m = b_m$ durch Induktion nach m:
Induktionsanfang $m = 0$: $a_0 - b_0 = h(0) = \lim_{n\to\infty} h(z_n) = 0$.
Induktionsschritt: Es sei $a_0 = b_0, \ldots, a_m = b_m$ bereits bewiesen (Induktionsvoraussetzung).
Zeige $a_{m+1} = b_{m+1}$.

$$\begin{aligned}
& h(z) \overset{\text{Ind.vor.}}{=} \sum_{k=m+1}^{\infty} (a_k - b_k) z^k \\
\Rightarrow \quad & \frac{h(z)}{z^{m+1}} = \sum_{k=m+1}^{\infty} (a_k - b_k) z^{k-m-1} \text{ ist stetig auf } B_{R''}(0) \text{, da Potenzreihe.} \\
\Rightarrow \quad & a_{m+1} - b_{m+1} = \left.\frac{h(z)}{z^{m+1}}\right|_{z=0} = \lim_{n\to\infty} \frac{h(z_n)}{z_n^{m+1}} = 0.
\end{aligned}$$

□

9.31 Multiplikation: Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k \text{ für } z \in B_R(z_0), \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(z-z_0)^k \text{ für } z \in B_{R'}(z_0),$$

$R, R' > 0$. Dann gilt wenigstens für $z \in B_{R''}(z_0)$ mit $R'' := \min\{R, R'\}$:

$$f(z) \cdot g(z) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j} \right) (z-z_0)^k.$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius der letzten Reihe mindestens R''.

Beweis: $f(z), g(z)$ sind absolut konvergent für $|z - z_0| < R''$. Cauchy-Produkt

$$8.28 \Rightarrow \ f(z)\,g(z) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j\,(z-z_0)^j\, b_{k-j}\,(z-z_0)^{k-j} \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \sum_{j=0}^{k} a_j \ b_{k-j}\,.$$

□

9.5 Reelle Potenzreihen

9.32 Bemerkung: Reelle Potenzreihen sind komplexe Potenzreihen (mit reellen Koeffizienten), deren Definitionsbereich auf $\mathbb{R}$ eingeschränkt ist. Der Konvergenzkreis wird zu einem Konvergenzintervall: Mit $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k \text{ ist auf } \begin{cases}]x_0 - R, x_0 + R[& \text{absolut konvergent,} \\ ]-\infty, x_0 - R[\,\cup\,]x_0 + R, \infty[& \text{divergent.} \end{cases}$$

Die Sätze des letzten Abschnittes gelten entsprechend. Z.B.

$$r \in\,]0, R[\ \Rightarrow\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k \text{ ist gleichmäßig konvergent auf }]x_0 - r, x_0 + r[\,.$$

9.33 Satz: Sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ für $x \in\,]x_0 - R, x_0 + R[$ mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1}$ hat denselben Konvergenzradius R.

2) f ist differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1} \text{ für } x \in\,]x_0 - R, x_0 + R[\,.$$

3) f ist beliebig oft differenzierbar (auf $]x_0 - R, x_0 + R[$).

Beweis: **1)** $\limsup\limits_{n\to\infty} |n\,a_n|^{1/n} = \limsup\limits_{n\to\infty} n^{1/n}\,|a_n|^{1/n} = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ und

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\,a_k(x-x_0)^{k-1}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\,a_k(x-x_0)^{k}$ konvergiert.

2) Zu $x \in\,]x_0 - R, x_0 + R[$ wähle $r \in\,]0, R[$ mit $x \in I_r :=\,]x_0 - r, x_0 + r[\,$.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1}$ sind gleichmäßig beide konvergent auf I_r.

$$\Rightarrow\ f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k\right)' \overset{9.23}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k\,(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1} \text{ auf } I_r.$$

3) Wende 2) iterativ an (vollständige Induktion). $\square$

9.34 Beispiel: Für $-1 < x < 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^k \;=\; x\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^{k-1} \;\overset{9.33}{=}\; x\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' \;=\; x\left(\frac{1}{1-x}\right)' \;=\; x\,\frac{1}{(1-x)^2}.$$

9.35 Bemerkung: Satz 9.33 gilt auch für komplexe Ableitung komplexer Potenzreihen (später).

9.36 Satz: Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ für $x \in\,]x_0 - R, x_0 + R[\,,\ R > 0$. Dann:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k.$$

D.h.: Die Potenzreihe stimmt mit der Taylorreihe überein. Insbesondere konvergiert die Taylorreihe auf $]x_0 - R, x_0 + R[$ gegen f.

Beweis:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1} \\
f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,a_k\,(x-x_0)^{k-2} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\,a_k\,\underbrace{(x-x_0)^{k-n}}_{=0 \text{ für } x = x_0 \text{ und } k>n} \\
\Rightarrow\ f^{(n)}(x_0) &= n(n-1)\cdots(n-n+1)\,a_n \;=\; n!\,a_n.
\end{aligned}$$

□

9.37 Abelscher Grenzwertsatz: Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k$ für $-1 < x < 1$ $(R = 1)$. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to 1} \left(a_k\,x^k\right).$$

Beweis: **1)** Spezielle Darstellung von f:

Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k,\ s_{-1} := 0\ \Rightarrow\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : a_k = s_k - s_{k-1}$.

Für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1})x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} s_k\,x^k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k\,x^{k+1} \;=\; (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} s_k\,x^k + \underbrace{s_n\,x^n}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}.$$

$$\Rightarrow\ f(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k\,x^k.$$

2) Spezielle Darstellung von $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$:

$$s = s(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{für } |x| < 1.$$

3) Eigentlicher Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Zeige: $\exists \delta > 0\ \forall x \in \,]1-\delta, 1[\, : \big|f(x) - s\big| < \varepsilon$.
Wähle $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N_\varepsilon : |s_n - s| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Für $0 \le x < 1$ gilt

$$\begin{aligned}
|f(x) - s| &= \left|(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k\, x^k - s(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right| \\
&\le (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} |s_k - s|\, x^k \\
&= (1-x)\sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s| \underbrace{x^k}_{\le 1} + (1-x)\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \underbrace{|s_k - s|}_{<\varepsilon/2}\, x^k \\
&< (1-x)\sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s| + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^k.
\end{aligned}$$

Wähle $\delta := \dfrac{\varepsilon}{2\sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s|}$. Für $x \in \,]1-\delta, 1[\,$ folgt

$$|f(x) - s| \;<\; \delta \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s| + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

$\square$

9.38 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{x\to 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k = \lim_{x\to 1-0} \ln(1+x) = \ln 2.$

9.39 Satz: Sind $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und das Cauchy-Produkt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}$ konvergent, so gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}.$$

Beweis: Setze

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k, \quad g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k, \quad h(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}\right) x^k.$$

9.26, 2) $\Rightarrow$ Alle drei Potenzreihen haben Konvergenzradius $R \ge 1$
9.31 $\Rightarrow$ $f(x) \cdot g(x) = h(x)$ für $-1 < x < 1$.
Mit dem Abelschen Grenzwertsatz folgt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) \;=\; \lim_{x\to 1} f(x)\cdot g(x) \;=\; \lim_{x\to 1} h(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}.$$

$\square$

9.40 Ausblick: Summierung divergenter Reihen: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gegeben, $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ habe Konvergenzradius $R = 1$, und es existiere $\lim_{x \to 1} f(x)$. Dann kann man

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \;:=\; \lim_{x \to 1} f(x)$$

setzen, auch wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert. Der Abelsche Grenzwertsatz garantiert, dass für konvergente Reihen derselbe Wert wie beim normalen Grenzwert herauskommt.

Z.B.: $\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \overset{\text{geom.Reihe}}{=} \frac{1}{1+x} \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k := \lim_{x \to 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$

$\sum_{k=0}^{\infty} k\,(-x)^k \overset{9.34}{=} \frac{-x}{(1+x)^2} \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} k\,(-1)^k := \lim_{x \to 1} \frac{-x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{4}$

9.6 Spezielle Funktionen

9.41 Definition:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} && \text{für } z \in \mathbb{C},\\
\sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} && \text{für } z \in \mathbb{C},\\
\cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} && \text{für } z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

9.42 Bemerkung: Alle drei Potenzreihen haben Konvergenzradius $R = \infty$.

Z.B. für die Sinus-Reihe: Betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^k$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \left|\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\right| \;=\; \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \;\to\; 0.$$

$\Rightarrow\; R = \infty$, Konvergenz für alle $w \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow\; \sin z = z \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^k\right]_{w=z^2}$ ist konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$, also $R = \infty$

9.43 Eigenschaften: **1)** Alle drei Funktionen sind stetig auf $\mathbb{C}$ (siehe 9.29).

2) Für $z = x \in \mathbb{R}$ stimmen die Reihen mit den reellen Taylorreihen überein.

3) $\forall z, w \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w$, insbesondere gilt $\mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^z}$ (vgl. 8.30).

4) $\forall z \in \mathbb{C} : \sin(-z) = -\sin z \;\wedge\; \cos(-z) = \cos z$.

5) $\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z$ (Eulersche Formel), denn

$$\cos z + \mathrm{i} \sin z \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \underbrace{(-1)^k z^{2k}}_{=(\mathrm{i}z)^{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \underbrace{\mathrm{i}(-1)^k z^{2k+1}}_{=(\mathrm{i}z)^{2k+1}} \;=\; \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^k}{k!} \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}z},$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}}{2} = \cos z, \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}}{2\mathrm{i}} = \sin z.$$

Insbesondere gilt die Formel von Moivre:

$$(\cos z + \mathrm{i} \sin z)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nz} = \cos(nz) + \mathrm{i} \sin(nz) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

6) $\forall z \in \mathbb{C} : \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$

$$\sin^2 z + \cos^2 z \;=\; \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)^2 \;=\; \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{-4} + \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{4} \;=\; 1.$$

7) Additionstheoreme: $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2,$
$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$

$$\begin{aligned}
\cos z_1 \cdot \cos z_2 \;&=\; \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1-z_2)} + \mathrm{e}^{(z_2-z_1)}}{4}\\
\sin z_1 \cdot \sin z_2 \;&=\; \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1-z_2)} - \mathrm{e}^{(z_2-z_1)}}{4}\\
\Rightarrow\; \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2 \;&=\; \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{2} \;=\; \cos(z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

8) Aus $\sin(x + 2\pi) = \sin x,\; \cos(x + 2\pi) = \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt:

a) $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \cos(2\pi) + \mathrm{i} \sin(2\pi) = \cos(0) + \mathrm{i} \sin(0) = 1,$

b) $\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$: Die Exponentialfunktion hat die Periode $2\pi\mathrm{i}$.

c) $\forall z \in \mathbb{C} : \sin(z + 2\pi) = \sin z \;\wedge\; \cos(z + 2\pi) = \cos z$:
Additionstheoreme: $\sin(z + 2\pi\mathrm{i}) = \sin z \cdot \cos(2\pi) + \cos z \cdot \sin(2\pi) = \sin z$

9) Warnung: $\sin(z), \cos(z)$ sind nicht beschränkt: $\sin(\mathrm{i}x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\underbrace{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}_{\to -\infty \text{ für } x \to \infty}\big).$

PD. Dr. P.H. Lesky

Universität Stuttgart

Sommersemester 2015

Analysis II

Warnung: Dies ist kein vollständiger Vorlesungsaufschrieb. Dieses Skript ist zur Erleichterung beim Mitschreiben gedacht, Ergänzungen sollen nachgetragen werden.

10 Integration

10.1 Treppen- und Regelfunktionen, Integral

Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Gesucht: Fläche zwischen Graph von f und der x-Achse.

Einfachster Fall: f ist stückweise konstant.

10.1 Definition: **1)** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion** auf $[a, b]$, falls es eine **Zerlegung** $Z = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n : a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = b\}$ von $[a, b]$ gibt, so dass

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} : f\big|_{]\xi_{k-1}, \xi_k[} = \text{konstant.}$$

$\mathcal{T}([a, b]) :=$ Menge der Treppenfunktionen auf $[a, b]$.

2) Zwei Treppenfunktionen f, g heißen **gleich fast überall** ($f = g$ f.ü.), falls $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ leer oder endlich ist.

3) Für $I \subseteq \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$ heißt

$$\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in I, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakteristische Funktion von I (χ sprich „chi“).

10.2 Satz: Die Relation $f \sim g :\Leftrightarrow f = g$ f.ü. ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

10.3 Beispiel: $[a, b] = [0, 3]$:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 3, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 4, & 1 < x \le 2 \\ -2, & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; f \;=\; 3 \cdot \chi_{]0,1[} + 4 \cdot \chi_{]1,2[} - 2 \cdot \chi_{]2,3[} \text{ f.ü.} \;=\; 3 \cdot \chi_{]0,3[} + 6 \cdot \chi_{]1,2[} - 2 \cdot \chi_{]1,3[} \text{ f.ü.}$$

10.4 Satz: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Treppenfunktion

$\Leftrightarrow \; \exists m \in \mathbb{N} \; \exists c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ $\exists$offene Intervalle $I_1, \dots, I_m \subseteq [a, b] : f = \sum_{k=1}^{m} c_k \, \chi_{I_k}$ f.ü.

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Sei $Z = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ Zerlegung mit $\forall k \in \{1, \dots, n\} : f\big|_{]\xi_{k-1}, \xi_k[} =$ konst. $=: c_k$.

$\Rightarrow \; f = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \chi_{]\xi_{k-1}, \chi_k[}$ f.ü.

" $\Leftarrow$ ": Sei $f = \sum_{k=1}^{m} c_k \, \chi_{]a_k, b_k[}$ f.ü. und $Z = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so dass $\{a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\} \subseteq Z$. Für $1 \le k \le m$ und $1 \le j \le n$ folgt

$$\begin{array}{rlll} \text{entweder} &]a_k, b_k[\, \cap \,]\xi_{j-1}, \xi_j[\; = \; \emptyset & \text{falls } \xi_{j-1} \ge b_k \;\vee\; \xi_j \le a_k \\ \text{oder} &]\xi_{j-1}, \xi_j[\; \subseteq \;]a_k, b_k[& \text{falls } \underbrace{\xi_{j-1} < b_k}_{\Rightarrow \; \xi_j \le b_k} \;\wedge\; \underbrace{\xi_j > a_k}_{\Rightarrow \; \xi_{j-1} \ge a_k} . \end{array}$$

$\Rightarrow \; \chi_{]a_k, b_k[} =$ konstant auf $]\xi_{j-1}, \xi_j[$

$\Rightarrow \; f =$ konstant auf $]\xi_{j-1}, \xi_j[$ für $j = 1, \dots, n$. $\square$

10.5 Definition: Ist f Treppenfunktion auf $[a, b]$ und $f = \sum_{k=1}^{m} c_k \, \chi_{]a_k, b_k[}$ f.ü., so heißt

$$\int_a^b f \;:=\; \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \;:=\; \sum_{k=1}^{m} c_k (b_k - a_k)$$

das (bestimmte) **Integral** von f.

10.6 Satz: Für $f, g \in \mathcal{T}([a, b])$ gilt: $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \; \int_a^b f = \int_a^b g$. Insbesondere ist $\int_a^b f$ wohldefiniert.

Beweis: $f = \sum_{k=1}^{m} c_k\, \chi_{]a_k,b_k[}$, $g = \sum_{k=1}^{m'} c'_k\, \chi_{]a'_k,b'_k[}$. Wähle eine Zerlegung $Z = \{\xi_0, \dots, \xi_n\}$ von $[a,b]$, so dass $\{a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\} \cup \{a'_1, b'_1, \dots, a'_{m'}, b'_{m'}\} \subseteq Z$. Dann folgt für $x \in]\xi_{j-1}, \xi_j[$:

$$f(x) = \text{konstant} = f\left(\frac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right) = g(x) = g\left(\frac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right).$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} f\left(\tfrac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right)(\xi_j - \xi_{j-1}) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_k \xi_{]a_k.b_k[}\left(\tfrac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right)(\xi_j - \xi_{j-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\xi_{]a_k.b_k[}\left(\tfrac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right)}_{=1 \text{ falls } a_k \le \xi_{j-1} < \xi_j \le b_k,\ =0 \text{ sonst}} (\xi_j - \xi_{j-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k \underbrace{\sum_{j=\min\{i:\xi_i \ge a_k\}}^{\max\{i:\xi_j \le b_k\}} (\xi_j - \xi_{j-1})}_{=b_k - a_k \text{ (Teleskopsumme)}} \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k (b_k - a_k) \\
&= \int_a^b f.
\end{aligned}$$

Genauso folgt $\sum_{j=1}^{n} \underbrace{g\left(\tfrac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right)}_{=f\left(\frac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right)}(\xi_j - \xi_{j-1}) = \int_a^b g.$

$\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$ $\square$

10.7 Definition: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, falls es eine Folge (t_n) in $\mathcal{T}([a,b])$ gibt, so dass $t_n \to f$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[a,b]$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in [a,b] : \big|f(x) - t_n(x)\big| < \varepsilon.$$

Die Menge der Regelfunktionen auf $[a,b]$ wird mit $\mathcal{R}([a,b])$ bezeichnet.

10.8 Satz und Definition: Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und (t_n) in $\mathcal{T}([a,b])$ mit $t_n \to f$ gleichmäßig. Dann existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f \;:=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n$$

und ist unabhängig von der gewählten Folge (t_n).

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt das (bestimmte) **Regel-** oder **Cauchy-Integral** von f, f heißt auch (Regel-) **integrierbar**.

Beweis: Sei $I_n := \displaystyle\int_a^b t_n$.

Schritt 1: Beweise, dass (I_n) eine Cauchy-Folge ist. Dann konvergiert (I_n) in $\mathbb{R}$.
Sei $\varepsilon > 0$ fest.

$$\Rightarrow \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n > N_\varepsilon \ \forall x \in [a,b] : \big|f(x) - t_n(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Für $m, n > N_\varepsilon$ folgt

$$\big|t_n(x) - t_m(x)\big| \ \le \ \big|t_n(x) - f(x)\big| + \big|f(x) - t_m(x)\big| \ < \ \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{für } x \in [a,b].$$

Wähle eine Zerlegung $Z = \{\xi_0, \ldots, \xi_K\}$ von $[a,b]$, so dass

$$t_n = \sum_{k=1}^{K} c_k \, \chi_{[\xi_{k-1},\xi_k]} \text{ f.ü.} \quad \text{und} \quad t_m = \sum_{k=1}^{K} d_k \, \chi_{[\xi_{k-1},\xi_k]} \text{ f.ü.}$$

$$\Rightarrow \ |c_k - d_k| \ < \ \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \ |I_n - I_m| \ \le \ \sum_{k=1}^{K} |c_k - d_k|(\xi_k - \xi_{k-1}) \ < \ \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{K} (\xi_k - \xi_{k-1}) \ = \ \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \ (I_n) \text{ ist konvergent, } I_n \to I.$$

Schritt 2: Der Grenzwert I ist unabhängig von der Folge (t_n):
Sei $(\widetilde{t}_n)$ eine weitere Folge in $\mathcal{T}([a,b])$ mit $\widetilde{t}_n \to f$ gleichmäßig und $\widetilde{I}_n := \displaystyle\int_a^b \widetilde{t}_n(x)\,\mathrm{d}x$.
$\Rightarrow$ Die Folge $t_1, \widetilde{t}_1, t_2, \widetilde{t}_2, \ldots$ konvergiert gleichmäßig gegen f.
$\Rightarrow$ Die Folge $I_1, \widetilde{I}_1, I_2, \widetilde{I}_2, \ldots$ konvergiert in $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \widetilde{I}_n$. □

10.2 Eigenschaften von Regelfunktionen

10.9 Satz: $V := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ mit

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x),$$
$$cf : x \mapsto c \cdot f(x) \text{ für } c \in \mathbb{R}$$

ist ein (unendlichdimensionaler) $\mathbb{R}$-Vektorraum.

10.10 Satz: **1)** $\mathcal{T}([a,b])$ ist Untervektorraum von V.

2) $f, g \in \mathcal{T}([a,b]) \ \Rightarrow \ |f|, f \cdot g \in \mathcal{T}([a,b])$.

Beweis: 1) Untervektorraumkriterium:

- $\mathcal{T}([a,b]) \neq \emptyset$, da $t(x)=0 \;\Rightarrow\; t \in \mathcal{T}([a,b])$.
- $t,s \in \mathcal{T}([a,b]) \;\Rightarrow\; t = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k},\; s = \sum_{k=1}^{n'} c'_k \chi_{I'_k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t+s \in \mathcal{T}([a,b]) \\ c\cdot t \in \mathcal{T}([a,b]) \end{cases}$$

2) $t \cdot s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n'} c_k c'_k \underbrace{\chi_{I_k}\chi_{I'_k}}_{=\chi_{I_k \cap I'_k} \text{ oder } =\emptyset} \in \mathcal{T}([a,b])$.

Zu t sei Z Zerlegung von $[a,b]$, so dass $t\big|_{]\xi_{j-1},\xi_j[} =$ konstant.
$\Rightarrow\; |t|\,\big|_{]\xi_{j-1},\xi_j[} =$ konstant $\;\Rightarrow\; |t| \in \mathcal{T}([a,b])$. □

10.11 Satz: $f \in \mathcal{R}([a,b]) \;\Rightarrow\; f$ beschränkt.

Beweis: Sei $t_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Wähle $\varepsilon := 1$.
$\underset{\text{gleichm. Konv}}{\overset{\text{Def}}{\Rightarrow}} \quad \exists N \in \mathbb{N}\; \forall x \in [a,b] : \big|t_N(x) - f(x)\big| < 1$
t_N nimmt nur endlich viele Werte an $\;\Rightarrow\; \max_{[a,b]} \big\{\big|t_N(x)\big|\big\}$ existiert
$\Rightarrow\; \forall x \in [a,b] : \big|f(x)\big| \leq \big|f(x) - t_N(x)\big| + \big|t_N(x)\big|$
$\Rightarrow\; \sup_{[a,b]} \big|f(x)\big| \leq 1 + \max_{[a,b]} \big|t_N(x)\big| < \infty$. □

10.12 Satz: 1) $\mathcal{R}([a,b])$ ist Untervektorraum von V aus 10.9.

2) $f,g \in \mathcal{R}([a,b]) \;\Rightarrow\; |f|, f\cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$.

Beweis: 1) $\mathcal{T}([a,b]) \subseteq \mathcal{R}([a,b]) \;\Rightarrow\; \mathcal{R}([a,b]) \neq \emptyset$.
$f,g \in \mathcal{R}([a,b]) \;\Rightarrow\; \exists (t_n), (s_n)$ in $\mathcal{T}([a,b]) : t_n \to f,\; s_n \to g$ gleichmäßig auf $[a,b]$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_n + s_n \to f+g \text{ gleichmäßig auf } [a,b] & \Rightarrow\; f+g \in \mathcal{R}([a,b]) \\ ct_n \to cf \text{ gleichmäßig auf } [a,b] & \Rightarrow\; cf \in \mathcal{R}([a,b]) \end{cases}$$

denn

$$\big|(t_n+s_n)(x) - (f+g)(x)\big| \leq \underbrace{\big|t_n(x) - f(x)\big|}_{<\varepsilon/2, n>N_1} + \underbrace{\big|s_n(x) - g(x)\big|}_{<\varepsilon/2, n>N_2} < \varepsilon$$

für alle $x \in [a,b]$ und $n > \max\{N_1, N_2\}$.

2) $t_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow$ $|t_n| \to |f|$ gleichmäßig,
denn $\Big|\big|t_n(x)\big| - \big|f(x)\big|\Big| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\underset{\text{nach unten}}{\leq}} \big|t_n(x) - f(x)\big|$
$\Rightarrow$ $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$
$t_n \to f,\ s_n \to g$ gleichmäßig $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\underbrace{t_n \cdot s_n}_{\text{Treppenfkt}} \to f \cdot g$ gleichmäßig $\Rightarrow$ $f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$
Zu $(*)$: $\big|t_n(x)s_n(x) - f(x)g(x)\big| \leq$

$$\leq \Big| \underbrace{\big(t_n(x) - f(x)\big)}_{|.|<\frac{\varepsilon}{3\sup|g(x)|},\ n>N_1} g(x)\Big| + \Big| \underbrace{\big(s_n(x) - g(x)\big)}_{|.|<\frac{\varepsilon}{3\sup|g(x)|},\ n>N_2} f(x)\Big|$$
$$+\Big| \underbrace{\big(t_n(x) - f(x)\big)}_{|.|<\frac{\varepsilon}{3},\ n>N_3} \underbrace{\big(s_n(x) - g(x)\big)}_{|.|<1,\ n>N_4}\Big| < \varepsilon\ \forall x \in [a,b], n > \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}.$$

□

10.13 Charakterisierung von Regelfunktionen: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Äquivalent sind

(i) $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

(ii) $\forall x_0 \in \,]a,b] : f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ existiert
$\wedge\ \forall x_0 \in [a,b[\, : f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ existiert.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei (x_n) in $[a,b]$, $x_n \to x_0,\ x_n < x_0$.
Zeige (α) $\big(f(x_n)\big)$ konvergiert
(β) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ ist unabhängig von der Folge (x_n).
Zu (α): $\big(f(x_n)\big)$ ist Cauchy-Folge, denn: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $t \in \mathcal{T}([a,b])$ mit

$$\forall x \in [a,b] : \big|t(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

t Treppenfunktion $\Rightarrow$ $\exists \xi_j : t\big|_{]\xi_j, x_0[} =$ konstant
$x_n \to x_0\ \wedge\ x_n < x_0\ \Rightarrow\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_n \in \,]\xi_j, x_0[$
Für $n, m > N$ gilt

$$\big|f(x_n) - f(x_m)\big| \ \leq\ \underbrace{\big|f(x_n) - t(x_n)\big|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\big|t(x_n) - t(x_m)\big|}_{=0} + \underbrace{\big|t(x_m) - f(x_m)\big|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \ <\ \varepsilon.$$

Zu (β): Sei $(\widetilde{x}_n)$ weitere Folge mit $\widetilde{x}_n \to x_0,\ \widetilde{x}_n < x_0$.
$\Rightarrow$ $(y_n) := x_1, \widetilde{x}_1, x_2, \widetilde{x}_2, \ldots$ erfüllt $y_n \to x_0,\ y_n < x_0$
$\overset{(\alpha)}{\Rightarrow}$ $f(y_n) \to y$
$\Rightarrow$ $y = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Widerspruchsbeweis. Annahme: (ii) gilt und $f \notin \mathcal{R}([a,b])$, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall t \in \mathcal{T}([a,b])\ \exists x \in [a,b] : \big|t(x) - f(x)\big| \geq \varepsilon.$$

Dieses ε wird festgehalten. Konstruiere Intervalle $[a_n, b_n]$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\forall t \in \mathcal{T}([a,b]) \ \exists x \in [a_n, b_n] : \big|t(x) - f(x)\big| \geq \varepsilon. \tag{$*$}$$

Setze $[a_1, b_1] := [a, b] \ \Rightarrow \ (*)$ erfüllt für $n = 1$.
Sei $[a_n, b_n]$ bereits so konstruiert, dass $(*)$ gilt.
Dann ist $(*)$ auf mindestens einem der beiden Intervalle $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$, $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$ erfüllt, denn andernfalls

$$\begin{aligned} &\exists t_1 \in \mathcal{T}([a_n, \tfrac{a_n+b_n}{2}]) \ \forall x \in \left[a_n, \tfrac{a_n+b_n}{2}\right] : \big|t_1(x) - f(x)\big| < \varepsilon \\ &\exists t_2 \in \mathcal{T}([\tfrac{a_n+b_n}{2}, b_n]) \ \forall x \in \left[\tfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] : \big|t_1(x) - f(x)\big| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dann sei $t(x) := \begin{cases} t_1(x) & a_n \leq x \leq \frac{a_n+b_n}{2} \\ t_2(x) & \frac{a_n+b_n}{2} < x \leq b_n \end{cases} \quad \Rightarrow \ \lightning (*)$ in $[a_n, b_n]$.

Wähle als $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ eines dieser Teilintervalle, so dass $(*)$ in $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ erfüllt ist. Damit gilt $(*)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus der Konstruktion folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: \xi \in [a, b]$.
Fall $\xi \in]a, b[$:
(ii) $\Leftrightarrow$ $f(\xi - 0), f(\xi + 0)$ existieren

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists \delta_1 > 0 \ \forall x \in \ \xi - \delta_1, \xi[: \big|f(x) - f(\xi - 0)\big| < \varepsilon \\ \exists \delta_2 > 0 \ \forall x \in \ \xi, \xi + \delta_2[: \big|f(x) - f(\xi + 0)\big| < \varepsilon \end{cases}$$

Sei $\delta := \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2\}$ und $t(x) := \begin{cases} f(\xi - 0), & \xi - \delta \leq x < \xi \\ f(\xi), & x = \xi \\ f(\xi + 0), & \xi < x \leq \xi + \delta \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t \in \mathcal{T}([\xi - \delta, \xi + \delta]) \\ \forall x \in [\xi - \delta, \xi + \delta] : \big|t(x) - f(x)\big| < \varepsilon \end{cases}$$

Für genügend großes n: $[a_n, b_n] \subseteq [\xi - \delta, \xi + \delta]$
$\Rightarrow \ t\big|_{[a_n.b_n]}$ widerspricht $(*)$.
Fall $\xi = a \ \vee \ \xi = b$: Betrachte entsprechend ein Intervall $[a, a + \delta]$ bzw. $[b - \delta, b]$. $\square$

10.14 Folgerung: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gelten:

1) f stetig $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

2) f monoton $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

3) f stückweise stetig oder monoton $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{R}([a, b])$ (siehe Übungen).

10.15 Definition: Sei V ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ heißt **Norm** auf V, wenn für $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\alpha \in \mathbb{C}$ gelten:

Positivität: $\|x\| \geq 0$,

Definitheit: $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ (= Nullelement des Vektorraums),

Homogenität: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(V, \|.\|)$ heißt **normierter Vektorraum**. Standardbeispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^3 + x_3^2}$.

10.16 Dreiecksungleichung nach unten: Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Für $x, y \in V$ gilt:

$$\|x - y\| \;\geq\; \big|\|x\| - \|y\|\big| \quad \text{(und auch } \|x + y\| \;\geq\; \big|\|x\| - \|y\|\big|\text{)}.$$

Beweis:
$$\|x\| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \|x - y\| + \|y\| \;\Rightarrow\; \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|,$$
$$\|y\| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \|y - x\| + \|x\| \;\Rightarrow\; \|x - y\| \geq \|y\| - \|x\|.$$
$\square$

10.17 Satz: Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann definiert

$$d(x, y) \;:=\; \|x - y\| \text{ für } x, y \in V$$

eine Metrik auf V. Eine Folge (x_n) in V

- konvergiert gegen $x \in V$, falls $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$,
- ist eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n, m > N_\varepsilon : \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Beweis: **(M1)** Positivität und Definitheit: $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ und

$$d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \|x - y\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x - y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y.$$

(M2) Symmetrie: $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1) \cdot (x - y)\| = \big|(-1)\big| \cdot \|x - y\| = \|x - y\|$.

(M3) $\triangle$-Ungleichung: $d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$. $\square$

10.18 Satz: 1) $\|.\|_\infty : \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{R} : f \mapsto \sup\limits_{[a,b]} |f(x)|$ ist eine Norm auf $\mathcal{R}([a,b])$.

2) $t_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\|t_n - f\|_\infty \to 0$.

3) $\mathcal{R}([a,b])$ ist vollständig. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt **Banachraum**.

Beweis: 1) a) Positivität: $\|f\|_\infty \geq 0$ ✓,

b) Definitheit: $\|f\|_\infty = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in [a,b] : f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$,

c) Homogenität: $\|\alpha \cdot f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$ ✓,

d) $\triangle$-Ungleichung:

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{[a,b]} \underbrace{\big|f(x)+g(x)\big|}_{\leq |f(x)|+|g(x)|} \;\leq\; \sup_{[a,b]} \big|f(x)\big| + \sup_{[a,b]} \big|g(x)\big| \;=\; \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

2) Klar.

3) Sei (f_n) Cauchy-Folge in $\mathcal{R}([a,b])$. Zeige: $\exists f \in \mathcal{R}([a,b]) : \|f_n - f\|_\infty \to 0$.
Zu jedem f_n wähle $t_n \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\|t_n - f_n\|_\infty < \dfrac{1}{n}$.
Schritt 1: (t_n) ist Cauchy-Folge in $\mathcal{R}([a,b])$:

$$\|t_n - t_m\|_\infty \;\leq\; \underbrace{\|t_n - f_n\|_\infty}_{<1/n} + \underbrace{\|f_n - f_m\|_\infty}_{<\varepsilon/3 \text{ für } n,m>N_\varepsilon} + \underbrace{\|f_m - t_m\|_\infty}_{<1/m} \;<\; \varepsilon \text{ für } n,m > \max\{N_\varepsilon, \frac{3}{\varepsilon}\}.$$

Schritt 2: Konstruktion von f:
Für jedes feste $x \in [a,b]$ ist $\big(t_n(x)\big)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, da $\big|t_n(x) - t_m(x)\big| \leq \|t_n - t_m\|_\infty$.
Setze $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in [a,b]$.
Schritt 3: Es gilt $\|t_n - f\|_\infty \to 0$:
Für $x \in [a,b]$ gilt $\big|f(x) - t_n(x)\big| = \lim\limits_{m\to\infty} \underbrace{\big|t_m(x) - t_n(x)\big|}_{<\|t_n - t_m\|_\infty < \varepsilon/2 \text{ für } n,m>N_\varepsilon} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ für $n > N_\varepsilon,\ x \in [a,b]$.

$\Rightarrow$ $\|f - t_n\|_\infty = \sup_{[a,b]} \big|f(x) - t_n(x)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$

$\Rightarrow$ $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $\|f - t_n\|_\infty \to 0$.

$\Rightarrow$ $\|f - f_n\|_\infty \leq \|f - t_n\|_\infty + \underbrace{\|t_n - f_n\|_\infty}_{<1/n} < \varepsilon$ für n genügend groß

$\Rightarrow$ $f_n \to f$ in $\mathcal{R}([a,b])$. □

10.3 Eigenschaften des Integrals

10.19 Hilfssatz: Seien $f, g \in \mathcal{T}([a,b])$. Dann gelten

1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \;\leq\; (b-a)\cdot\|f\|_\infty.$

Beweis: Sei Z Zerlegung von $[a,b]$, so dass

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{]\xi_{j-1},\xi_j[} \text{ f.ü. und } g = \sum_{j=1}^n d_j \chi_{]\xi_{j-1},\xi_j[} \text{ f.ü.}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \alpha f + \beta g &= \sum_{j=1}^n (\alpha c_j + \beta d_j)\chi_{]\xi_{j-1},\xi_j[} \text{ f.ü.}\\
\Rightarrow\ \int_a^b (\alpha f + \beta g) &= \sum_{j=1}^n (\alpha c_j + \beta d_j)(\xi_j - \xi_{j-1})\\
&= \sum_{j=1}^n \alpha c_j(\xi_j - \xi_{j-1}) + \sum_{j=1}^n \beta d_j(\xi_j - \xi_{j-1}) \;=\; \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\left|\int_a^b f\right| \;=\; \left|\sum_{j=1}^n c_j(\xi_j-\xi_{j-1})\right| \;\leq\; \underbrace{\max\{|c_1|,\dots,|c_n|\}}_{\leq\|f\|_\infty}\ \underbrace{\sum_{j=1}^n |\xi_j - \xi_{j-1}|}_{=b-a \text{ (Teleskopsumme)}} \;\leq\; \|f\|_\infty(b-a).$$

□

10.20 Satz: Seien $a<b$ und $f,g \in \mathcal{R}([a,b])$. Dann gilt

1) Linearität: $\displaystyle\int_a^b (\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) Monotonie: $\forall x \in [a,b] : g(x) \geq f(x) \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_a^b g \geq \int_a^b f.$

Insbesondere:

$$\left.\begin{aligned}
f(x) \leq |f(x)| \ &\Rightarrow\ \int_a^b f \leq \int_a^b |f|\\
-f(x) \leq |f(x)| \ &\Rightarrow\ -\int_a^b f = \int_a^b(-f) \leq \int_a^b |f|
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

3) Beschränktheit: $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \;\leq\; (b-a)\cdot\|f\|_\infty.$

Insbesondere ist die Abbildung $\mathcal{R}([a,b]) \ni f \mapsto \displaystyle\int_a^b f \in \mathbb{R}$ stetig:

$$\begin{aligned}
f_n \to f \text{ in } \mathcal{R}([a,b]) \ &\Leftrightarrow\ \|f_n - f\|_\infty \to 0\\
&\Rightarrow\ \left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \;=\; \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \;\leq\; (b-a)\cdot\|f_n - f\|_\infty \to 0
\end{aligned}$$

4) $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g.$

Beweis: Seien im ganzen Beweis $(t_n),\ (s_n)$ Folgen in $\mathcal{T}([a,b])$ mit $t_n \to f,\ s_n \to g$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

1) $\alpha t_n + \beta s_n \to \alpha f + \beta g$

$$\Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha t_n + \beta s_n) \overset{\text{letzter Satz}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \int_a^b t_n + \beta \int_a^b s_n \right) \overset{\text{lim ist linear}}{=} \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

2) Zeige: $g \geq 0$ auf $[a,b] \ \Rightarrow \displaystyle\int_a^b g \geq 0.$

Dann:

$$g \geq f \ \Rightarrow \int_a^b g \overset{\text{Linearität}}{=} \int_a^b \underbrace{(g-f)}_{\geq 0} + \int_a^b f \ \geq \ \int_a^b f.$$

Sei $g \geq 0$. Setze $\widetilde{s}_n(x) := \max\{0, s_n(x)\}$ für $x \in [a,b]$. Dann gelten:

- $\widetilde{s}_n \in \mathcal{T}([a,b])$,
- $\widetilde{s}_n(x) \geq 0$ auf $[a,b] \ \Rightarrow \displaystyle\int_a^b \widetilde{s}_n \geq 0$,
- $\widetilde{s}_n \to g$ gleichmäßig, da $\big|g(x) - \widetilde{s}_n(x)\big| \leq \big|g(x) - s_n(x)\big|$

$$\Rightarrow \int_a^b g \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b \widetilde{s}_n \ \geq \ 0.$$

3) Es gilt $\|t_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$ wegen $\big|\|t_n\|_\infty - \|f\|_\infty\big| \underset{\text{nach unten}}{\overset{\triangle\text{-Ungleichung}}{\leq}} \|t_n - f\|_\infty \to 0.$

Aus letztem Satz: $\displaystyle\int_a^b t_n \leq (b-a)\|t_n\|_\infty$

$$\Rightarrow \int_a^b f \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n \leq (b-a) \lim_{n\to\infty} \|t_n\|_\infty \ = \ \|f\|_\infty.$$

4) Setze $\widetilde{t}_n(x) := t_n(x) + \underbrace{g(x) - f(x)}_{\neq 0 \text{ nur an endlich vielen Stellen}}.$

$\Rightarrow \widetilde{t}_n \in \mathcal{T}([a,b]),\ \widetilde{t}_n = t_n$ f.ü., $\displaystyle\int_a^b \widetilde{t}_n = \int_a^b t_n$, $\big|\widetilde{t}_n - g(x)\big| = \big|t_n(x) - f(x)\big| \leq \|t_n - f\|_\infty \to 0.$

$$\Rightarrow \int_a^b g \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b \widetilde{t}_n \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n \ = \ \int_a^b f.$$

$\square$

10.21 Additivität: Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Für $a \le c < d \le b$ setze

$$\int_c^d f := \int_a^b \chi_{[c,d]} \cdot f, \quad \int_d^c f := -\int_c^d f, \quad \int_c^c f := 0.$$

Für $a \le c \le b$ gilt dann

$$\int_a^c f + \int_c^b f \;=\; \int_a^b f.$$

Gilt $a < b < c$ und $f \in \mathcal{R}([a,c])$, so folgt

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f \;\Rightarrow\; \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Beweis: Sei (t_n) in $\mathcal{T}([a,b])$ mit $t_n \to f$. Verwende $t_n = \underbrace{\chi_{[a,c]} \cdot t_n}_{\to \chi_{[a,c]} f} + \underbrace{\chi_{[c,b]} \cdot t_n}_{\to \chi_{[c,b]} f}$ f.ü.
Durch Grenzwertbildung folgt die Behauptung. $\square$

10.22 Satz: Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $\forall x \in [a,b] : f(x) \ge 0$ und $\int_a f = 0$. Dann gilt:

$$\forall x \in [a,b] : f \text{ stetig an der Stelle } x \;\Rightarrow\; f(x) = 0.$$

Insbesondere: Ist f zusätzlich stetig, so folgt $f = 0$.

Beweis: Widerspruchsbeweis. Annahme: f stetig in $x_0 \in [a,b]$ und $f(x_0) > 0$.
Mit $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$ folgt:

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, : f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

$$\Rightarrow\; f(x) \ge g(x) \text{ mit } g(x) := \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & \text{für } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; \int_a^b f \ge \int_a^b g = 2\delta \frac{f(x_0)}{2} > 0 \; \lightning.$$

$\square$

10.23 Beispiel: $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x = \frac{1}{n},\; n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann $f \in \mathcal{R}([0,1])$, $f(x) \ge 0$ auf $[a,b]$, $\int_a^b f = 0$, aber $f \ne 0$.

10.4 Stammfunktionen

10.24 Wichtige Idee: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann heißen die Abbildungen

$$F : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad G : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Flächeninhaltsfunktionen oder **Integralfunktionen**.

10.25 Satz: $f \in \mathcal{R}([a,b]) \;\Rightarrow\; F, G$ stetig auf $[a,b]$.

Beweis:
$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f \right| \\ &\overset{\text{10.20, Teil 3}}{\leq} |x - x_0|\,\|f\|_\infty \\ &< \varepsilon \quad \text{falls } |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty} \end{aligned}$$

Also ist F stetig. Die Stetigkeit von G folgt aus $G(x) = \displaystyle\int_a^b f - F(x)$. $\square$

10.26 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (1667): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Dann ist F differenzierbar auf $]a,b[$, und es gilt $F' = f$.

Also: $\underbrace{\text{Integration}}_{\text{Flächenproblem}}$ ist Umkehrung der $\underbrace{\text{Differentiation}}_{\text{Tangentenproblem}}$.

Beweis: Sei $x_0 \in]a,b[\,,\ \Delta(x) := \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ für $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$. Zeige $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta(x) = f(x_0)$.
Für $x \neq x_0$ gilt

$$\begin{aligned} |\Delta(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t \right) \right| \\ &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t \right| \\ &\overset{\text{10.20, Teil 3}}{\leq} \frac{1}{|x - x_0|}\, |x - x_0| \max_{t \in [x, x_0]} |f(t) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ fest. Da f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x_0)| &< \varepsilon \qquad \text{für } |t - x_0| < \delta \\ \Rightarrow |\Delta(x) - f(x_0)| &\leq \varepsilon \qquad \text{für } |x - x_0| < \delta \\ \overset{\varepsilon > 0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} \Delta(x) &= f(x_0). \end{aligned}$$

$\square$

10.27 Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, falls

1) F stetig auf $[a,b]$ und

2) F differenzierbar auf $]a,b[$ mit $F' = f$ auf $]a,b[$ ist.

Falls f stetig ist, besitzt f eine Stammfunktion (Hauptsatz 10.26).

Alle Stammfunktionen zu f:

1) F Stammfunktion $\Rightarrow$ $\forall c \in \mathbb{R} : F + c$ ist Stammfunktion von f.

2) F, G Stammfunktionen $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F - G \text{ ist stetig auf } [a,b], \\ (F-G)' = f - f = 0 \text{ in } \ ]a,b[\end{array} \right\} \overset{7.25}{\Rightarrow} F - G = \text{const.}$

10.28 Integralberechnung: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f, so gilt für $a \le c \le d \le b$:

$$\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(d) - F(c) \;=:\; F(x)\Big|_{x=c}^{d} \;=:\; \Big[F(x)\Big]_{x=c}^{d}.$$

Beweis: Sei $G(x) := \displaystyle\int_a^x f \overset{\text{Hauptsatz}}{\Rightarrow} G$ ist Stammfunktion

$\Rightarrow \quad \exists \gamma \in \mathbb{R} : F \;=\; G + \gamma$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_c^d f \overset{\text{Additivität}}{=} \int_a^d f - \int_a^c f \;=\; G(d) - G(c) \;=\; F(d) - \gamma - (F(c) - \gamma) \;=\; F(d) - F(c)$ $\square$

10.29 Beispiel: Sei $f(x) := \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 3 - x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow F(x) \;:=\; \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 3x - \dfrac{3}{2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

10.30 Definition: 1) Die Menge aller Stammfunktionen auf $[a,b]$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \big\{ F : [a,b] \to \mathbb{R} \;\big|\; F \text{ ist Stammfunktion von } f \big\}$$

heißt das **unbestimmte Integral** von f.

2) Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$, und wir schreiben kurz

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(x) + c.$$

10.5 Wie findet man Stammfunktionen?

Wichtigste Methode: Raten. Z.B.

- Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $\displaystyle\int x^\alpha \,\mathsf{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,$ denn $\displaystyle\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = x^\alpha$

(für $x \in \mathbb{R}$ falls $\alpha \geq 0$ bzw. für $x \in]-\infty, 0[$ oder $x \in]0, \infty[$ falls $\alpha < 0$).

- $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \,\mathsf{d}x = \mathrm{e}^x + c,\ x \in \mathbb{R},$ denn $\displaystyle\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathsf{d}x = \begin{cases} \ln x + c, & \text{für } x > 0, \\ \ln(-x) + c, & \text{für } x < 0, \end{cases}$, denn für $x < 0$: $\displaystyle\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\big(\ln(-x)\big) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$

Kurzschreibweise: $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathsf{d}x = \ln|x| + c$ für $x \neq 0$.

- $\displaystyle\int \sin x \,\mathsf{d}x = -\cos x + c,\ x \in \mathbb{R}$ denn $\displaystyle\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}(-\cos x) = \sin x.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathsf{d}x = \arctan x + c,\ x \in \mathbb{R},$ denn $\displaystyle\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$

10.31 Ratehilfen: 1) Seien $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in $]a, b[$, und $u \cdot v'$ besitze eine Stammfunktion (z.B. weil v' auf $[a, b]$ stetig fortsetzbar ist). Dann besitzt $u' \cdot v$ auch eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v' \qquad (\textbf{Partielle Integration}).$$

2) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, und sei $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig auf $[\alpha, \beta]$, differenzierbar in $]\alpha, \beta[$. Besitzt f eine Stammfunktion, dann auch $\varphi' \cdot (f \circ \varphi)$, und es gilt

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \,\mathsf{d}t = \left[\int f(x) \,\mathsf{d}x\right]_{x=\varphi(t)} \qquad (\textbf{Integration durch Substitution}).$$

Wichtig: Diese Formel kann von links nach rechts **und** von rechts nach links benützt werden: Ist zusätzlich φ invertierbar, so gilt

$$\int f(x) \,\mathsf{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \,\mathsf{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \qquad (\textbf{Integration durch Substitution}).$$

Beweis: 1) Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\Rightarrow u' \cdot v = \underbrace{(u \cdot v)'}_{\text{besitzt Stammfkt. } u\cdot v} - \underbrace{u \cdot v'}_{\text{bsitzt Stammfk. nach Voraussetzung}}$$

$$\Rightarrow \int u' \cdot v \overset{\text{Linearität}}{=} \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v' = u \cdot v + c - \int u \cdot v' = u \cdot v - \int u \cdot v'.$$

2) Sei F eine Stammfunktion von f. Die Funktion $G := F \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ist stetig. Mit Kettenregel folgt die Differenzierbarkeit von G auf $]\alpha, \beta[$ und

$$\begin{aligned} G'(t) &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \text{ für } t \in]\alpha, \beta[\\ \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathsf{d}t &= G(t) + c = (F \circ \varphi)(t) + c = F(x)\big|_{x=\varphi(t)} + c. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung wird auf beiden Seiten $t = \varphi^{-1}(x)$ eingesetzt. $\square$

10.32 Beispiele: 1) $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x \;=\; -x\cos x+\sin x+c$

2) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x \;=\; x\cdot\ln x - x + c$ für $x>0$.

3) $\displaystyle\int 2t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t \;=\; -\cos(t^2+1)+c$. Dies hätte man auch erraten können!

4) Für $x\in\,]-1,1[$: $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x + c\Big)$ (Substitution $x=\sin t$).

10.6 Integration rationaler Funktionen

Ziel: Darstellung einer rationalen Funktion $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (P,Q Polynome) als Summe „einfacher“ Brüche, die dann integriert werden können. Zunächst werden Polynome in $\mathbb{C}$ betrachtet.

10.33 Hilfssatz: Seien P,Q teilerfremde Polynome (d.h. P,Q haben keine gemeinsame Nullstelle) mit $\mathrm{Grad}(P)<\mathrm{Grad}(Q)$, und λ sei n-fache Nullstelle von Q:

$$Q(z) \;=\; (z-\lambda)^n\,Q_1(z) \quad \text{mit} \quad Q_1(\lambda)\neq 0.$$

Dann gibt es ein $a_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und ein Polynom P_1, so dass

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \;=\; \frac{P(z)}{(z-\lambda)^nQ_1(z)} \;=\; \frac{a_1}{(z-\lambda)^n}+\frac{P_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}Q_1(z)};$$

a_1 und P_1 sind eindeutig, und es gilt $\mathrm{Grad}(P_1)<\mathrm{Grad}(Q)-1$.
Fortsetzung dieses Verfahrens liefert

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \;=\; \frac{a_1}{(z-\lambda)^n}+\frac{a_2}{(z-\lambda)^{n-1}}+\ldots+\frac{a_n}{(z-\lambda)^1}+\frac{P_n(z)}{Q_1(z)}$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten $a_j\in\mathbb{C}$ und $\mathrm{Grad}(P_n)<\mathrm{Grad}(Q)-n=\mathrm{Grad}(Q_1)$.

Beweis: 1) Existenz:

$$\begin{aligned}
\frac{P(z)}{(z-\lambda)^nQ_1(z)} &= \frac{P(z)-P(\lambda)}{(z-\lambda)^nQ_1(z)}+\frac{P(\lambda)}{(z-\lambda)^nQ_1(z)}\\
&= \frac{P(z)-P(\lambda)}{(z-\lambda)^nQ_1(z)}+\frac{P(\lambda)}{(z-\lambda)^n}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{Q_1(z)}-\frac{1}{Q_1(\lambda)}}_{=\frac{Q_1(\lambda)-Q_1(z)}{Q_1(\lambda)\cdot Q_1(z)}}+\frac{1}{Q_1(\lambda)}\Bigg)\\
&= \frac{\frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)}}{(z-\lambda)^n}+\frac{1}{(z-\lambda)^nQ_1(z)}\underbrace{\Big(P(z)-P(\lambda)+\frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)}\big(Q_1(\lambda)-Q_1(z)\big)\Big)}_{=:\widetilde{P}(z)}
\end{aligned}$$

$\widetilde{P}$ ist Polynom, $\mathrm{Grad}(\widetilde{P})\le\max\{\mathrm{Grad}(P),\mathrm{Grad}(Q_1)\}<\mathrm{Grad}(Q)$, $\widetilde{P}(\lambda)=0$.
$\Rightarrow$ $\widetilde{P}(z)=(z-\lambda)P_1(z)$ mit $\mathrm{Grad}(P_1)=\mathrm{Grad}(\widetilde{P})-1<\mathrm{Grad}(Q)-1$.

2) Eindeutigkeit durch Zuhaltemethode: Sei $N := \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$ und

$$\begin{aligned}
\frac{P(z)}{(z-\lambda)^n Q_1(z)} &= \frac{a_1}{(z-\lambda)^n} + \frac{P_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}Q_1(z)} \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus N \\
\Rightarrow \frac{P(z)}{Q_1(z)} &= a_1 + (z-\lambda)\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus N \\
\Rightarrow \lim_{z\to\lambda} \frac{P(z)}{Q_1(z)} &= a_1 + \lim_{z\to\lambda}(z-\lambda)\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} \\
\Rightarrow a_1 &= \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} \text{ ist eindeutig.}
\end{aligned}$$

Da a_1 eindeutig ist, ist auch P_1 eindeutig. □

10.34 Komplexe Partialbruchzerlegung: Seien P, Q teilerfremd mit Grad$(P) <$ Grad(Q),

$$Q(z) = a_n(z-\lambda_1)^{n_1}\cdots(z-\lambda_k)^{n_k},$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschieden (d.h $n_1, \ldots, n_k$ sind die Vielfachheiten der Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$). Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $a_{j,i} \in \mathbb{C}$, so dass

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_{1,i}}{\lambda-\lambda_i} + \frac{a_{2,i}}{(\lambda-\lambda_i)^2} + \ldots + \frac{a_{n_i,i}}{(\lambda-\lambda_i)^{n_i}}\right).$$

Beweis: Folgt direkt aus 10.33. □

10.35 Bemerkungen: **1)** Falls Grad$(P) \geq$ Grad(Q): Erst abdividieren:

$$\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{R}{Q} \qquad \text{mit Grad}(R) < \text{Grad}(Q),\ P_1 \text{ Polynom,}$$

dann 10.34 auf $\frac{R}{Q}$ anwenden.

2) Falls P und Q gemeinsame Nullstellen haben: Durch größtes gemeinsames Teilerpolynom kürzen.

10.36 Beispiel: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} \overset{\text{Theorie}}{=} \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{(x+2)^2}.$

Zuhaltemethode: Multipliziere mit $(x-1)$:

$$\frac{4x^2+9x-4}{(x+2)^2} = a + (x-1)(\ldots) \overset{x\to 1}{\Rightarrow} a = \frac{9}{3^2} = 1.$$

Zuhaltemethode: Multipliziere mit $(x+2)^2$:

$$\frac{4x^2+9x-4}{x-1} \;=\; c+(x+2)(\ldots) \overset{x\to-2}{\Rightarrow} c=\frac{-6}{-3}=2.$$

b kann nicht durch die Zuhaltemethode bestimmt werden. Einen x-Wert einsetzen:

$$\frac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} \;=\; \frac{1}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2} \overset{x=0}{\Rightarrow} \frac{-4}{-4}=-1+\frac{b}{2}+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b=3.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\; \ln|x-1|+3\ln|x+2|-\frac{2}{x+2}+c \quad \text{für } x\notin\{-2,1\}.\end{aligned}$$

10.37 Reelle Polynome: Sei Q ein reelles Polynom, d.h. die Koeffizienten von Q sind reell. Dann gelten:

- $Q(\lambda)=0 \;\Rightarrow\; Q(\overline{\lambda})=0$ (vgl. 4.37)
- $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ Nullstelle $\;\Rightarrow\; Q(z)=(z-\lambda)(z-\overline{\lambda})Q_1(z)$.
  Da $T(z)=(z-\lambda)(z-\overline{\lambda})=z^2-2(\operatorname{Re}\lambda)z+|\lambda|^2$ relles Polynom, ist auch Q_1 relles Polynom.
- $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ Nullstelle der Vielfachheit n
  $\Rightarrow\; Q(z) \;=\; (z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z) \;=\; \big(z^2-2(\operatorname{Re}\lambda)z+|\lambda|^2\big)^nQ_1(z)$, Q_1 relles Polynom.
- Sind $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ die reellen und $\lambda_{k+1},\overline{\lambda}_{k+1},\ldots,\lambda_l,\overline{\lambda}_l$ die nichtrellen Nullstellen von Q mit Vielfachheiten $n_1,\ldots,n_l$, so besitzt Q die relle Faktorisierung
  $$Q(z) \;=\; a_n\prod_{j=1}^{k}(z-\lambda_j)^{n_j}\cdot\prod_{j=k+1}^{l}\big(z^2-2(\operatorname{Re}\lambda_j)z+|\lambda_j|^2\big)^{n_j}. \qquad (*)$$

10.38 Hilfssatz: Seien P,Q teilerfremde relle Polynome, Grad$(P)<$ Grad(Q), und $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ sei n-fache Nullstelle von Q:

$$Q(z) \;=\; (z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z),\;\; Q_1(\lambda)\neq 0,\;\; Q_1 \text{ reelles Polynom.}$$

Dann gibt es $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, und ein reelles Polynom P_1, so dass

$$\frac{P(z)}{(z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z)} \;=\; \frac{\alpha z+\beta}{(z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n}+\frac{P_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}\,(z-\overline{\lambda})^{n-1}\,Q_1(z)};$$

α,β und P_1 sind eindeutig, und es gilt Grad$(P_1)<$ Grad$(Q)-2$.

Beweis: Aus (10.34):

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \;=\; \frac{a}{(z-\lambda)^n}+\frac{b}{(z-\overline{\lambda})^n}+\frac{\widetilde{P}_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}(z-\overline{\lambda})^{n-1}Q_1(z)}$$

mit $\mathsf{Grad}(\widetilde{P}_1) < \mathsf{Grad}(Q) - 2$ und

$$a = \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)},\ b = \frac{P(\overline{\lambda})}{Q_1(\overline{\lambda})} \ \Rightarrow\ b = \overline{a}.$$

Betrachte

$$\frac{a}{(z-\lambda)^n} + \frac{\overline{a}}{(z-\overline{\lambda})^n} \quad =: \quad \frac{\widetilde{P}_2(z)}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n}$$

$$\Rightarrow\ \widetilde{P}_2(z) \ = \ a(z-\overline{\lambda})^n + \overline{a}(z-\lambda)^n \ \underset{\text{Satz}}{\overset{\text{binomischer}}{=}} \ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j \big(\underbrace{a(-\overline{\lambda})^{n-j} + \overline{a}(-\lambda)^{n-j}}_{\in\mathbb{R}}\big).$$

Also ist $\widetilde{P}_2$ ein reelles Polynom, und damit auch $\widetilde{P}_1$. Außerdem $\widetilde{P}_2(\lambda) \neq 0$.

Wähle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\widetilde{P}_3(z) := \widetilde{P}_2(z) - \alpha z - \beta$ die Nullstelle $z = \lambda$ besitzt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_3(\lambda) = 0 \ &\Leftrightarrow\ \alpha\lambda + \beta = \widetilde{P}_2(\lambda) \\
&\Leftrightarrow\ \alpha \underbrace{\mathrm{Im}\,\lambda}_{\neq 0} = \mathrm{Im}\,\widetilde{P}_2(\lambda) \ \wedge\ \alpha \mathrm{Re}\,\lambda + \beta = \mathrm{Re}\,\widetilde{P}_2(\lambda) \\
&\Leftrightarrow\ \alpha = \frac{\mathrm{Im}\,\widetilde{P}_2(\lambda)}{\mathrm{Im}\,\lambda} \ \wedge\ \beta = \mathrm{Re}\,\widetilde{P}_2(\lambda) - \alpha \mathrm{Re}\,\lambda.
\end{aligned}$$

$(\widetilde{P}_2(\lambda) \neq 0 \ \Rightarrow\ (\alpha, \beta) \neq (0,0))$.
$\widetilde{P}_3$ relles Polynom $\wedge\ \widetilde{P}_3(\lambda) = 0 \ \Rightarrow\ \widetilde{P}_3(z) = (z-\lambda)(z-\overline{\lambda})\widetilde{P}_4(z)$, $\widetilde{P}_4$ relles Polynom.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \frac{a}{(z-\lambda)^n} + \frac{\overline{a}}{(z-\overline{\lambda})^n} \ &= \ \frac{\alpha z + \beta}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n} + \frac{\widetilde{P}_3(z)}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n} \\
&= \ \frac{\alpha z + \beta}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n} + \frac{\widetilde{P}_4(z)}{(z-\lambda)^{n-1}(z-\overline{\lambda})^{n-1}}. \\
\Rightarrow\ \frac{P(z)}{(z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z)} \ &= \ \frac{\alpha z + \beta}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n} + \frac{\widetilde{P}_4(z)Q_1(z) + \widetilde{P}_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}\,(z-\overline{\lambda})^{n-1}\,Q_1(z)}
\end{aligned}$$

und $\mathsf{Grad}(\widetilde{P}_4 Q_1 + \widetilde{P}_1) \leq \max\{\underbrace{\mathsf{Grad}(\widetilde{P}_4)}_{\leq n-2} + \underbrace{\mathsf{Grad}(Q_1)}_{=\mathsf{Grad}(Q)-2n}, \mathsf{Grad}(\widetilde{P}_1)\} < \mathsf{Grad}(Q) - 2.$

$\square$

10.39 Relle Partialbruchzerlegung: Sind P, Q teilerfremde reelle Polynome, $\mathsf{Grad}(P) < \mathsf{Grad}(Q)$, und hat Q die in (10.37) stehende relle Faktorisierung $(*)$, so gibt es eindeutig bestimmte Konstanten $a_{j,i}, b_{j,i} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} \ &= \ \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{a_1, j}{x - \lambda_j} + \ldots + \frac{a_{n_j,j}}{(x-\lambda_j)^{n_j}} \right) \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{l} \left(\frac{a_{1,j}x + b_{1,j}}{x^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda_j) + |\lambda_j|^2} + \ldots + \frac{a_{n_j,j}x + b_{n_j,j}}{(x^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda_j)x + |\lambda_j|^2)^{n_j}} \right).
\end{aligned}$$

Die Konstanten können durch Zuhaltemethode, Einsetzen verschiedener x-Werte, Hauptnenner und Koeffizientenvergleich im Zähler berechnet werden.

10.40 Beispiel:
$$\begin{aligned}\frac{x^4+x^3+x}{x^3+1} &= x+1-\frac{\frac{1}{3}}{x+1}-\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\\ &= x+1-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^4+x^3+x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+c$$

10.7 Mittelwertsätze

10.41 Erster Mittelwertsatz (der Integralrechnung): Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g(x) \geq 0$ auf $[a,b]$. Dann
$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Fall 1: $\displaystyle\int_a^b g = 0. \overset{g \text{ stetig}}{\underset{10.22}{\Rightarrow}} g = 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b fg = 0 \;\Rightarrow\;$ $(*)$ gilt für alle $\xi \in [a,b]$.

Fall 2: $\displaystyle\int_a^b g > 0$. Da f stetig und $[a,b]$ kompakt, existieren $m := \min\limits_{[a,b]} f(x),\;\; M := \max\limits_{[a,b]} f(x)$.

$$\begin{aligned}&\forall x \in [a,b] : mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)\\ \overset{\text{Monotonie}}{\Rightarrow}\quad & \int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x\\ \Rightarrow\quad & m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g} \leq M\\ \overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow}\quad & \exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g}.\end{aligned}$$

□

10.42 Hilfssatz: Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, f monoton fallend und $f(x) \geq 0$ auf $[a,b]$. Dann
$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Fall 1: $f = 0 \;\vee\; g = 0$ auf $[a,b]$. Dann gilt die Aussage für beliebiges $\xi \in [a,b]$.

Fall 2: $f \neq 0 \;\wedge\; g \neq 0 \;\Rightarrow\; f(a) > 0 \;\wedge\; \displaystyle\int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x > 0$ (da $|g|$ stetig). Sei $G(t) := \displaystyle\int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x$. G ist stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$, also existieren $m := \min\limits_{[a,b]} G(x),\;\; M := \max\limits_{[a,b]} G(x)$. Zeige:

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq Mf(a). \tag{$*$}$$

Dann folgt $m \leq \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M$ und mit dem Zwischenwertsatz

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x = G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Schritt 1: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$Zerlegung $Z = \{\xi_0, \ldots \xi_n\}$: $\left| \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} g(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$,

denn:

Sei $\varepsilon > 0$ fest. f ist stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ $\overset{\text{Satz 6.52}}{\Rightarrow}$ f ist gleichmäßig stetig. Wähle $\delta > 0$, so dass

$$\forall x, x' \in [a,b] : |x - x'| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(x')\big| < \frac{\varepsilon}{2\int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x}.$$

Sei Z eine Zerlegung mit $\max\{\xi_j - \xi_{j-1} : j = 1, \ldots, n\} < \delta$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} g(x)\,\mathrm{d}x \right| &\overset{\text{Additivität}}{=} \left| \sum_{j=1}^n \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \big(f(x) - f(\xi_j)\big) g(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \big|f(x) - f(\xi_j)\big| \cdot |g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2\int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} |g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Additivität}}{=} \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Schritt 2: Sei $\varepsilon > 0$ und Z eine Zerlegung aus Schritt 1. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n f(\xi_j) \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} g(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Additivität}}{=} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\big(G(\xi_j) - G(\xi_{j-1})\big) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} G(\xi_j)\big(\underbrace{f(\xi_j) - f(\xi_{j+1})}_{\geq 0}\big) - \underbrace{G(\xi_0)}_{=G(a)=0} f(\xi_0) + \underbrace{G(\xi_n)f(\xi_n)}_{=G(b)f(b)} \\
&\begin{cases} \leq M \sum_{j=0}^{n-1} \big(f(\xi_j) - f(\xi_{j+1})\big) + Mf(b) \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} Mf(a) \\ \geq m \sum_{j=0}^{n-1} \big(f(\xi_j) - f(\xi_{j+1})\big) + mf(b) = mf(a) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{Schritt 1}}{\Rightarrow} mf(a) - \varepsilon < \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{dx} \leq Mf(a) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $(*)$. $\square$

10.43 Zweiter Mittelwertsatz (der Integralrechnung): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und monoton, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,\mathsf{d}x \;=\; f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathsf{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathsf{d}x.$$

Beweis: Fall 1: f monoton fallend. Sei $\widetilde{f}(x) := f(x) - f(b)$. Aus (10.42):

$$\begin{aligned}
\exists \xi \in [a,b] : \quad & \int_a^b \widetilde{f}(x)g(x)\,\mathsf{d}x \;=\; \widetilde{f}(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathsf{d}x \\
\Leftrightarrow \quad & \int_a^b f(x)g(x)\,\mathsf{d}x - f(b)\int_a^b g(x)\,\mathsf{d}x \;=\; \big(f(a)-f(b)\big)\int_a^\xi g(x)\,\mathsf{d}x \\
\Leftrightarrow \quad & \int_a^b f(x)g(x)\,\mathsf{d}x \;=\; f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathsf{d}x + f(b)\bigg(\int_a^b g(x)\,\mathsf{d}x - \int_a^\xi g(x)\,\mathsf{d}x\bigg)
\end{aligned}$$

Fall 2: f monoton wachsend: Dasselbe mit $\widetilde{f}(x) := f(b) - f(x)$. $\square$

10.8 Das Restglied im Satz von Taylor

10.44 Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $(n+1)$-Mal stetig differenzierbar, $x_0 \in]a,b[$. Dann gilt

$$f(x) \;=\; \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_n(x_0,x) \text{ für } x \in]a,b[$$

mit

$$R_n(x_0,x) \;=\; \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathsf{d}t.$$

Beweis: Induktionsanfang $n = 0$:

$$R_0(x_0,x) = \int_{x_0}^x f'(t)\mathsf{d}t = f(x) - f(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) = f(x_0) + R(x_0,x).$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
f(x) \overset{\text{Induktions-}}{\underset{\text{vorrauss.}}{=}} \; & \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathsf{d}t \\
= \; & \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{1}{n!}\Big(-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\Big|_{t=x_0}^x \\
& + \int_{x_0}^x \frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\mathsf{d}t\Big) \\
= \; & \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\mathsf{d}t \\
= \; & \sum_{j=0}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_{n+1}(x_0,x).
\end{aligned}$$

$\square$

10.45 Restgliedformel (Schlömilch): Voraussetzung wie Satz 10.44. Dann gilt für $1 \leq p \leq n+1$:

$$\exists \xi \in \,]x_0, x[\, \cup \,[x, x_0[\, : R_n(x_0, x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!}(x-\xi)^{n+1-p}(x-x_0)^p.$$

Für $p = n+1$ ist dies die Restgliedformel von Lagrange (siehe 7.31). Für $p = 1$ ergibt sich die **Restgliedformel von Cauchy**

$$R_n(x_0, x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

Beweis: Fall $x \geq x_0$:

$$\begin{aligned} R_n(x_0, x) \;&=\; \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1-p} f^{(n+1)}(t)\, \underbrace{(x-t)^{p-1}}_{=:g(t)\geq 0}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{Erster Mittelwertsatz}}{\underset{\text{Integralrechnung}}{=}} \frac{1}{n!}(x-\xi)^{n+1-p} f^{(n+1)}(\xi) \underbrace{\int_{x_0}^{x}(x-t)^{p-1}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{p}(x-x_0)^p}. \end{aligned}$$

Fall $x < x_0$: $R_n(x_0, x) \;=\; \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x}^{x_0}(x-t)^{n+1-p} f^{(n+1)}(t)\, \underbrace{\big(-(x-t)^{p-1}\big)}_{=:g(t)\geq 0}\,\mathrm{d}t \;=\; \ldots$ (wie vorher)

□

10.46 Beispiele: 1) Für $-1 < x \leq 1$ gilt

$$\ln(1+x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

2) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ sei

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha}{k}\binom{\alpha-1}{k-1} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0, \text{ also } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Für $-1 < x < 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k.$$

10.9 Uneigentliche Integrale

Ziel: Erweiterung des Integralbegriffs auf offene Intervalle und unbeschränkte Funktionen.

10.47 Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ beliebiges Intervall; $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls für jedes Intervall $[a, b] \subseteq I$ gilt: $f\big|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a, b])$.

10.48 Beispiele: 1) $f : I = \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ist lokal integrierbar.

2) $f : I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist auf I lokal integrierbar.

3) $f \in \mathcal{R}([a,b])$ $\Rightarrow$ f ist auf $[a,b]$ lokal integrierbar.

10.49 Definition: Sei $I = [a,b[\,,\ -\infty < a < b \leq \infty$, $f : I \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann heißt f **uneigentlich integrierbar** über I, falls

$$\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \ =: \ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert. Wir sagen auch: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konvergiert**.

Falls der Grenzwert für $\beta \to b-0$ nicht existiert: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **divergiert**.

Genauso: • $I =]a,b]$, $-\infty \leq a < b < \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

• $I =]a,b[\,,\ -\infty \leq a < b \leq \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ := \ \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \to b-0} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad c \in]a,b[\ \text{beliebig.}$$

Additivität des Integrals $\Rightarrow$ Wert der rechten Seite ist unabhängig von $c \in],a,b[$.

10.50 Beispiele: **1)** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \ = \ 1$, $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ divergiert, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ divergiert,

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \ = \ 2,$

3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \ = \ 1.$

4) Weitere wichtige Beispiele in den Übungen.

10.51 Bemerkung: Ist $f \in \mathcal{R}([a,b])$, dann ist f auf $]a,b[$ lokal integrierbar, und es gilt für beliebiges $c \in]a,b[$:

$$\int_a^b f \ = \ \lim_{\alpha \to a+0} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b \to \beta-0} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$

denn: 10.25 $\Rightarrow$ $F(t) := \displaystyle\int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x$, $c \leq t \leq b$ ist stetig

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) = \lim_{\beta \to b-0} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$

Genauso folgt $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x.$

Additivität $\Rightarrow$ Behauptung.

10.52 Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale: Seien $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Falls

$$\big(\forall x \in [a, b[: |f(x)| \leq g(x)\big) \ \wedge \ \int_a^b g(x)\, \mathsf{d}x \text{ konvergent},$$

dann konvergieren auch $\int_a^b f(x)\, \mathsf{d}x$ und $\int_a^b |f(x)|\, \mathsf{d}x$, und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\, \mathsf{d}x\right| \ \leq \ \int_a^b |f(x)|\, \mathsf{d}x \ \leq \ \int_a^b g(x)\, \mathsf{d}x.$$

Entsprechend für uneigentliche Integrale über $]a, b]$ oder $]a, b[$.

Beweis: Schritt 1: Zeige $\int_a^b f(x)\, \mathsf{d}x = \lim\limits_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\, \mathsf{d}x$ existiert:

Teil a): Sei (β_n) Folge in $[a, b[$, $\beta_n \to b$. Zeige, dass $y_n := \int_a^{\beta_n} f(x)\ \mathsf{d}x$ konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned}
|y_n - y_m| &\overset{\text{Additi-}}{\underset{\text{vität}}{=}} \left|\int_{\beta_m}^{\beta_n} f(x)\ \mathsf{d}x\right| \leq \left|\int_{\beta_m}^{\beta_n} |f(x)|\ \mathsf{d}x\right| \quad \text{(äußerer Betrag nötig falls } \beta_n < \beta_m\text{)} \\
&\overset{|f(x)|\leq g(x)}{\underset{\text{Monotonie}}{\leq}} \left|\int_{\beta_m}^{\beta_n} g(x)\ \mathsf{d}x\right| = \left|\int_a^{\beta_n} g(x)\ \mathsf{d}x - \int_a^{\beta_m} g(x)\ \mathsf{d}x\right| \\
&< \quad \varepsilon \quad \text{für } n, m > N_\varepsilon.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (y_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, also konvergent.

Teil b): $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ist unabhängig von der gewählten Folge (β_n): Ist $(\widetilde{\beta}_n)$ eine weitere Folge in $[a, b[$ mit $\widetilde{\beta}_n \to b$, so betrachte $\beta_1, \widetilde{\beta}_1, \beta_2, \widetilde{\beta}_2, \ldots$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^{\widetilde{\beta}_n} f(x)\ \mathsf{d}x \ = \ \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Schritt 2: Zeige $\int_a^b |f(x)|\, \mathsf{d}x$ ist konvergent: Wende Schritt 1 auf $|f|$ anstelle von f an.

Schritt 3: Beweis der Integralungleichungen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left|\int_a^{\beta_n} f(x)\, \mathsf{d}x\right| \ \leq \ \int_a^{\beta_n} |f(x)|\, \mathsf{d}x \ \leq \ \int_a^b g(x)\, \mathsf{d}x.$$

$\overset{3.60}{\Rightarrow}$ Behauptung. $\square$

10.53 Beispiele: 1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 3x + 2}\, \mathsf{d}x$ ist konvergent.

2) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ fest und $f(x) := x^\gamma\,\mathrm{e}^{-x}$. Wähle $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\gamma-2}}{\mathrm{e}^x} \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \exists K > 0\ \forall x > K : \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \;<\; \varepsilon := 1$$

$$\forall x > K : \big|f(x)\big| \;<\; \big|g(x)\big|$$

$$\overset{\text{Vergleichs-}}{\underset{\text{kriterium}}{\Rightarrow}} \int_1^\infty x^\gamma\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_1^K x^\gamma\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_K^\infty x^\gamma\,\mathrm{e}^{-x} x\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert.}$$

10.54 Integralkriterium für Reihenkonvergenz: Sei $f : [1,\infty[\, \to [0,\infty[$ monoton fallend (Damit ist f lokal integrierbar). Dann gilt:

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ konvergiert.}$$

Beweis: (i) "$\Rightarrow$": Definiere $g(x) := f(n+1)$ für $n \le x < n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow\; 0 \le g(x) \le f(x) \text{ für } x \in [1,\infty[\;\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}\; \int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x \text{ ist konvergent}$$

$$\Rightarrow\; \sum_{k=2}^n f(k) \;=\; \int_1^n g(x)\,\mathrm{d}x \;\overset{n\to\infty}{\to}\; \int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) "$\Leftarrow$": Definiere $g(x) := f(n)$ für $n \le x < n+1$.

$$\Rightarrow\; g(x) \ge 0 \;\wedge\; \int_1^n g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{k=1}^n f(k) \text{ konvergiert für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow\; 0 \;\le\; \int_n^m g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{k=n+1}^m f(k) \;<\; \varepsilon \text{ für } n > m > N_\varepsilon.$$

Sei (b_n) Folge in $[1,\infty[\,$, $b_n \to \infty$, $\varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \exists N' \in \mathbb{N}\ \forall n > N' : b_n > N_\varepsilon + 1$.
Für $n, m > N'$ gilt

$$\left|\int_1^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{b_m} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \;=\; \left|\int_{b_m}^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\underset{K\in\mathbb{N},\ K\ge\max\{b_n,b_m\}}{\overset{g(x)\text{ positiv}}{\le}}\; \int_{N_\varepsilon+1}^K g(x)\,\mathrm{d}x \;<\; \varepsilon$$

$$\Rightarrow\; \int_1^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert.}$$

Ist $(\widetilde{b}_n)$ eine andere Folge mit $\widetilde{b}_n \to \infty$, so folgt wie im letzten Beweis

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_1^{\widetilde{b}_n} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Somit konvergiert $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x \;\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}\; \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert. □

10.55 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k\ln k}$ ist divergent.

10.10 Komplex- und vektorwertige Funktionen

10.56 Erinnerung: Sei $d \in \mathbb{N}$.

$\|.\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \right\| = \left(\sum_{j=1}^{d} v_j^2 \right)^{1/2}$ ist Norm auf $\mathbb{R}^d$,

$\|.\| : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R} : \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \right\| = \left(\sum_{j=1}^{d} |v_j|^2 \right)^{1/2}$ ist Norm auf $\mathbb{C}^d$,

und es gilt für $i = 1, \ldots, d$:

$$|v_i| \;\leq\; \max_{1 \leq j \leq d} |v_j| \;\leq\; \|v\| \;=\; \left(\sum_{j=1}^{d} |v_j|^2 \right)^{1/2} \;\leq\; \sum_{j=1}^{d} |v_j| \;\leq\; d \max_{1 \leq j \leq d} |v_j|. \qquad (*)$$

10.57 Konvergenz: Sei (v_n) Folge in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^d$, $v_n = \begin{pmatrix} (v_n)_1 \\ \vdots \\ (v_n)_d \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ (w_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d/\mathbb{C}^d$.

Es gilt

$$\begin{aligned} v_n \to w \quad &\Leftrightarrow \quad \|v_n - w\| \to 0 \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \forall j = 1, \ldots, d : (v_n)_j \to w_j \\ &\overset{\text{im Fall } \mathbb{C}^d}{\Leftrightarrow} \quad \forall j = 1, \ldots, d : \operatorname{Re}(v_n)_j \to \operatorname{Re} w_j \;\wedge\; \operatorname{Im}(v_n)_j \to \operatorname{Im} w_j . \end{aligned}$$

Das bedeutet: Konvergenz in $\mathbb{R}^d/\mathbb{C}^d$ ist nichts anderes als Konvergenz in $\mathbb{R}$ in jeder Koordinate.

10.58 Vollständigkeit: Entsprechend gelten

(v_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^d$ $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \ldots, d : \big((v_n)_j\big)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$,

(v_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{C}^d$ $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \ldots, d : \big(\operatorname{Re}(v_n)_j\big)_{n \in \mathbb{N}}, \big(\operatorname{Im}(v_n)_j\big)_{n \in \mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$.

Daraus folgt die Vollständigkeit von $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{C}^d$, denn z.B.

$$\begin{aligned} (v_n) \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{R}^d \quad &\Leftrightarrow \quad \forall j = 1, \ldots, d : \big((v_n)_j\big)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{R}, \\ &\overset{\mathbb{R} \text{ ist vollständig}}{\Rightarrow} \quad \forall j = 1, \ldots, d : (v_n)_j \to w_j \text{ in } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} (v_n)_1 \\ \vdots \\ (v_n)_d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10.59 Rechenregeln für konvergente Folgen: Seien $v_n \to \widetilde{v},\ w_n \to \widetilde{w}$ in $\mathbb{R}^d/\mathbb{C}^d$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ und $x_n \to x$ in $\mathbb{R}/\mathbb{C}$. Dann gelten:

1) $\alpha v_n + \beta w_n \;\to\; \alpha \widetilde{v} + \beta \widetilde{w}$,

2) $\langle v_n, w_n \rangle \;\to\; \langle \widetilde{v}, \widetilde{w} \rangle := \sum_{j=1}^{d} \widetilde{v}_j \overline{\widetilde{w}_j}$ (Skalarprodukt),

3) $\|v_n\| \;\to\; \|\tilde{v}\|$,

4) $x_n \cdot v_n \;\to\; x \cdot \tilde{v}$.

10.60 Stetigkeit: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}^d/\mathbb{C}^d$, $t_0 \in D$. Dann heißt f stetig in t_0, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall t \in D : |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$$

oder äquivalent, wenn für jede Folge (s_n) in D gilt:

$$s_n \to t_0 \;\Rightarrow\; f(s_n) \to f(t_0).$$

Nach $(*)$ gilt

$$\begin{aligned} f(s_n) \to f(t_0) \;\Leftrightarrow\; \forall j = 1, \ldots, d : \;& f_j(s_n) \to f_j(t_0) \\ & \text{bzw. } \operatorname{Re} f_j(s_n) \to \operatorname{Re} f_j(t_0) \;\wedge\; \operatorname{Im} f_j(s_n) \to \operatorname{Im} f_j(t_0). \end{aligned}$$

Also gilt

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \text{ ist stetig in } t_0 \;\Leftrightarrow\; \forall j = 1, \ldots, d : \; \begin{array}{l} f_j \text{ ist stetig in } t_0 \\ \text{bzw. } \operatorname{Re} f_j,\ \operatorname{Im} f_j \text{ sind stetig in } t_0. \end{array}$$

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich: Sind f, g stetig in t_0 und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$, so sind die Funktionen $t \mapsto \alpha f(t) + \beta g(t)$, $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ und $t \mapsto \|f(t)\|$ stetig in t_0.

10.61 Ableitung: $f :]a, b[\to \mathbb{R}^d/\mathbb{C}^d$ heißt **differenzierbar** in $t_0 \in]a, b[$, falls

$$f'(t_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existiert; f heißt **differenzierbar**, falls $\forall t_0 \in]a, b[: f$ ist differenzierbar in t_0.

Nach $(*)$:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \text{ ist differenzierbar in } t_0 \;\Leftrightarrow\; \forall j = 1, \ldots, d : \; \begin{array}{l} f_j \text{ ist differenzierbar in } t_0 \\ \text{bzw. } \operatorname{Re} f_j,\ \operatorname{Im} f_j \text{ sind differen-} \\ \text{zierbar in } t_0. \end{array}$$

Außerdem gilt

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_d' \end{pmatrix}.$$

10.62 Beispiele: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto t^2 + \mathrm{i}\mathrm{e}^{3t} \;\Rightarrow\; f'(t) = 2t + \mathrm{i}3\mathrm{e}^{3t}$.

2) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$ für $t \in]0, 2\pi[$.

10.63 Bemerkung: Ab jetzt nur noch Funktionen $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}^d$. Für $\mathbb{C}^d$ geht alles analog.

10.64 Ableitungsregeln: Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}^d$ differenzierbar in $t_0 \in]a, b[$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann

1) Linearität: $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar in t_0 mit $(\alpha f + \beta g)'(t_0) = \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0)$.

2) Produktregel für Skalarprodukt: $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R} : t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ ist differenzierbar in t_0, und es gilt für $t = t_0$:

$$\langle f(t), g(t)\rangle' = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle\,,$$

denn mit den Rechenregeln für reellwertige Funktionen folgt

$$\left(\sum_{j=1}^{d} f_j(t)\cdot g_j(t)\right)' \;=\; \sum_{j=1}^{d} f_j'(t)\cdot g(t) + \sum_{j=1}^{d} f_j(t)\cdot g'(t).$$

3) Produktregel für skalare Multiplikation: Ist zusätzlich $\alpha :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in t_0, so gilt

$$\big(\alpha \cdot f\big)'(t_0) \;=\; \alpha'(t_0)\cdot f(t_0) + \alpha(t_0)\cdot f'(t_0),$$

denn

$$\begin{pmatrix} \alpha(t)\cdot f_1(t) \\ \vdots \\ \alpha(t)\cdot f_d(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha'(t)\cdot f_1(t) + \alpha(t)\cdot f_1'(t) \\ \vdots \\ \alpha'(t)\cdot f_d(t) + \alpha(t)\cdot f_d'(t) \end{pmatrix}.$$

4) Kettenregel: Ist zuätzlich $\varphi :]c, d[\to]a, b[$ differenzierbar in $s_0 \in]c, d[$ und $\varphi(s_0) = t_0$, so ist $f \circ \varphi$ differenzierbar in s_0, und es gilt

$$(f \circ \varphi)'(s_0) \;=\; \varphi'(s_0)\cdot f'\big(\varphi(s_0)\big).$$

Nachweis durch Anwendung der Kettenregel in jeder Koordinate von $f \circ \varphi$.

10.65 Bemerkung: Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt nicht für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$. Beispiel:

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(2\pi),\;\; f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \neq 0 \text{ für } t \in]0, 2\pi[$$

$\Rightarrow$ Es gibt kein $\xi \in]0, 2\pi[$, so dass $\dfrac{1}{2\pi - 0}\big(f(2\pi) - f(0)\big) = f'(\xi)$.

10.66 Lineare Algebra: Für $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2}, \\ \langle x, y\rangle &= \sum_{j=1}^{d} x_j\, y_j, \text{ und } \|x\|^2 = \langle x, x\rangle\,, \\ |\langle x, y\rangle| &\le \|x\| \cdot \|y\| \text{ (Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung).} \end{aligned}$$

10.67 Satz: Sei $d \in \mathbb{N}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig, in $]a,b[$ differenzierbar. Dann

$$\big\|f(b) - f(a)\big\| \;\le\; (b-a) \sup_{a \le t \le b} \|f'(t)\|.$$

Beweis: $\varphi(t) := \langle f(t), f(b) - f(a)\rangle$

$\Rightarrow$ $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig, in $]a,b[$ differenzierbar, $\varphi'(t) \overset{\text{Produktregel f.}}{\underset{\text{Skalarprodukt}}{=}} \langle f'(t), f(b) - f(a)\rangle + 0.$

Mittelwertsatz der Diffrechnung für reellwertige Funktionen: $\exists \xi \in]a,b[: \dfrac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b-a} = \varphi'(\xi)$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle f(b), f(b) - f(a)\rangle - \langle f(a), f(b) - f(a)\rangle}_{=\langle f(b)-f(a), f(b)-f(a)\rangle = \|f(b)-f(a)\|^2} = (b-a)\,\langle f'(\xi), f(b) - f(a)\rangle \overset{\text{Cauchy-Schwarz-}}{\underset{\text{Bunjakowski}}{\le}} (b-a)\big\|f'(\xi)\big\| \cdot \big\|f(b) - f(a)\big\|$$

$$\overset{\text{auch im Fall } f(b)=f(a)}{\Rightarrow} \quad \|f(b) - f(a)\| \le (b-a)\|f'(\xi)\| \le (b-a) \sup_{a \le t \le b} \|f'(t)\|.$$

□

10.68 Ableitung auf abgeschlossenen Intervallen: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$.

1) f heißt **linksseitig differenzierbar** in $t = b$ bzw. **rechtsseitig differenzierbar** in $t = a$, falls

$$f'(b) := \lim_{t \to b-0} \frac{1}{t-b}\big(f(t) - f(b)\big) \quad \textbf{bzw.} \quad f'(a) := \lim_{t \to a+0} \frac{1}{t-a}\big(f(t) - f(a)\big)$$

existiert.

2) f heißt **differenzierbar auf** $[a,b]$, falls f differenzierbar in $]a,b[$, linksseitig differenzierbar in b und rechtsseitig differenzierbar in a ist. Die Ableitungsfunktion f' ist dann auf ganz $[a,b]$ definiert.

3) f heißt **stetig differenzierbar** auf $[a,b]$, falls f differenzierbar auf $[a,b]$ und $f' : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig ist.

4) Wir setzen

$$C^0\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big) := C\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big) := \big\{f : [a,b] \to \mathbb{R}^d \;\big|\; f \text{ ist stetig auf } [a,b]\big\},$$

und für $k \in \mathbb{N}$

$$C^k\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big) := \big\{f : [a,b] \to \mathbb{R}^d \;\big|\; f \text{ ist stetig differenzierbar auf } [a,b] \;\wedge\; f' \in C^{k-1}\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)\big\}.$$

$C^k(\ldots)$ ist die Menge aller Funktionen, deren Ableitungen $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ stetig sind.

10.69 Beispiele: **1)** Ist f differenzierbar in $]a,b[$ und $[c,d] \subseteq]a,b[$, so ist f differenzierbar auf $[c,d]$.

2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$ ist in $t = 0$ nicht rechtseitig differenzierbar.

10.70 Bemerkungen: **1)** Sei $k \in \mathbb{N}_0$ fest. Dann ist

$$\|f\|_{k,\infty} := \sum_{j=0}^{k} \max\left\{\left\|f^{(j)}(t)\right\| : a \le t \le b\right\} \text{ für } f \in C^k\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$$

eine Norm, und $\big(C^k\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big), \|.\|_{k,\infty}\big)$ ist ein Banachraum.

2) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig, in $]a,b[$ differenzierbar, und existiert $\lim\limits_{t \to b-0} f'(t)$, so ist f in $x = b$ linksseitig differenzierbar, und es gilt

$$f'(b) = \lim_{t \to b-0} f'(t).$$

Entsprechend in $t = a$.

10.71 Integralrechnung:

1) $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix} : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ ist Treppenfunktion $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \dots d : g_j$ ist Treppenfunktion.

2) Das Integral über eine Treppenfunktion g ist definiert durch

$$\int_a^b g := \begin{pmatrix} \int_a^b g_1 \\ \vdots \\ \int_a^b g_d \end{pmatrix}.$$

3) Für eine Folge (g_n), $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ gilt: $g_n \to f$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[a,b]$

$\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \dots d : (g_n)_j \to f_j$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[a,b]$,

denn

$$\big|(g_n)_j(t) - f_j(t)\big| \overset{(*)}{\le} \big\|g_n(t) - f(t)\big\| \overset{(*)}{\le} d \max_{1 \le j \le d} \big|(g_n)_j(t) - f_j(t)\big|.$$

4) $f[a,b] \to \mathbb{R}^d$ heißt **Regelfunktion**, falls eine Folge (g_n) von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ existiert, so dass $g_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Schreibe $f \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$. Dann

$$\int_a^b f := \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \int_a^b (g_n)_1 \\ \vdots \\ \int_a^b (g_n)_d \end{pmatrix} \overset{10.57}{=} \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b (g_n)_1 \\ \vdots \\ \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b (g_n)_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1 \\ \vdots \\ \int_a^b f_n \end{pmatrix}.$$

Insbesondere existiert der Grenzwert und ist unabhängig von der gewählten Folge (g_n), siehe 10.8.

5) Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung: Sei $f \in C([a,b] \to \mathbb{R}^d)$ und $F(t) := \int_a^t f(s)\,\mathsf{d}s$ für $a \le s \le b$. Dann ist F differenzierbar in $]a,b[$ mit $F'(t) = f(t)$ für $a < t < b$ denn $f \in C([a,b] \to \mathbb{R}^d) \;\Rightarrow\; \forall j = 1,\dots d : f_j$ ist stetig auf $[a,b]$, und

$$f(t) \overset{4)}{=} \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(s)\,\mathsf{d}s \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(s)\,\mathsf{d}s \end{pmatrix} \Rightarrow f'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\int_a^b f_1(s)\,\mathsf{d}s \\ \vdots \\ \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\int_a^b f_d(s)\,\mathsf{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_d(t) \end{pmatrix} = f(t).$$

6) Stammfunktion und Integralberechnung: Ist $f \in C\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$ und F eine Stammfunktion von f (d.h. F ist stetig auf $[a,b]$ und in $]a,b[$ differenzierbar mit $F' = f$), so gilt

$$\int_c^d f = F(d) - F(c) \quad \text{für } a \le c \le d \le b.$$

10.72 Beispiele: 1) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathsf{d}t = \begin{pmatrix} \cos t\big|_0^{2\pi} \\ \sin t\big|_0^{2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $f(t) = t^2 + \mathrm{i}\frac{5}{t} \;\Rightarrow\; \int_1^2 f(t)\,\mathsf{d}t = \big[\frac{t^3}{3} + \mathrm{i}5\ln t\big]_1^2 = \frac{7}{3} + \mathrm{i}5\ln 2.$

10.73 Satz: Ist $f \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$, dann gilt auch $\|f(.)\| \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}\big)$ und

$$\Big\|\int_a^b f\Big\| \le \int_a^b \|f\|.$$

Beweis: 1) Zeige $\|f(.)\| \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}\big)$. Wähle Folge von Treppenfunktionen $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ mit $g_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \|g_n(.)\| \text{ ist Treppenfunktion auf } [a,b], \\ \|g_n(.)\| \to \|f(.)\| \text{ gleichmäßig auf } [a,b], \text{ denn} \\ \big|\|g_n(t)\| - \|f(t)\|\big| \le \|g_n(t) - f(t)\| \end{cases}$$
$$\Rightarrow \|f(.)\| \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}\big).$$

2) Beweis der Ungleichung. Vorüberlegung: Für $y \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\Big\langle \int_a^b f(t)\,\mathsf{d}t, y \Big\rangle = \sum_{j=1}^d \int_a^b f_j(t)y_j\,\mathsf{d}t = \int_a^b \Big(\sum_{j=1}^d f_j(t)y_j\Big)\,\mathsf{d}t = \int_a^b \langle f(t), y\rangle\,\mathsf{d}t.$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \int_a^b f \right\|^2 = \left\langle \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \underbrace{\int_a^b f}_{=:y} \right\rangle = \int_a^b \left\langle f(t), y \right\rangle \mathrm{d}t$$

$$\underset{\text{Monotonie}}{\overset{\text{CSB}}{\leq}} \int_a^b \|f(t)\| \cdot \|y\|\,\mathrm{d}t \overset{\text{Linearität}}{=} \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \cdot \|y\|.$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \int_a^b f \right\| \cdot \left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \cdot \left\| \int_a^b f \right\|$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

□

10.11 Kurven im $\mathbb{R}^d$

10.74 Definition: Seien $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $f \in C\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$.

1) Die Menge $K := \mathrm{Bild}\,(f)$ heißt **Kurve** im $\mathbb{R}^d$, $\big(f, [a,b]\big)$ heißt **Parameterdarstellung** von K. Ist $f(a) = f(b)$, so heißt K **geschlossen**.

2) Ist $f\big|_{[a,b[}$ injektiv, so heißt K **Jordan-Kurve**.

10.75 Bemerkungen: 1) Die Parameterdarstellung einer Kurve induziert einen Durchlaufungssinn.

2) Kurven mit stetiger Parameterdarstellung können ziemlich verrückt sein. Z.B. füllen die Peano-Kurve oder die Hilbert-Kurve eine zweidimensionale Fläche komplett aus.

10.76 Geometrische Bedeutung der Ableitung: Sei $K = \mathrm{Bild}(f)$, f differ4enzierbar in $t_0 \in [a,b]$, d.h.

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad \text{existiert.}$$

$\dfrac{1}{t-t_0}\big(f(t) - f(t_0)\big)$ ist Richtungsvektor der Sekanten durch $f(t)$ und $f(t_0)$, $f'(t_0)$ ist ein Richtungsvektor der Tangente an K im Punkt $f(t_0)$.

Oder genauer (vgl. 7.3)

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + o(1) \quad \text{für } t \to t_0,$$

d.h. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d : t \mapsto f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ ist Schmiegegerade an K.

$\|f'(t_0)\|$ gibt die „Momentangeschwindigkeit“ an, mit der K durchlaufen wird.

10.77 Beispiele: **1)** $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$.

2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t^2) \\ \sin(2\pi t^2) \end{pmatrix}$.

3) $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos(2\pi t) \\ t\sin(2\pi t) \end{pmatrix}$ (Archimedische Schneckenlinie).

4) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } -1 \le t < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} & \text{für } 0 \le t \le 1. \end{cases}$

(f ist stetig differenzierbar, aber K hat eine Ecke.)

10.78 Definition: Sei $\big(f,[a,b]\big)$ Parameterdarstellung von K, $t_0 \in [a,b]$. Existiert $f'(t_0)$ und gilt $f'(t_0) \neq 0$, so heißt

$$T_f(t_0) \;:=\; \frac{1}{\|f'(t_0)\|}\, f'(t_0)$$

der **Tangenteneinheitsvektor** im Punkt $f(t_0)$.

10.79 Definition: Zwei Parameterdarstellungen $\big(f,[a,b]\big)$, $\big(g,[c,d]\big)$ einer Kurve K heißen **äquivalent**, falls eine Abbildung

$$\varphi \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}\big) \text{ mit } \varphi'(t) > 0 \text{ auf } [a,b],\ \varphi(a) = c \text{ und } \varphi(b) = d$$

existiert, so dass $f = g \circ \varphi$.
Insbesondere ist $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ bijektiv, und es gelten

$$\varphi^{-1} \in C^1\big([c,d] \to \mathbb{R}\big) \text{ mit } (\varphi^{-1})'(s) > 0 \text{ auf } [c,d],\ \varphi^{-1}(c) = a \text{ und } \varphi^{-1}(d) = b$$

und $g = f \circ \varphi^{-1}$.

10.80 Satz: Sind $\big(f,[a,b]\big)$, $\big(g,[c,d]\big)$ äquivalente Parameterdarstellungen einer Kurve K, $t_0 \in [a,b]$, g differenzierbar in $\varphi(t_0)$ mit $g'\big(\varphi(t_0)\big) \neq 0$, so ist f differenzierbar in t_0, und es gelten $f'(t_0) \neq 0$ und

$$\begin{aligned} T_f(t_0) &= \frac{1}{\|f'(t_0)\|}\, f'(t_0) \\ &\overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{\|g'\big(\varphi(t_0)\big)\cdot\varphi'(t_0)\|}\, g'\big(\varphi(t_0)\big)\cdot\varphi'(t_0) \\ &\overset{\varphi'(t_0)>0}{=} \frac{1}{\|g'\big(\varphi(t_0)\big)\|}\, g'\big(\varphi(t_0)\big) \\ &= T_g\big(\varphi(t_0)\big). \end{aligned}$$

D.h. der Tangenteneinheitsvektor im Punkt $f(t_0) = g\big(\varphi(t_0)\big)$ ist also unabhängig von der (äquivalenten) Parameterdarstellung.

10.81 Definition: Sei K eine Kurve im $\mathbb{R}^d$.

1) Existiert eine Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$ mit $f \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$ und $f'(t) \neq 0$ auf $[a,b]$, so heißt K **glatt**.
Insbesondere: K glatt $\Rightarrow$ T_f stetig auf $[a,b]$, d.h. K hat keine Ecken.

2) K heißt **stückweise glatt**, falls es eine Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$ und eine Zerlegung $Z = \{t_0,\ldots,t_m\}$ von $[a,b]$ gibt, so dass

$$f\big|_{[t_{j-1},t_j]} \in C^1\big([t_{j-1},t_j] \to \mathbb{R}^d\big) \text{ und } \big(f\big|_{[t_{j-1},t_j]}\big)'(t) \neq 0 \text{ für } t_{j-1} \leq t \leq t_j \ (j=1,\ldots,m).$$

10.82 Beispiel: $f:[0,2] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 1$, $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix}$ für $1 < t \leq 2$ ist stückweise glatt und

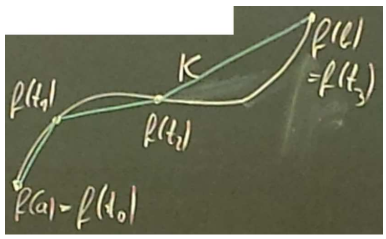
$$\big(f\big|_{[0,1]}\big)'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \big(f\big|_{[1,2]}\big)'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.83 Definition: Sei K Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$.

1) Falls

$$\exists M > 0 \ \forall \text{ Zerlegungen } Z = \{t_0,\ldots,t_n\} \text{ von } [a,b] : L_Z(K) := \sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \leq M,$$

so heißt K **rektifizierbar**.



2) Ist K rektifizierbar, so heißt

$$L(K) \ := \ \sup\big\{L_Z(K) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\big\}$$

die **Bogenlänge** von K.

10.84 Satz: Sei K eine glatte Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $f \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$. Dann ist K rektifizierbar, und es gilt

$$L(K) \ = \ \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Beweis: **1)** Zeige „$\leq$“: Sei $Z = \{t_0,\ldots,t_n\}$ Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L_Z(K) \quad &= \quad \sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \ = \ \sum_{j=1}^{n} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t) \, \mathrm{d}t \right\| \\ &\overset{10.73}{\leq} \quad \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t \ \overset{\text{Additivität}}{=} \ \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t \\ \Rightarrow L(K) \quad &\leq \quad \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2) Zeige „$\geq$“: Sei $\varepsilon > 0$ fest. f' stetig auf kompaktem Intervall $\overset{6.52}{\Rightarrow}$ f' ist gleichmäßig stetig:

$$\Rightarrow\ \exists \delta > 0\ \forall s,t \in [a,b] : |s-t| < \delta \Rightarrow \|f'(s) - f'(t)\| < \varepsilon$$

Wähle eine Zerlegung $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ von $[a,b]$ mit $\max\limits_{1 \leq j \leq n} |t_j - t_{j-1}| < \delta$. Dann

$$\|f'(t)\| \ \leq\ \|f'(t_j)\| + \|f'(t) - f'(t_j)\| \ <\ \|f'(t_j)\| + \varepsilon \text{ für } t_{j-1} \leq t \leq t_j$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t \ &\leq\ \|f'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
&=\ \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big(f'(t_j) - f'(t) + f'(t)\big) \,\mathrm{d}t \right\| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
&\leq\ \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{\|f'(t_j) - f'(t)\|}_{<\varepsilon} \,\mathrm{d}t + \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t) \,\mathrm{d}t \right\| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
&\leq\ \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| + 2\varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
\Rightarrow \int_a^b \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t \ &=\ \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t \\
&\leq\ \underbrace{\sum_{j=1}^n \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|}_{=L_Z(K)} + 2\varepsilon(b-a) \\
&\leq\ L(K) + 2\varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. $\square$

10.85 Satz: Äquivalente Parameterdarstellungen einer Kurve K ergeben dieselbe Länge $L(K)$.

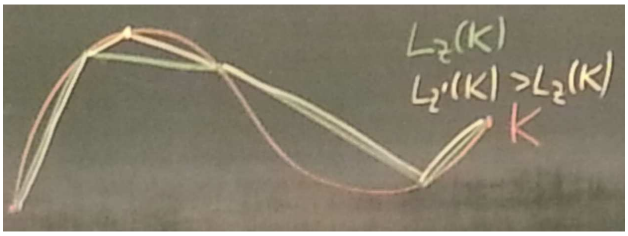
Beweis: Seien $\big(f, [a,b]\big)$ und $\big(g, [c,d]\big)$ zwei äquivalente Parameterdarstellungen von K und $L^{(f)}(K)$, $L^{(g)}(K)$ die durch f bzw. g definierte Länge von K. Ist $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so ist $Z' := \{\varphi(t_0), \ldots, \varphi(t_n)\}$ eine Zerlegung von $[c,d]$ und es gilt

$$L_Z^{(f)}(K) \ =\ \sum_{j=1}^n \big\|f(t_j) - f(t_{j-1})\big\| \ \overset{f(t)=g(\varphi(t))}{=}\ \sum_{j=1}^n \big\|g\big(\varphi(t_j)\big) - g\big(\varphi(t_{j-1})\big)\big\| \ \leq\ L^{(g)}(K).$$

$\Rightarrow\ L^{(f)}(K) = \sup\limits_Z L_Z^{(f)}(K) \leq L^{(g)}(K)$.
Genauso folgt $L^{(g)}(K) \leq L^{(f)}(K)$. $\square$

10.86 Hilfssatz: Ist $\big(f, [a,b]\big)$ Parameterdarstellung von K, und sind Z, Z' Zerlegungen von $[a,b]$ mit $Z \subseteq Z'$, so gilt $L_Z(K) \leq L_{Z'}(K)$.

Beweis: Klar nach Definition von $L_Z(K)$ und Dreiecksungleichung für die Norm.



□

10.87 Satz: Sei K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f, [a,b]\big)$. Ist $a < c < b$ und $K_1 := f([a,c]),\ K_2 := f([c,b])$, so sind K_1, K_2 mit Parameterdarstellungen $\big(f,[a,c]\big),\ \big(f,[c,b]\big)$ rektifizierbare Jordan-Kurven, und es gilt

$$L(K_1) + L(K_2) \;=\; L(K).$$

Beweis: **1)** $K_1,\ K_2$ sind Jordan-Kurven, da $f\big|_{[a,b[}$ injektiv ist.

2) Zeige $L(K_1) + L(K_2) \le L(K)$: Seien $Z_1 = \{a = t_0, \ldots, t_n = c\}$, $Z_2 = \{c = s_0, \ldots, s_m = b\}$ Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$. Dann ist $Z := Z_1 \cup Z_2$ Zerlegung von $[a,b]$, und es gilt

$$L_{Z_1}(K_1) + L_{Z_2}(K_2) \;=\; L_Z(K) \;\le\; L(K).$$

$\Rightarrow$ K_1, K_2 sind rektifizierbar, und es gilt

$$L(K_1) + L(K_2) \;=\; \sup_Z L_Z(K_1) + \sup_{Z'} L_{Z'}(K_2) \;=\; \sup_{Z,Z'} \big(L_Z(K_1) + L_{Z'}(K_2)\big) \;\le\; L(K).$$

3) Zeige $L(K_1) + L(K_2) \ge L(K)$: Sei $\varepsilon > 0$ fest.
Wähle eine Zerlegung $\{t_0, \ldots, t_n\}$ von $[a,b]$ mit $L_Z(K) > L(K) - \varepsilon$.
O.B.d.A. kann $c \in Z$ angenommen werden, denn andernfalls betrachte $Z' := Z \cup \{c\}$. Dann gilt nach letztem Hilfssatz

$$L_{Z'}(K) \;\ge\; L_Z(K) \;>\; L(K) - \varepsilon.$$

Zerlege Z in zwei Zerlegungen Z_1 von $[a,c]$ und Z_2 von $[c,b]$. Dann folgt

$$L_{Z_1}(K_1) + L_{Z_2}(K_2) \;=\; L_Z(K) \;>\; L(K) - \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ $L(K_1) + L(K_2) \ge L(K) - \varepsilon$.
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $L(K_1) + L(K_2) \ge L(K)$.

□

10.88 Satz: Sei K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$ und sei $K_t := f([a,t])$ mit Parameterdarstellung $\big(f,[a,t]\big)$ für $a \le t \le b$ und

$$L(t) := L(K_t) \text{ für } a \le t \le b.$$

Dann gelten:

1) L ist streng monoton wachsend,

2) L ist stetig,

3) $\mathrm{Bild}\,(L) = [0, L(K)]$.

4) Falls zusätzlich K glatt ist und $f \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}^n\big)$, dann ist L differenzierbar auf $[a,b]$ mit $L'(t) = \|f'(t)\|$ für $a \le t \le b$.

Beweis: 1) Für $t \in [a,b[\,,\ h>0,\ t+h \le b$ gilt

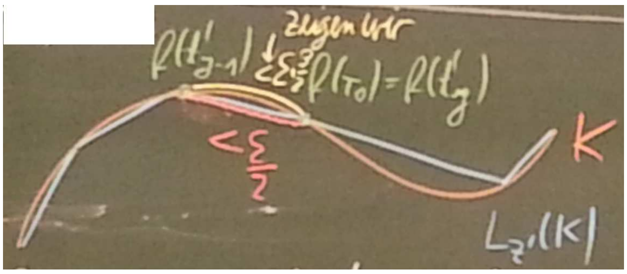
$$L(t+h) - L(t) \overset{\text{letzter}}{\underset{\text{Satz}}{=}} L(K'),\ K' = f\big([t,t+h]\big).$$

$$L(K') \ge \big\|f(t+h) - f(t+\tfrac{h}{2})\big\| + \underbrace{\big\|f(t+\tfrac{h}{2}) - f(t)\big\|}_{>0 \text{ da } K \text{ Jordan-Kurve}} > 0 \;\Rightarrow\; L(t+h) > L(t).$$

2) Schritt 1: Sei $\tau_0 \in\,]a,b]$. Zeige $\lim\limits_{t \to \tau_0 - 0} L(t) = L(\tau_0)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle Zerlegung Z mit $L_Z(K) > L(K) - \frac{\varepsilon}{2}$.
f gleichmäßig stetig (Satz 6.52) $\Rightarrow\ \exists \delta > 0\ \forall t,t' \in [a,b] : |t-t'| < \delta \Rightarrow \big\|f(t) - f(t')\big\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ergänze Z durch Zwischenstellen zu $Z' = \{t'_0, \dots, t'_m\}$, so dass

$$\max_{1 \le j \le m} |t'_j - t'_{j-1}| < \delta \text{ und } \tau_0 \in Z',\ \tau_0 = t'_J.$$

Nach letztem Hilfssatz: $L_{Z'}(K) \ge L_Z(K) > L(K) - \frac{\varepsilon}{2}$.



Setze $K_j := f\big([t'_{j-1}, t'_j]\big)$ für $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ 0 &\le L(K_J) - \underbrace{\big\|f(t'_J) - f(t'_{J-1})\big\|}_{<\varepsilon/2} \\
&\le \sum_{j=1}^{m} \Big(L(K_j) - \big\|f(t'_j) - f(t'_{j-1})\big\|\Big) \\
&= L(K) - L_{Z'}(K) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \\
\Rightarrow L(K_J) &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Für $t'_{J-1} \le t \le t'_J = \tau_0$ folgt

$$0 \overset{L \text{ monoton}}{\le} L(\tau_0) - L(t) \overset{L \text{ monoton}}{\le} L(t'_J) - L(t'_{J-1})) = L(K_J) < \varepsilon.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to\tau_0-0} L(t) = L(\tau_0)$.
Genauso folgt $\lim\limits_{t\to\tau_0+0} L(t) = L(\tau_0)$ für $\tau_0 \in [a,b[$.
Dies beweist die Stetigkeit von L auf $[a,b]$.

3) Klar

4) $L(t) \overset{\text{Satz 10.84}}{=} \displaystyle\int_0^t \|f'(s)\|\,\mathrm{d}s \ \wedge\ \|f'(.)\|$ stetig $\overset{\text{Hauptsatz}}{\Rightarrow}$ $L'(t) = \|f'(t)\|$ für $a < t < b$.
Mit 10.70, Teil 2) folgt $L'(t) = \|f'(t)\|$ für $a \le t \le b$. □

10.89 Definition: Sei K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$. Dann heißt

$$\big(g,[0,L(K)]\big) \text{ mit } g := f \circ L^{-1}$$

Bogenlängenparametrisierung von K.

10.90 Satz: **1)** Äquivalente Parameterdarstellung führen zur selben Bogenlängenparametrisierung.

2) Ist K glatt, so ist die Bogenlängenparametrisierung $g : [0,L(K)] \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar auf $[0,L(K)]$, und es gilt $\|g'(t)\| = 1$ für $0 \le t \le L(K)$. Insbesondere ist der Tangenteneinheitsvektor im Punkt $g(s)$ gegeben durch $T_g(s) = g'(s)$.

Beweis: **1)** Klar nach Satz 10.85.

2) Sei $\big(f,[a,b]\big)$ eine C^1-Parametrisierung von K mit $f'(t) \ne 0$ auf $[a,b]$.
Satz 10.88 $\Rightarrow$ $L : [a,b] \to [0,L(K)]$ ist bijektiv und differenzierbar.
Satz 6.69 $\Rightarrow$ L^{-1} ist stetig.
Satz 7.15 $\Rightarrow$ L^{-1} ist differenzierbar in $]0,L(K)[$ mit

$$(L^{-1})'(s) = \frac{1}{L'\big(L^{-1}(s)\big)} \overset{10.88}{=} \frac{1}{\big\|f'\big(L^{-1}(s)\big)\big\|}\,.$$

Da L^{-1} stetig auf $[0, L(K)]$ und $(L^{-1})'$ stetig fortsetzbar auf $[0, L(K)]$ ist, folgt mit Bemerkung 10.70, dass L^{-1} auf $[0, L(K)]$ differenzierbar ist. Dann ist auch $g = f \circ L^{-1}$ differenzierbar, und es folgt

$$\|g'(s)\| \overset{\text{Kettenregel}}{=} \big\|(L^{-1})'(s) \cdot f'\big(L^{-1}(s)\big)\big\| = \frac{1}{\big\|f'\big(L^{-1}(s)\big)\big\|} \cdot \big\|f'\big(L^{-1}(s)\big)\big\| = 1$$

für $0 \leq s \leq L(K)$. □

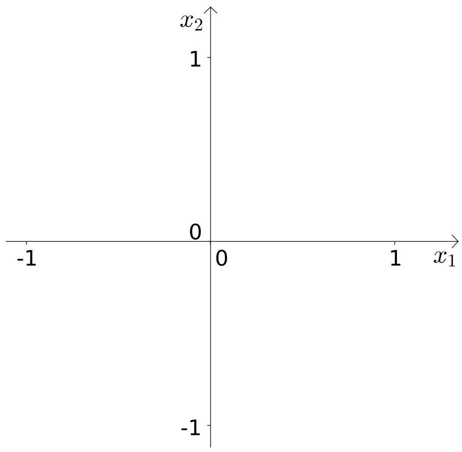
10.91 Beispiel: Sei $r > 0$ fest, $f(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$.
$\Rightarrow$ $K = f([0, 2\pi])$ ist Kreis um $(0,0)$ mit Radius r.
$L(t) = \int_0^t \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^t r\,\mathrm{d}t = rt \;\Rightarrow\; L^{-1}(s) = \frac{1}{r}s.$
$\Rightarrow$ Bogenlängenparametrisierung von K:

$$g(s) = \begin{pmatrix} r\cos\frac{s}{r} \\ r\sin\frac{s}{r} \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq s \leq L(K) = 2\pi r.$$

10.12 Die trigonometrischen Funktionen

10.92 Satz: Der Umfang des Einheitskreises K ist

$$L(K) = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$



Beweis: $K' :=$ Viertelkreis im 1. Quadranten,
Parameterdarstellung $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$.
f ist als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen stetig.
Ist K' rektifizierbar?

Betrachte K_b mit Parametrisierung $\big(f, [0, b]\big)$ für festes $b \in\,]0, 1[$.
K_b ist glatt, also rektifizierbar, und

$$L(K_b) = \int_0^b \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}t = \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Für $0 \leq t < 1$ gilt $0 \leq t^2 < t < 1 \;\Rightarrow\; 0 < 1-t < 1-t^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-t}}$.
$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ konvergiert $\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}$ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ konvergiert.
$\Rightarrow$ $L(K_b) \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ für $0 < b < 1$.

Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ Zerlegung von $[0,1]$. Dann ist $Z' = \{t_0, \ldots, t_{n-1}\}$ Zerlegung von $[0, t_{n-1}]$, und es folgt

$$\begin{aligned} L_Z(K) &= \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \big\| f(t_j) - f(t_{j-1}) \big\|}_{= L_{Z'}(K_{t_{n-1}})} + \big\| \underbrace{f(t_n)}_{=f(1)=0} - f(t_{n-1}) \big\| \\ &\leq L(K_{t_{n-1}}) + \underbrace{\big\| f(t_{n-1}) \big\|}_{\leq 2} \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t + 2 \end{aligned}$$

Also ist K' rektifizierbar. Aus Satz 10.88 folgt

$$L(K') = \lim_{b \to 1-0} L(K_b) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t.$$

Genauso folgt, dass die Länge des Viertelkreises K'' im linken Quadranten durch das uneigentliche Integral

$$L(K'') = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t$$

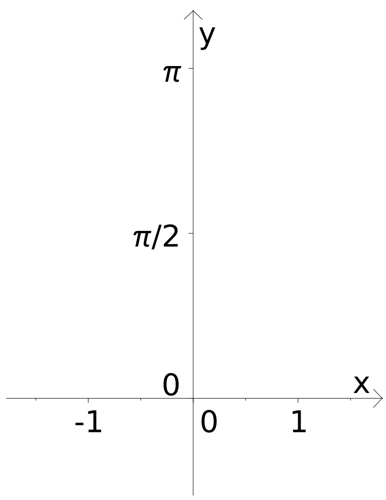
gegeben ist. Mit der Additivität der Bogenlänge (Satz 10.87) folgt die Behauptung. $\square$

10.93 Definition: $\pi := \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t.$

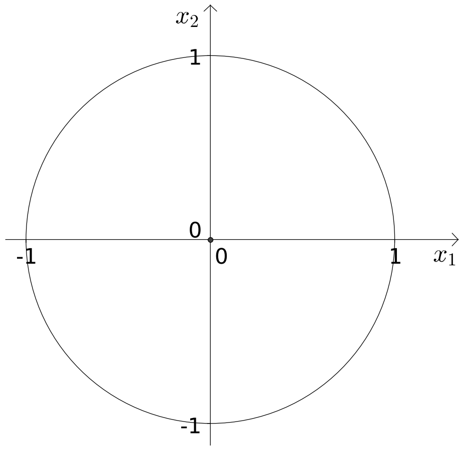
10.94 Definition: Für $-1 \leq x \leq 1$ sei

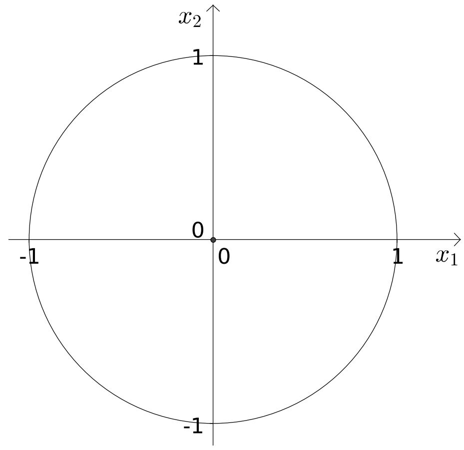
$$l(x) := \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t = \pi - \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t.$$

10.95 Satz:
- $l(-1) = \pi, \; l(1) = 0,$
- l ist stetig,
- l ist differenzierbar in $]-1,1[$ mit $l'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$
- l ist streng monoton fallend,
- $l : [-1,1] \to [0,\pi]$ ist bijektiv.



10.96 Definition: Für $t \in [0,\pi]$ ist $\cos(t) := l^{-1}(t)$, $\sin(t) := \sqrt{1-\cos^2(t)}.$





10.97 Satz: $\sin, \cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ sind stetig und differenzierbar auf $[0, \pi]$ mit

$$\sin'(t) = \cos(t),\ \cos'(t) = -\sin(t).$$

Beweis: Nach Satz 6.69 ist $\cos = l^{-1}$ stetig. Nach Satz 7.15 ist $\cos = l^{-1}$ differenzierbar in $]0, \pi[$ mit

$$\cos'(t) \;=\; (l^{-1})'(t) \;=\; \frac{1}{l'(x)}\bigg|_{x=l^{-1}(t)} \;=\; \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}\Bigg|_{x=\cos(t)} \;=\; -\sqrt{1-\cos^2(t)} \;=\; -\sin(t).$$

Aus der Kettenregel:

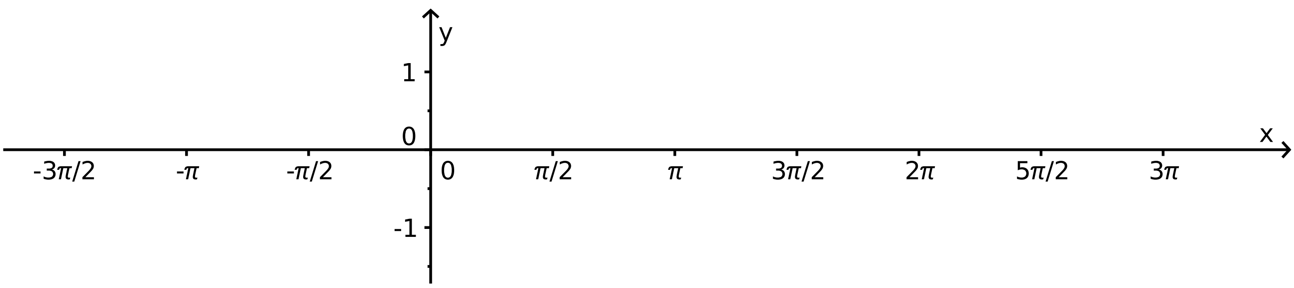
$$\sin'(t) \;=\; \sqrt{1-\cos^2(t)}\,' \;=\; \frac{1}{2\sqrt{1-\cos^2(t)}} \cdot (-2)\cos(t)\big(-\sin(t)\big) \;=\; \cos(t).$$

Da $\sin,\ \cos$ stetig und die Ableitungen stetig fortsetzbar auf $[0, \pi]$ sind, folgt mit Bemerkung 10.70, dass $\sin,\ \cos$ auf $[0, \pi]$ differenzierbar sind. $\square$

10.98 Fortsetzungen: **1)** Für $t \in [-\pi, 0[: \cos(t) := \cos(-t),\ \sin(-t) := -\sin(t)$.

2) Für $t \in \mathbb{R}$: Wähle $k \in \mathbb{Z}$, so dass $t - 2k\pi \in [-\pi, \pi]$ und setze

$$\sin(t) := \sin(t - 2k\pi),\ \cos(t) := \cos(t - 2k\pi).$$



10.99 Satz: 1) $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig und differenzierbar mit

$$\sin'(t) = \cos(t),\ \cos'(t) = -\sin(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

2) $\forall t \in \mathbb{R} : \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$. Insbesondere $|\sin t|, |\cos t| \leq 1$ für $t \in \mathbb{R}$.

10.100 Satz: Es gilt $\sin, \cos \in C^k(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ (schreibe $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$) und

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \text{ für } x \in \mathbb{R}, \\ \sin(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Beweis: 1) Klar.

2) Berechne das Taylorpolynom: Es gilt

$$\begin{aligned} \cos^{(n)}(x) &= \begin{cases} (-1)^{n/2} \cos(t), & n \text{ gerade} \\ (-1)^{(n+1)/2} \sin(t), & n \text{ ungerade} \end{cases} \\ \Rightarrow \cos^{(n)}(0) &= \begin{cases} (-1)^{n/2}, & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \\ \Rightarrow T_{2n}(0,x) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \end{aligned}$$

Restglied (Lagrange):

$$\left|R_{2n}(0,x)\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\sin(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

$\Rightarrow \cos(x) = \lim_{n\to\infty} T_{2n}(0,x)$.

3) Genauso für die Sinusfunktion. □

10.101 Additionstheoreme: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= (\sin x)\cos y + (\cos x)\sin y, \\ \cos(x+y) &= (\cos x)\cos y - (\sin x)\sin y. \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\sin(2x) = 2(\sin x)\cos x,\ quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Beweis: Für festes $z \in \mathbb{R}$ betrachte

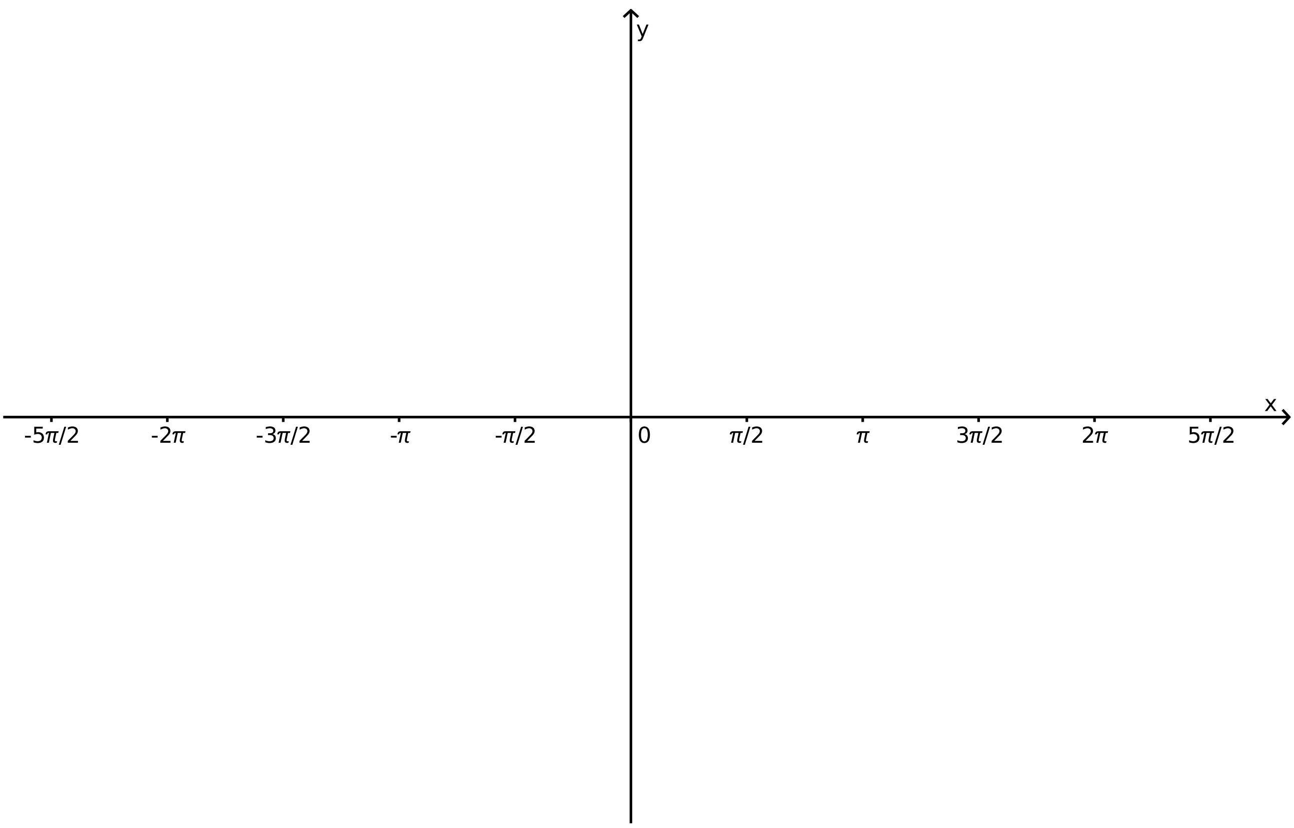
$$\begin{array}{rcl} f(t) & := & (\sin t)\cos(z-t) + (\cos t)\sin(z-t) \\ \Rightarrow\ f'(t) & = & (\cos t)\cos(z-t) + (\sin t)\sin(z-t) - (\sin t)\sin(z-t) - (\cos t)\cos(z-t) \ = \ 0 \\ \Rightarrow\ f(t) & = & \text{konstant} \ = \ f(0) \ = \ \sin z. \end{array}$$

$z := x+y,\ t := x \ \Rightarrow\ \sin(x+y) \ = \ (\sin x)\cos(x+y-x) + (\cos x)\sin(x+y-x).$

Für den Kosinus: Dasselbe mit $f(t) := (\cos t)\cos(z-t) - (\sin t)\sin(z-t)$. $\square$

10.102 Definition: Tangensfunktion: $\tan(x) := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,
Kotangensfunktion: $\cot(x) := \dfrac{\cos x}{\sin x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

10.103 Satz: Die Tangensfunktion ist stetig, differenzierbar mit $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, streng monoton wachsend auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, und es gilt $\text{Bild}(\tan) = \mathbb{R}$.
Die Cotangensfunktion ist stetig, differenzierbar mit $\cot'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2(x)} = -1 + \cot^2(x)$, streng monoton fallend auf $]0, \pi[$, und es gilt $\text{Bild}(\cot) = \mathbb{R}$.



10.104 Definition: Arkussinusfunktion: $\arcsin := \left(\sin\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
Arkuskosinusfunktion: $\arccos := \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$,

Arkustangensfunktion: $\arctan := \left(\tan\big|_{]-\pi/2,\pi/2[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\,$,
Arkuskotangensfunktion: $\operatorname{arccot} := \left(\cot\big|_{]0,\pi[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to]0,\pi[\,$.

10.105 Bemerkungen: 1) Es gilt $\cos\big|_{[0,\pi]} = l^{-1} \;\Rightarrow\; \arccos = l$.

2) Es gelten $\arcsin = \frac{\pi}{2} - \arccos,\ \operatorname{arccot} = \frac{\pi}{2} - \arctan$.

10.106 Satz: Die inversen trigonometrischen Funktionen sind stetig und im Inneren des jeweiligen Definitionsbereichs differenzierbar mit

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } x \in]-1,1[\,,\\
\arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } x \in]-1,1[\,,\\
\arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{arccot}'(x) &= \frac{-1}{1+x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Beweis: $\arccos'(x) = l'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(y)}\Big|_{y=\arctan x} = \dfrac{1}{1+\tan^2(y)}\Big|_{y=\arctan x} = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Rest klar. □

10.13 Lokales Verhalten von Kurven

10.107 Erinnerung: Satz von Taylor: $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}(]a,b[\to \mathbb{R})$, $x_0 \in]a,b[\,$. Dann

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O\left(|x-x_0|^{n+1}\right) \text{ für } x \to x_0,$$

denn wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \subseteq]a,b[$. Dann

$$\left|R_n(x_0,x)\right| \overset{\text{Lagrange}}{=} \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \underset{\Rightarrow \xi \in [x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]}{\overset{x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]}{\leq}} \max_{[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]} \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \cdot |x-x_0|^n.$$

10.108 Taylorentwicklung vektorwertiger Funktionen: Sei $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}(]a,b[\to \mathbb{R}^d)$, $t_0 \in]a,b[\,$. Dann

$$\begin{aligned}
\forall j = 1,\dots d : f_j(t) &= f_j(t_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f_j^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + O\left(|t-t_0|^{n+1}\right)\\
\Rightarrow\ f(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + O\left(|t-t_0|^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Speziell $n = 2$:

$$f(t) \;=\; \underbrace{\underbrace{f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0)}_{\text{Tangente, Schmieggerade}} + \frac{(t-t_0)^2}{2} f''(t_0)}_{\text{Schmiegparabel}} + O\left(|t-t_0|^3\right)$$

10.109 Satz: Sei K glatte Kurve mit Parameterdarstellung $f \in C^n([a,b] \to \mathbb{R}^d)$. Dann gilt für die Bogenlängenparametrisierung $g = f \circ L^{-1}$:

$$g \in C^n([0, L(K)] \to \mathbb{R}^d),\ \forall s \in [0, L(K)] : \|g'(s)\| = 1 \ \wedge\ g''(s) \perp g'(s).$$

Beweis: Beweis von 10.90: $\left(L^{-1}\right)'(s) = \dfrac{1}{\left\|f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\|}$ für $0 \leq s \leq L(K)$, L^{-1} ist stetig

$\overset{f' \neq 0}{\Rightarrow}$ $\left(L^{-1}\right)'$ ist stetig.

$$\begin{aligned}
\overset{\text{falls } n \geq 2}{\Rightarrow} \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f'\left(L^{-1}(s)\right) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(L^{-1}\right)'(s) f''\left(L^{-1}(s)\right) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\|f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\|^2 \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\langle f'\left(L^{-1}(s)\right), f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\rangle \\
& = \left\langle \left(L^{-1}\right)'(s) f''\left(L^{-1}(s)\right), f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\rangle + \left\langle f'\left(L^{-1}(s)\right), \left(L^{-1}\right)'(s) f''\left(L^{-1}(s)\right)\right\rangle \\
& = 2\left(L^{-1}\right)'(s)\left\langle f''\left(L^{-1}(s)\right), f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\rangle \\
\Rightarrow \quad & \left(L^{-1}\right)''(s) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\left\|f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\|\right)^{-1/2} \\
& = -\frac{1}{2}\left(\left\|f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\|\right)^{-3/2} \cdot 2\left(L^{-1}\right)'(s)\left\langle\left(f'' \circ L^{-1}\right)(s), f' \circ L^{-1}(s)\right\rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\left(L^{-1}\right)''$ ist stetig.

Induktion $\Rightarrow$ $L^{-1} \in C^n([0, L(K)] \to \mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $g = f \circ L^{-1} \in C^n([0, L(K)] \to \mathbb{R}^d)$

10.90: $\forall s \in [0, L(K)] : \|g'(s)\| = 1 \overset{\text{Übungen}}{\Rightarrow} \forall s \in [0, L(K)] : \langle g''(s), g'(s)\rangle = 0.$ $\square$

10.110 Anwendung: Sei K glatte Kurve mit Parameterdarstellung $f \in C^3([a,b] \to \mathbb{R}^d)$, $g = f \circ L^{-1}$ die Bogenlängenparametrisierung.

$$\Rightarrow\ g(s) = g(s_0) + (s-s_0)g'(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2} g''(s_0) + O\left(|s-s_0|^3\right) \text{ für } s \to s_0.$$

Die Schmiegparabel im Punkt $g(s_0)$ ist durch

$$h(s) = g(s_0) + (s-s_0)g'(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2} g''(s_0) \text{ für } s \in \mathbb{R}$$

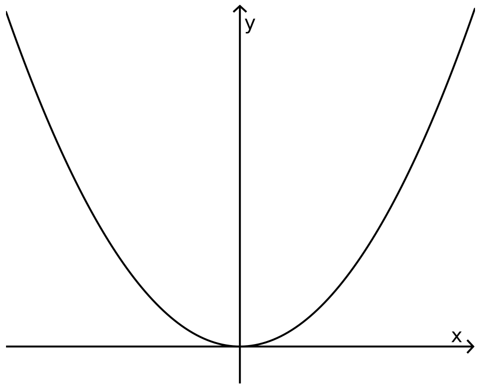
gegeben, falls $\{g'(x_0), g''(s_0)\}$ linear unabhängig. Diese Parabel liegt in der Ebene

$$E \;:=\; \left\{x = g(s_0) + \alpha g'(s_0) + \beta \frac{1}{\|g''(s_0)} \|g''(s_0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Bezüglich des Koordinatensystems mit Ursprung in $g(s_0)$ und den orthonormalen Koordinatenvektoren $e_1 := g'(s_0)$, $e_2 := \dfrac{1}{\|g''(s_0)\|} g''(s_0)$ hat $K' = \text{Bild}\,(h) = h(\mathbb{R})$ die Darstellung

$$K' \;=\; \big\{(x_1', x_2') : x_2' = \frac{1}{2}\|g''(s_0)\| x_1'^2\big\}.$$

10.111 Scheitelkrümmungskreis einer Parabel:



Sei $a > 0$ und $K := \{(x,y) : y = \frac{a}{2}x^2,\ x \in \mathbb{R}\}$.
Suche größten Kreis in der oberen Halbebene, der K in $(0,0)$ berührt.
Symmetrie $\Rightarrow$ Kreismittelpunkt $(0, y_0)$ mit $y_0 > 0$.
Ansatz für die Kreisgleichung:

$$x^2 + (y - y_0)^2 = r^2 = y_0^2$$
$$\Leftrightarrow\ x^2 + y^2 - 2yy_0 = 0$$

Schnitt mit Parabel: Setze $x^2 = \frac{2}{a}y$ in Kreisgleichung ein:

$$\Rightarrow\ \frac{2}{a}y + y^2 - 2yy_0 = 0 \ \Leftrightarrow\ y\left(2\left(\frac{1}{a} - y_0\right) + y\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ y = 0\ \vee\ y = -2\left(\frac{1}{a} - y_0\right).$$

Der Scheitelkrümmungskreis ist der Kreis im Grenzfall $y_0 = \dfrac{1}{a}$.
Der Krümmungsradius ist dann $r = \dfrac{1}{a}$.
Anwendung: Die Parabel $K = \text{Bild}\,(h)$ mit h aus 10.110 hat im Scheitel $g(s_0)$ den Krümmungsradius $r = \dfrac{1}{\|g''(s_0)\|}$.

10.112 Definition: Sei K glatte Kurve mit Bogenlängenparametrisierung $g \in C^2\big([0, L(K)] \to \mathbb{R}^d\big)$. Für $0 \le s \le L(K)$ heißt $\kappa(s) := g''(s)$ **Krümmungsvektor** von K im Punkt $g(s)$, $\|\kappa(s)\|$ heißt **Krümmung** von K in $g(s)$, $\dfrac{1}{\|\kappa(s)\|}$ heißt **Krümmungsradius** der Kurve K in $g(s)$.

10.113 Schraubenlinie: Seien $a, b > 0$ und $f(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 4\pi]$

$$\Rightarrow\ f'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix},\ \|f'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad .$$

$$s = L(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t = t\sqrt{a^2+b^2} \ \Rightarrow\ t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Bogenlängenparametrisierung: $g(s) = \begin{pmatrix} a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$ für $s \in [0, 4\pi\sqrt{a^2+b^2}]$.

$$\Rightarrow\ g'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix},\ \kappa(s) = g''(s) = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Krümmungsradius $r = \dfrac{1}{\|\kappa(s)\|} = \dfrac{a^2+b^2}{a}$.

10.114 Formeln zur Berechnung: Sei $f \in C^2([a,b] \to \mathbb{R}^d)$ Parameterdarstellung der glatten Kurve K. Dann gelten für die Krümmung im Punkt $f(t) = g(L(t))$:

$$\begin{aligned} d = 3:\ \big\|\kappa\big(L(t)\big)\big\| &= \frac{\|f''(t) \times f'(t)\|}{\|f'(t)\|^3}, \\ d = 2:\ \big\|\kappa\big(L(t)\big)\big\| &= \frac{|f_1''(t)f_2'(t) - f_1'(t)f_2''(t)|}{(f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2)}. \end{aligned}$$

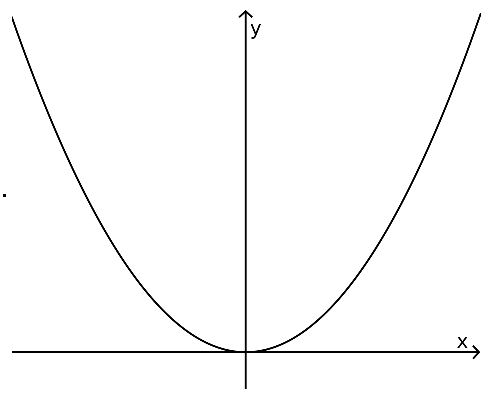
Im Fall $d = 2$ gilt für den Graph $K = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in D(f)\big\}$ einer Funktion f mit der speziellen Parametrisierung $x_1(t) = t,\ x_2(t) = f(t)$:

Krümmung im Punkt $(t, f(t))$: $\big\|\kappa\big(L(t)\big)\big\| = \dfrac{\big|f''(t)\big|}{\big(1 + f'(t)^2\big)^{3/2}}$.

10.115 Beispiel: Für die Parabel $y = \frac{a}{2}x^2$ mit $a > 0$ gilt

$$\big\|\kappa\big(L(t)\big)\big\| = \frac{a}{\big(1 + (ax)^2\big)^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ Krümmungsradius im Punkt $(x, \frac{a}{2}x^2) : r = \dfrac{\big(1 + (ax)^2\big)^{3/2}}{a}$.



10.14 Einführung in die numerische Integration

Problem: $\displaystyle\int_a^b f$ nicht explizit berechenbar (z.B. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$).

1. Idee: Wähle **Stützstellen** $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, berechne Polynom P_n durch $(x_j, f(x_j))$ und hoffe $\displaystyle\int_a^b f \approx \int_a^b P_n$.

10.116 Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Das Polynom P_n n-ten Grades mit

$$P(x_j) \;=\; f(x_j), \qquad \text{für } j = 0, \ldots, n$$

heißt **Interpolationspolynom** zu f und $\{x_0, \ldots, x_n\}$.

10.117 Existenz: Sei $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Bestimme die Koeffizienten a_j als Lösung von

$$P(x_j) = f(x_j) \;\Leftrightarrow\; a_0 + a_1 x_j + \ldots + a_n x_j^n = f(x_j) \qquad (j = 0, \ldots, n).$$

Dies ist ein LGS mit $n+1$ Gleichungen für $n+1$ Unbekannte.

Aus dem Identitätssatz 4.34 wissen wir: Es gibt höchstens eine Lösung. Für unser LGS bedeutet das: Die Koeffizientenmatrix hat Höchstrang. Oder anders

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} \;\neq\; 0.$$

$\overset{\text{Lineare Algebra}}{\Rightarrow}$ Die Koeffizientenmatrix ist invertierbar

$\Rightarrow$ Es existiert eine eindeutige Lösung

10.118 Satz: Sei $f \in C^{n+1}([a,b] \to \mathbb{R})$, P_n das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ und $R_n := f - P_n$. Dann gibt es ein $\xi \in]a,b[$, so dass

$$R_n(x) \;=\; \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Insbesondere kann der Fehler R_n abgeschätzt werden durch

$$|R_n(x)| \;\leq\; \frac{1}{(n+1)!} \max_{t \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|.$$

Beweis: Sei $\omega(x) := \displaystyle\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = x^{n+1} + c_n x^n + \ldots + c_0 \;\Rightarrow\; \omega^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

Für festes $x \in [a,b],\;\; x \neq x_0, \ldots, x_n$ betrachte

$$\varphi(t) \;:=\; R_n(t) - \frac{R_n(x)}{\omega(x)}\, \omega(t).$$

Wegen $R_n(x_j) = 0,\ \omega(x_j) = 0$ für $j = 0, \dots, n$ gilt

$$\varphi(x_0) = 0,\ \dots,\ \varphi(x_n) = 0,\ \varphi(x) = 0.$$

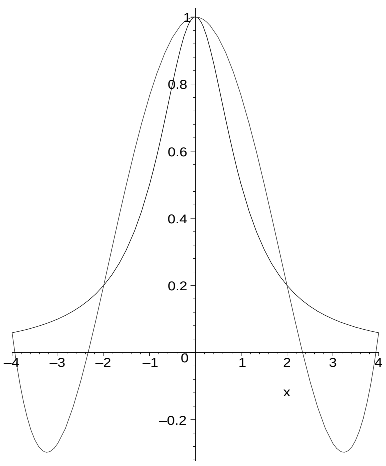
Also hat φ mindestens $n+2$ verschiedene Nullstellen in $[a, b]$.

$$\begin{array}{ll}
\overset{\text{Satz von Rolle}}{\Rightarrow} & \varphi' \text{ hat mindestens } n+1 \text{ verschiedene Nullstellen in }]a, b[\\
\Rightarrow & \varphi'' \text{ hat mindestens } n \text{ verschiedene Nullstellen in }]a, b[\\
 & \quad \vdots \\
\Rightarrow & \varphi^{(n+1)} \text{ hat mindestens eine Nullstelle in }]a, b[\\
 & \text{d.h. } \exists \xi \in]a, b[: 0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = \underbrace{R_n^{(n+1)}(\xi)}_{=(f-P_n)^{(n+1)} = f^{(n+1)}} - \dfrac{R_n(x)}{\omega(x)}\,(n+1)! \\
\Rightarrow & f^{(n+1)}(\xi) = \dfrac{R_n(x)}{\omega(x)}\,(n+1)!
\end{array}$$

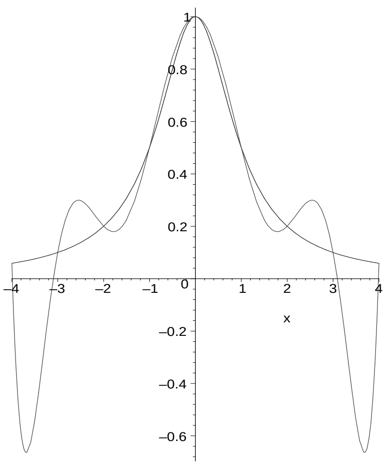
$\square$

10.119 Die große Enttäuschung: $f : [-4, 4] \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$:

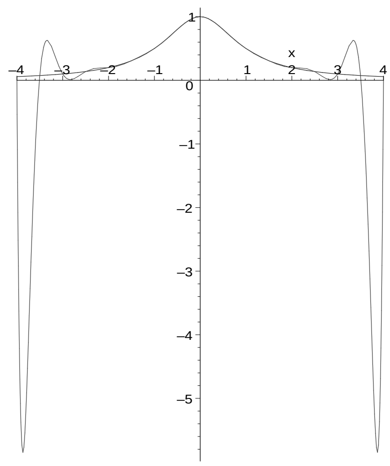
5 Stützstellen



9 Stützstellen



17 Stützstellen



Mit wachsender Anzahl der Stützstellen wird die Approximation schlechter.

Man beschränkt sich deshalb auf Polynome kleiner Ordnung.

Zunächst der Fall $n = 1$, d.h. f wird durch ein Polynom 1. Grades („Gerade“) approximiert:

10.120 Satz: Sei $f \in C^2([a, b] \to \mathbb{R})$. Dann gilt die **Trapezregel**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + R \quad \text{mit } |R| \ \leq \ \frac{(b-a)^3}{12}\ \|f''\|_\infty\ .$$

Beweis: $P = f(a) + \dfrac{x-a}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big)$

$$\begin{aligned}\int_a^b P &= f(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2(b-a)}\big(f(b)-f(a)\big)\\ &= \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\\ |R| &\overset{10.118}{\leq} \frac{1}{2!}\max|f''(t)| \underbrace{\int_a^b |x-a|\,|x-b|\;\mathrm{d}x}_{=\frac{(b-a)^3}{6}}.\end{aligned}$$

$\square$

Der Fall $n = 2$, dh. f wird durch ein Polynom 2. Grades („Parabel“) approximiert:

10.121 Satz: Es sei $f \in C^4([a,b] \to \mathbb{R})$. Dann gilt die **Keplersche Fassregel** (auch Simpson-Formel):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + R \text{ mit } |R| \;\leq\; \frac{(b-a)^5}{90}\,\left\|f^{(4)}\right\|_\infty.$$

Beweis: Siehe Übungen $\square$

2. Idee (Summation): Unterteile $[a,b]$ in Teilintervalle $[a, a+h], [a+h, a+2h], \ldots, [b-h, b]$, wende in jedem Teil die Trapezregel an.

10.122 Satz: Sei $f \in C^2([a,b])$, $h := \dfrac{b-a}{k}$ mit einem $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= T(h) + R \;:=\; \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 2f(b-h) + f(b)\right) + R,\\ |R| &\leq (b-a)\,\frac{h^2}{12}\,\|f''\|_\infty\end{aligned}$$

(**summierte Trapezregel**).

Beweis: $\displaystyle\int_a^b f \;=\; \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \;=\; \sum_{j=1}^k \frac{x_j - x_{j-1}}{2}\big(f(x_j) + f(x_{j-1})\big) + R \;=\; \frac{h}{2}\sum_{j=1}^k \big(f(x_j) + f(x_{j-1})\big) + R$

$$|R| \;\leq\; \sum_{j=1}^k \frac{(x_j - x_{j-1})^3}{12}\|f''\|_\infty \;=\; k\frac{h^3}{12}\|f''\|_\infty \;=\; (b-a)\frac{h^2}{12}\|f''\|_\infty.$$

$\square$

3. Idee Romberg-Extrapolation (genial!): Beweise eine genauere Fehlerabschätzung

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}x \;=\; T(h) + c_1\,h^2 + c_2\,h^4 + \ldots + h^{2k}\cdot\rho(h)$$

mit beschränkten $\rho(h)$ für $h \downarrow 0$ (Taylorentwicklung).

$$\Rightarrow\; \int_a^b f \;=\; T\left(\frac{h}{2}\right) + c_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{h}{2}\right)^{2k}\cdot\rho\left(\frac{h}{2}\right).$$

Subtraktion der ersten Abschätzung von 4-mal der zweiten eliminiert den 1. Fehlerterm:

$$3\int_a^b f \;=\; 4\,T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) + c_2\left(\frac{4}{16} - 1\right)h^4 + \ldots.$$

Also Verfahren:

$$\begin{array}{lllllllll}
T_0 & := & T(b-a) & & & & & & \\
T_1 & := & T\left(\dfrac{b-a}{2}\right) & T_1^{(1)} & := & \dfrac{4\,T_1 - T_0}{3} & & & \\
T_2 & := & T\left(\dfrac{b-a}{4}\right) & T_2^{(1)} & := & \dfrac{4\,T_2 - T_1}{3} & T_2^{(2)} & := & \dfrac{4^2\,T_2^{(1)} - T_1^{(1)}}{4^2-1} \\
 & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \quad\ddots
\end{array}$$

Dieses Verfahren liefert gute Ergebnisse, wenn f genügend oft differenzierbar ist.

11 Differentialrechnung II

11.1 Normierte Räume

11.1 Erinnerung: Sei V ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ heißt **Norm** auf V, wenn für $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\alpha \in \mathbb{C}$ gelten:

Positivität: $\|x\| \geq 0$,

Definitheit: $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ (= Nullelement des Vektorraums),

Homogenität: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(V, \|.\|)$ heißt **normierter Vektorraum**.

11.2 Beispiele: 1) $V = \mathbb{R}^d$, $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2}$.

2) $V = C\big([a,b] \to \mathbb{R}\big)$, $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \big|f(x)\big|$.

3) $V = C\big([a,b] \to \mathbb{R}\big)$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$.

Zur $\triangle$-Ungleichung:

$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ definiert ein Skalarprodukt auf V mit $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$.

$$\Rightarrow \; \|f+g\|^2 \;=\; \langle f+g.f+g\rangle \;=\; \underbrace{\langle f, f\rangle}_{=\|f\|^2} + \underbrace{2\,\langle f, g\rangle}_{\leq 2\|f\|\cdot\|g\| \text{ (CSB)}} + \underbrace{\langle g, g\rangle}_{=\|g\|^2} \;\leq\; \big(\|f\| + \|g\|\big)^2.$$

11.2 Stetigkeit

11.3 Erinnerung: Seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume, $f : M_1 \supseteq D \to M_2$ und $x_0 \in D$. f heißt stetig in x_0, falls

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta_\varepsilon > 0\; \forall x \in D : d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

oder äquivalent

$$\forall (x_n) \text{ Folge in } D : x_n \to x_0 \text{ bezüglich } d_1 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \text{ bezüglich } d_2.$$

Speziell: $(V, \|.\|_v)$, $(W, \|.\|_W)$ normierte Räume, $f : V \supseteq D \to W$ ist stetig in $x_0 \in D$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta_\varepsilon > 0\; \forall x \in D : \|x - x_0\|_V < \delta_\varepsilon \Rightarrow \big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W < \varepsilon$$

$$\text{bzw.} \quad \forall (x_n) \text{ Folge in } D : \|x_n - x_0\|_V \to 0 \Rightarrow \|f(x_n) - f(x_0)\|_W \to 0.$$

11.4 Satz: Sei $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ linear, d.h.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

Dann ist L stetig.

Beweis: LAAG I: $\exists$Matrix $A \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d : L(x) = Ax$, d.h.

$$L_k(x) \ = \ \sum_{j=1}^{d} a_{kj} x_j \text{ für } k = 1, \ldots, m.$$

Ist nun (x_n) Folge in $\mathbb{R}^d$, $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}^d \ \Rightarrow \ \forall j = 1, \ldots, d : (x_n)_j \to (x_0)_j$

$\Rightarrow \ \forall k = 1 \ldots m : L_k(x_n) \ = \ \sum_{j=1}^{d} a_{kj}(x_n)_j \ \to \ \sum_{j=1}^{d} a_{kj}(x_0)_j \ = \ L_k(x_0)$

$\Rightarrow \ L(x_n) \to L(x_0)$, d.h. L ist stetig in x_0.

$\overset{x_0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \ L$ ist stetig. $\square$

11.5 Beispiel: $V = C\big([0,1] \to \mathbb{R}\big), \ \|f\|_v = \|f\|_2,$
$W = C\big([0,1] \to \mathbb{R}\big), \ \|f\|_v = \|f\|_\infty,$
$\mathrm{Id} : V \to W : f \mapsto f$ ist linear und nicht stetig in 0
$(0 = N : x \to 0$ ist das Nullelement von $V)$

Betrachte $f_n(x) := x^n$ für $0 \leq x \leq 1$.

$$0 \ \leq \ \|f_n - N\|_V^2 \ = \ \int_0^1 \underbrace{\big(f_n(x) - N(x)\big)^2}_{=x^{2n}} \,\mathrm{d}x \ = \ \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\Big|_{x=0}^{1} \ = \ \frac{1}{2n+1} \ \to \ 0$$

$\Rightarrow \ f_n \to N$ in V.

Aber $\neg\big(L(f_n) \to L(N)$ in $W\big)$:

$$\big\|L(f_n) - L(N)\big\|_W \ = \ \max_{[0.1]} \underbrace{\big|f_n(x) - N(x)\big|}_{=|x^n|} \ = \ 1.$$

11.6 Satz: Sei $L : V \to W$ linear. Dann gilt

$$\forall x_0 \in V : L \text{ ist stetig in } x_0 \ \Leftrightarrow \ L \text{ ist stetig in } x_0 = 0$$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Trivial (Spezialisierung)
„$\Leftarrow$“: Seien $x_0 \in V$ und (x_n) Folge in V mit $x_n \to x_0$. Dann gilt $\|x_n - x_0\|_V \to 0$ und

$$L(x_n) \ = \ L(x_n - x_0 + x_0) \ = \ L(\underbrace{x_n - x_0}_{\to 0}) + L(x_0) \ \overset{L \text{ stetig in } 0}{\to} \ \underbrace{L(0)}_{=0} + L(x_0) \ = \ L(x_0).$$

$\square$

11.7 Definition: Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ heißt **beschränkt**, falls

$$\exists c > 0 \; \forall x \in V : \|L(x)\|_W \leq c\|x\|_V.$$

11.8 Stetig = Beschränkt: Für eine lineare Abbildung $L : V \to W$ sind äquivalent

(i) L ist stetig.

(ii) L ist beschränkt.

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Kontraposition, zeige $\neg$(ii) $\Rightarrow$ $\neg$(i):
Sei L nicht beschränkt, d.h.

$$\begin{aligned} & \forall c > 0 \; \exists x \in V : \|L(x)\|_W > c\|x\|_V \\ \Rightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in V : \|L(x_n)\|_W > n\|x_n\|_V \end{aligned}$$

Setze $y_n := \dfrac{1}{n\|x_n\|_V} x_n$. Dann

$$\begin{aligned} \|y_n\|_V &= \frac{1}{n\|x_n\|_V}\|x_n\|_V = \frac{1}{n} \to 0 \\ \|L(y_n)\| &= \left\| \frac{1}{n\|x_n\|} L(x_n) \right\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\,\|L(x_n)\| > \frac{1}{n\|x_n\|} n\|x_n\| = 1. \end{aligned}$$

Das bedeutet: $y_n \to 0$, aber $\neg\big(L(y_n) \to 0\big)$. D.h. L ist in $x_0 = 0$ unstetig, also überall unstetig.
$\Rightarrow$ $\neg$(i).

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Zeige: L ist stetig in $x_0 = 0$. Sei (x_n) Folge in V mit $x_n \to 0$. Dann

$$0 \;\leq\; \|L(x_n)\| \;\leq\; c\|x_n\| \;\to\; 0.$$

Also konvergiert $L(x_n)$ gegen 0. L ist somit stetig in $x_0 = 0$.
$\overset{11.6}{\Rightarrow}$ (i). $\square$

11.9 Satz: Seien U, V, W normierte Räume.

1) Sind $f, g : V \to W$ linear und beschränkt und $\alpha \in \mathbb{R}$ (oder $\alpha \in \mathbb{C}$), dann sind $f + g, \alpha f : V \to W$ linear und beschränkt.

2) Sind $f : V \to W$ und $g : W \to U$ linear und beschränkt, dann ist auch $g \circ f : V \to U$ linear und beschränkt.

Beweis: 1) Selber

2) $$\begin{aligned} (f \circ g)(\alpha x + \beta y) &= f\big(g(\alpha x + \beta y)\big) \overset{g \text{ linear}}{=} f\big(\alpha g(x) + \beta g(y)\big) \overset{f \text{ linear}}{=} \alpha f\big(g(x)\big) + \beta f\big(g(y)\big) \\ &= \alpha (f \circ g)(x) + \beta (f \circ g)(y). \end{aligned}$$

$$\big\|(f \circ g)(x)\big\| = \big\|f\big(g(x)\big)\big\| \overset{f \text{ beschränkt}}{\leq} c_f\big\|g(x)\big\| \overset{g \text{ beschränkt}}{\leq} c_f c_g\|x\|.$$ $\square$

11.3 Veranschaulichung im $\mathbb{R}^d$

11.10 Der Graph von Funktionen mehrerer Veränderlicher: Ist $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$ und D offen, so ist der Graph von f

$$G = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in D\}$$

eine (gekrümmte) Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Allgemeiner: Ist $f : \mathbb{R}^d \supseteq D \to \mathbb{R}$ und D offen, so ist der Graph von f

$$G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in D\}$$

eine „Hyperfläche" im $\mathbb{R}^{d+1}$ (später genauer).

11.11 Wichtige Idee: Zur Untersuchung oder Veranschaulichung des Graphen in der Umgebung eines Punktes $(x_0, f(x_0))$ kann man das Verhalten von f längs der Geraden $\{x_0 + t \cdot v : t \in \mathbb{R}\}$ mit festem Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^d$ betrachten.
Anders ausgedrückt: Man schneidet G mit geeigneten Ebenen:

$$\begin{aligned} E &:= \{(x_0 + t \cdot v, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : t, s \in \mathbb{R}\} \\ \Rightarrow E \cap G &= \{(x_0 + t \cdot v, f(x_0 + t \cdot v)) : t \in D'\} \qquad (D' \subseteq \mathbb{R} \text{ geeignet}). \end{aligned}$$

Diese Schnittkurve $E \cap G$ kann man sich als Kurve im $\mathbb{R}^2$ veranschaulichen:

$$K := \{(t, f(x_0 + t \cdot v)) : t \in D'\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Vorteil: Man untersucht die Funktion $t \mapsto f(x_0 + t \cdot v)$, die nur von einer reellen Variablen abhängt und reellwertig ist.

11.12 Beispiele: 1) $f : D = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$:
Graph von f: $G = \left\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 1 \ \wedge \ x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right\}$ (Halbkugelfläche).

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ (Der Graph ist eine Sattelfläche).

11.4 Richtungsableitungen

11.13 Definition: 1) Seien V, W normierte Räume, $D \subseteq V$ offen und $f : D \to W$, $x_0 \in D$, $v \in V$. (D offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \{x_0 + tv : |t| < \delta\} \subseteq D$.) Existiert der Grenzwert

$$Df(x_0)(v) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + tv)\Big|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(f(x_0 + hv) - f(x_0)\big),$$

so heißt $Df(x_0)(v)$ **Richtungsableitung** oder **Gateaux**-Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v. Beachte: $Df(x_0)(v) \in W$, $v \mapsto Df(x_0)(v)$ ist Abbildung einer Teilmenge von V nach W.

2) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$, $1 \le j \le d$, e_j der Einheitsvektor in x_j-Richtung. Existiert der Grenzwert

$$\partial_{x_j} f(x_0) \;:=\; \partial_j f(x_0) \;:=\; \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_j) - f(x_0)}{h} \;=\; Df(x_0)(e_j),$$

so heißt $\partial_j f(x_0) \in \mathbb{R}^m$ **partielle Ableitung** von f nach x_j in x_0.

3) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existieren alle partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x_0), \ldots,$ $\partial_d f(x_0)$, so heißt der Vektor

$$\mathrm{grad} f(x_0) \;:=\; \nabla f(x_0) \;:=\; \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_d f(x_0) \end{pmatrix}$$

der **Gradient** von f in x_0 (∇ = Nabla-Operator).

11.14 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}$.

$\partial_1 f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\partial_2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

Für $v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+tv) &= \begin{pmatrix} x_1 + tv_1 \\ x_2 + tv_2 \\ x_1 + tv_1 + (x_2 + tv_2)^2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} f(x+tv) &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 + 2(x_2 + tv_2)v_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow Df(x)(v) &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 + 2x_2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere: $Df(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist eine lineare Abbildung.

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x_1^2 \mathrm{e}^{x_1 x_2}$:

$$\nabla f(x) \;=\; \begin{pmatrix} 2x_1 \mathrm{e}^{x_1x_2} + x_1^2 x_2 \mathrm{e}^{x_1x_2} \\ x_1^3 \mathrm{e}^{x_1x_2} \end{pmatrix}.$$

Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f(x+tv) \;=\; (x_1 + tv_1)^2 \mathrm{e}^{(x_1+tv_1)(x_2+tv_2)}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+tv) &= 2(x_1+tv_1)v_1\mathrm{e}^{\cdots} + (x_1+tv_1)^2\mathrm{e}^{\cdots}\big(v_1(x_2+tv_2)+(x_1+tv_1)v_2\big)\\
&\overset{t=0}{=} 2x_1v_1\mathrm{e}^{x_1x_2} + x_1^2\mathrm{e}^{x_1x_2}(v_1x_2+x_1v_2)\\
&= v_1(2x_1+x_1^2x_2)\mathrm{e}^{x_1x_2} + v_2x_1^3\mathrm{e}^{x_1x_2}\\
&= v_1\partial_1 f(x) + v_2\partial_2 f(x)\\
\Rightarrow\ Df(x)(v) &= \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 f(x) & \partial_2 f(x) \end{pmatrix}}_{\text{Matrix mit 1 Zeile}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Insbesondere: $Df(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

11.15 Definition: Seien V, W normierte Räume, $D \subseteq V$ offen, $f : D \to W$, $x_0 \in D$, und es existiere $Df(x_0)(v)$ für alle $v \in V$. Ist $Df(x_0) : V \to W$ linear und stetig, so heißt f in x_0 **schwach differenzierbar**, $f_s'(x_0) := Df(x_0)$ heißt **schwache Ableitung** von f in x_0.

11.16 Satz: Ist $V = \mathbb{R}^d$, $W = \mathbb{R}^m$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^m$ in x_0 schwach differenzierbar, so ist jede Koordinatenfunktion $f_j : D \to \mathbb{R}$ in x_0 schwach differenzierbar ($j = 1, \dots m$), und es gilt $f'(x_0)(v) = J_f(x_0)v$ für $v \in \mathbb{R}^d$ mit der **Jacobi-Matrix**

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \dots & \partial_d f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \dots & \partial_d f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \partial_2 f_m(x_0) & \dots & \partial_d f_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Setze $v := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$f'(x_0)e_1 = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(x_0+he_1)-f(x_0)\big) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f_1(x_0+he_1)-f_1(x_0)\big) \\ \vdots \\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f_m(x_0+he_1)-f_m(x_0)\big) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_1 f_j(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f_j(x_0+he_1)-f_j(x_0)\big) \text{ existiert für } j = 1,\dots,m, \\ f'(x_0)e_1 = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) \\ \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

$f'(x_0) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ ist linear $\overset{\text{LAAG 1}}{\Rightarrow}$ $\exists m \times d$-Matrix J $\forall v \in \mathbb{R}^d : f'(x_0)v = Jv$.

$$\overset{v=e_1}{\Rightarrow} J\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) \\ \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) \end{pmatrix} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & ****** \\ \vdots & \\ \partial_1 f_m(x_0) & ****** \end{pmatrix}.$$

Genauso für die anderen Spalten von J.

Wie oben folgt: $Df_k(x_0)v = \big(Jv\big)_k$ für $v \in \mathbb{R}^d$. Daraus folgt die Linearität und Stetigkeit von $Df_k(x_0) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, also die schwache Differenzierbarkeit von f_k in x_0 für jedes $k = 1, \ldots, m$. $\square$

11.17 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}$.

$\overset{\text{letztes Beispiel}}{\Rightarrow}$ f ist in jedem $x \in \mathbb{R}^2$ schwach differenzierbar mit $f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2x_2 \end{pmatrix}$.

2) Aus schwacher Differenzierbarkeit folgt nicht einmal Stetigkeit:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 = x_2^2 \ \wedge \ x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann existiert die schwache Ableitung in $x_0 = 0$: $f_s'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$,
aber f ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

3) Für die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto \big(x_1^3 + x_2^3\big)^{1/3}$ ist $Df(0)v$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ definiert, aber keine lineare Abbildung (vgl. Übungen).

11.5 Die Ableitung

11.18 Definition: Sei $f : V \supseteq D \to W$, D offen, $x_0 \in D$. Dann heißt f **Fréchet-differenzierbar** in x_0, falls eine lineare stetige Abbildung $L : V \to W$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + L(x - x_0) + o\big(\|x - x_0\|\big) && \text{für } x \to x_0 \\ \text{bzw. } f(x_0 + v) &= f(x_0) + L(v) + o\big(\|v\|\big) && \text{für } v \to 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Die lineare Abbildung $f'(x_0) := L$ heißt **Fréchet-Ableitung** von f in x_0.
Erinnerung: Die Aussage $(*)$ bedeutet:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + v) - f(x_0) - L(v) \ = \ o\big(\|v\|\big) \text{ für } v \to 0 \\ \text{bzw. } & \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall v \in V : \|v\| < \delta \Rightarrow \big\|f(x_0 + v) - f(x_0) - L(v)\big\| \ < \ \varepsilon \|v\| \\ \text{bzw. } & \lim_{v \to 0} \frac{\big\|f(x_0 + v) - f(x_0) - L(v)\big\|}{\|v\|} \ = \ 0. \end{aligned}$$

11.19 Satz: Die Fréchet-Ableitung ist eindeutig.

Beweis: $\left.\begin{aligned} \text{Sei } f(x_0 + v) &= f(x_0) + L(v) + o\big(\|v\|\big) \\ \text{und } f(x_0 + v) &= f(x_0) + \widetilde{L}(v) + o\big(\|v\|\big) \end{aligned}\right\} \Rightarrow L(v) - \widetilde{L}(v) = o\big(\|v\|\big)$ für $v \to 0$.

Beweise $\forall w \in V \ \forall \varepsilon > 0 : \big\|L(w) - \widetilde{L}(w)\big\| < \varepsilon$. Dann folgt $\widetilde{L} = L$.

Seien $w \in V,\ \varepsilon > 0$ beliebig aber fest, $w \neq 0$.
Wähle $\delta > 0$, so dass $\big\|L(v) - \widetilde{L}(v)\big\| < \dfrac{\varepsilon}{\|w\|}\|v\|$ für $\|v\| < \delta$.
$\alpha := \dfrac{\delta}{2\|w\|} > 0 \ \Rightarrow\ \|\alpha w\| = d\frac{\delta}{2} < \delta$. Mit $v := \alpha w$ folgt

$$\big\|L(w) - \widetilde{L}(w)\big\| \ = \ \Big\|\frac{1}{\alpha}L(\alpha w) - \frac{1}{\alpha}\widetilde{L}(\alpha w)\Big\| \ = \ \frac{1}{\alpha}\big\|L(\alpha w) - \widetilde{L}(\alpha w)\big\| \ < \ \frac{1}{\alpha}\frac{\varepsilon}{\|w\|}\,\|\alpha w\| \ = \ \varepsilon.$$

□

11.20 Satz: Seien V, W lineare Räume, $D \subseteq V$ offen, $f : D \to W$, $x_0 \in D$. Ist f in x_0 Fréchet-differenzierbar, dann ist f in x_0 schwach differenzierbar und es gilt $f_s'(x_0) = f'(x_0)$.

Beweis: Sei $v \in V$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(x_0 + hv) - f(x_0) \ &= \ L(hv) + o\big(\|hv\|\big) \quad (h \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}) \\
\overset{L \text{ linear}}{\Rightarrow} \ \frac{1}{h}\big(f(x_0 + hv) - f(x_0)\big) \ &= \ L(v) + \underbrace{\frac{1}{h}\,o(h\|v\|)}_{=o(1)\to 0 \text{ für } h\to 0} \\
\Rightarrow \ Df(x_0)(v) \ &= \ L(v).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $Df(x_0)(v)$ für alle $v \in V$ existiert, dass diese Abbildung linear und stetig bezüglich v ist, und dass $f_s'(x_0) = Df(x_0) = L = f'(x_0)$.

□

11.21 Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \mathrm{e}^{x_1} \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ f ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ Fréchet-differenzierbar und $f'(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ \mathrm{e}^{x_1} & 0 \end{pmatrix}$.

11.22 Satz: Ist f in x_0 Fréchet-differenzierbar, dann ist f in x_0 stetig.

Beweis:
$$\begin{array}{ccccccc}
f(x) & = & f(x_0) & + & L(x - x_0) & + & o\big(\|x - x_0\|\big) \\
\text{für } x \to x_0 & & \downarrow & & \downarrow \ (L \text{ stetig}) & & \downarrow \\
 & & f(x_0) & + & \underbrace{L(0)}_{=0} & + & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow$ $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$
$\Rightarrow$ f ist stetig in x_0.

□

11.23 Satz: Seien U, V, W normierte Räume, $D_f \subseteq V$ offen, $f, f_1, f_2 : D_f \to W$, $\varphi : D_f \to \mathbb{R}$ (oder $\varphi : D_f \to \mathbb{C}$), $D_g \subseteq W$ offen, $g : D_g \to U$. Dann:

1) **Linearität der Ableitung:** Sind f_1, f_2 in $x_0 \in D_f$ Fréchet-differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), dann ist $\alpha f_1 + \beta f_2 : D_f \to W$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)'(x_0) \;=\; \alpha f_1'(x_0) + \beta f_2'(x_0).$$

2) **Produktregel:** Sind f und φ in $x_0 \in D_f$ Fréchet-differenzierbar, dann ist $\varphi f : D_f \to W : x \mapsto \varphi(x) \cdot f(x)$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit

$$(\varphi \cdot f)'(x_0)(v) \;=\; \varphi(x_0) \cdot f'(x_0)(v) + \varphi'(x_0)(v) \cdot f(x_0) \quad \text{für } v \in V$$

bzw. kurz

$$(\varphi \cdot f)'(x_0) \;=\; \varphi(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

3) **Kettenregel:** Gilt $f(x_0) \in D_g$, und sind f in x_0 und g in $f(x_0)$ Fréchet-differenzierbar, so ist $g \circ f$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; g'\big(f(x_0)\big) \circ f'(x_0).$$

Beweis: **1)** Übungen

2) Übungen

3) Da f stetig in x_0 ist, gilt $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$.
g differenzierbar in $f(x_0)$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
g\big(f(x)\big) &= g\big(f(x_0)\big) + g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0)\big) + o\big(\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W\big) \quad \text{für } x \to x_0 \\
&= g\big(f(x_0)\big) + g'\big(f(x_0)\big)\big(f'(x_0)(x - x_0)\big) \\
&\quad + \underbrace{g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big)}_{=o(\|x-x_0\|_V) \text{ siehe a)}} + \underbrace{o\big(\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W\big)}_{=o(\|x-x_0\|_V) \text{ siehe b)}} \quad \text{für } x \to x_0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ ist in x_0 differenzierbar, $(g \circ f)'(x_0)(v) = g'\big(f(x_0)\big)\big(f'(x_0)(v)\big)$ für $v \in V$.

a) $$\left.\begin{array}{l}
g'\big(f(x_0)\big) \text{ stetig } \overset{11.8}{\Rightarrow} \forall y \in W : \big\|g'\big(f(x_0)\big)(y)\big\|_U \le c\|y\|_W \\
f \text{ in } x_0 \text{ Fréchet-differenzierbar } \Rightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o\big(\|x - x_0\|_V\big)
\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big) = o\big(\|x - x_0\|_V\big)$$

b) $$\begin{aligned}
\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W &= \big\|f'(x_0)(x - x_0) + o\big(\|x - x_0\|_V\big)\big\|_W \\
&\le \big\|f'(x_0)(x - x_0)\big\|_W + o\big(\|x - x_0\|_V\big) \\
&\le c\|x - x_0\|_v + o\big(\|x - x_0\|_V\big) \\
&\le (c+1)\|x - x_0\|_v \text{ für } \|x - x_0\|_V < \delta
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow o\big(\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W\big) \;=\; o(\|x - x_0\|_V) \quad \text{für } x \to x_0$$

□

11.6 Funktionen zwischen endlichdimensionalen Räumen

11.24 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar** in $x_0 \in D$, falls f in x_0 Fréchet-differenzierbar ist, $f'(x_0)$ heißt **Ableitung** von f in x_0.

11.25 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$, so dass alle partiellen Ableitungen $\partial_j f(x)$ $(j = 1, \dots d)$ in $B_\varepsilon(x_0)$ existieren und beschränkt sind, dann ist f stetig in x_0.

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\|v\| < \varepsilon$. Setze

$$v^0 := 0,\ v^j := \sum_{k=1}^{j} v_k e_k = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\|v^j\| \le \|v\| < \varepsilon$ für $j = 0, \dots d$, also $x_0 + v^j \in B_\varepsilon(x_0)$ und

$$f(x_0 + v) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{d} \big(f(x_0 + v^j) - f(x_0 + v^{j-1}) \big).$$

Setze $g : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x_0 + v^{j-1} + t v_j e_j)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ g'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + v^{j-1} + t v_j e_j + h v_j e_j) - f(x_0 + v^{j-1} + t v_j e_j)}{v_j h} v_j \\ &= v_j (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + t v_j e_j). \quad \text{(Gilt auch falls } v_j = 0.) \end{aligned}$$

Insbesondere ist g in $]0,1[$ differenzierbar (Beachte: $\|v^{j-1} + t v_j e_j\| \le \|v\| < \varepsilon$ für $0 \le t \le 1$). Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\forall j = 1, \dots, d\ \exists \xi_j \in]0,1[: \underbrace{f(x_0 + v^j) - f(x_0 + v^{j-1})}_{=g(1)-g(0)} = \underbrace{v_j (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j)}_{=g'(\xi_j)(1-0)}.$$

Nun gilt $\big|(\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j)\big| \le M$, da $x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j \in B_\varepsilon(x_0)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \big|f(x_0 + v) - f(x_0)\big| &\le \sum_{j=1}^{d} \big|f(x_0 + v^j) - f(x_0 + v^{j-1})\big| \\ &= \sum_{j=1}^{d} \big|v_j (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j)\big| \\ &\le M \sum_{j=1}^{d} |v_j| \\ &\le M\, d\, \|v\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von f in x_0. $\square$

11.26 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existieren alle partiellen Ableitung $\partial_j f(x_0)$ $(j = 1, \dots d)$ in einer Umgebung $B_\varepsilon(x_0)$ und sind stetig in x_0, dann ist f differenzierbar in x_0, und es gilt $f'(x_0) = \big(\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_d f(x_0)\big)$.

Beweis: Seien $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\|v\| < \varepsilon$ und v^j wie im vorigen Beweis. Anwendung des Mittelwertsatzes wie dort ergibt mit geeigneten $\xi_j \in]0,1[$

$$\begin{aligned}
f(x_0 + v) &= f(x_0) + \sum_{j=1}^{d} \big(f(x_0 + v^j) - f(x_0 + v^{j-1})\big) \\
&= f(x_0) + \sum_{j=1}^{d} v_j (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j) \\
&= f(x_0) + \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \partial_j f(x_0) v_j}_{=\left(\partial_1 f(x_0),\dots,\partial_d f(x_0)\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \big((\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j) - \partial_j f(x_0)\big) v_j}_{=o(\|v\|) \text{ für } v \to 0 \text{ (siehe unten)}}
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

$$\partial_j f \text{ stetig in } x_0 \;\Rightarrow\; \exists \delta_j > 0 \; \forall w \in \mathbb{R}^d : \|w\| < \delta \Rightarrow \big|\partial_j f(x_0 + w) - \partial_j f(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{d}.$$

Setze $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_d\}$. Für $\|v\| < \delta$ folgt

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{j=1}^{d} \big((\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j) - \partial_j f(x_0)\big) v_j \Big\| &\le \sum_{j=1}^{d} \| \dots \| \\
&\le \sum_{j=1}^{d} \frac{\varepsilon}{d} \underbrace{|v_j|}_{\le \|v\|} \\
&\le \varepsilon \|v\| \text{ für } \|v\| < \delta.
\end{aligned}$$

□

11.27 Bemerkung: Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes gilt

$$f'(x_0) = \big(\nabla f(x_0)\big)^T.$$

Man kann die Ableitung $f'(x_0)$ mit dem Skalarprodukt auch folgendermaßen schreiben:

$$f'(x_0)(v) \;=\; \langle \nabla f(x_0), v \rangle \text{ für } v \in \mathbb{R}^d.$$

11.28 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$, und es existiere ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$, so dass die partiellen Ableitungen $\partial_j f_k(x)$ $(j = 1, \dots d,\ k = 1, \dots, m)$ in $B_\varepsilon(x_0)$ existieren. Sind alle partiellen Ableitungen $\partial_j f_k(x)$ aller Koordinatenfunktionen …

1) ... in $B_\varepsilon(x_0)$ beschränkt, so ist f stetig in x_0.

2) ... stetig in x_0, so ist f in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = J_f(x_0)$ (Jacobi-Matrix, siehe 11.16)

Beweis: **1)** Aus Satz 11.25 folgt für jedes $k = 1, \dots, m$: f_k ist stetig in x_0.
$\Leftrightarrow$ f ist stetig in x_0.

2) Aus Satz 11.26 folgt für jedes $k = 1, \dots, m$: f_k ist differenzierbar in x_0:

$$\forall k = 1, \dots m : f_k(x_0 + v) \;=\; f_k(x_0) + \big(\partial_1 f_k(x_0), \dots, \partial_d f_k(x_0)\big) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} + o\big(\|v\|\big)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ f(x_0 + v) &= \begin{pmatrix} f_1(x_0 + v) \\ \vdots \\ f_m(x_0 + v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 f_1'(x_0) & \dots & \partial_d f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m'(x_0) & \dots & \partial_d f_m(x_0) \end{pmatrix}}_{=J_f(x_0)} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} o\big(\|v\|\big) \\ \vdots \\ o\big(\|v\|\big) \end{pmatrix}}_{=o\left(\|v\|\right)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f ist differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = J_f(x_0)$. $\square$

11.29 Anwendungen: **1)** Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^1(]a, b[\to \mathbb{R})$, $\Phi :]a, b[\to \mathbb{R}^m : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_m(t) \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow\ \Phi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_m'(t) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

Fréchet-Ableitung:
$$\begin{aligned} \Phi(t + v) &= \Phi(t) + \Phi'(t)(v) + o\big(|v|\big) \qquad \text{für } v \in \mathbb{R},\ v \to 0 \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_1(t) + \varphi_1'(t)v + o\big(|v|\big) \\ \vdots \\ \varphi_m(t) + \varphi_m'(t)v + o\big(|v|\big) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d.h. $\Phi'(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m : v \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1'(t)v \\ \vdots \\ \varphi_m'(t)v \end{pmatrix}$, Fréchet-Ableitung und „alte“ Ableitung stimmen überein.

Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 = \Phi(t_0)$ $\Rightarrow$ $f'(x_0) = \big(\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_m f(x_0)\big)$.

Kettenregel: $f \circ \Phi :]a, b[\to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in t_0 und

$$\begin{aligned} (f \circ \Phi)'(t_0) &= f'\big(\Phi(t_0)\big) \circ \Phi'(t_0) \;=\; \big(\partial_1 f(\Phi(t_0)), \dots, \partial_m f(\Phi(t_0))\big) \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_m'(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^m \partial_j f\big(\Phi(t_0)\big) \varphi_j'(t_0), \end{aligned}$$

denn die Hintereinanderausführung $f'\big(\Phi(t_0)\big) \circ \Phi'(t_0)$ wird durch Matrizenmultiplikation berechnet.

2) Seien $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar in x_0,
$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar in $f(x_0)$.
Kettenregel: $g \circ f$ ist differenzierbar in x_0 und

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x_0) &= g'\big(f(x_0)\big) \circ f'(x_0) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_1 g_1\big(g(x_0)\big) & \partial_2 g_1\big(g(x_0)\big) \\ \partial_1 g_2\big(g(x_0)\big) & \partial_2 g_2\big(g(x_0)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \partial_3 f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \partial_3 f_2(x_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_1 g_1\, \partial_1 f_1 + \partial_2 g_1\, \partial_1 f_2 & \partial_1 g_1\, \partial_2 f_1 + \partial_2 g_1\, \partial_2 f_2 & \partial_1 g_1\, \partial_3 f_1 + \partial_2 g_1\, \partial_3 f_2 \\ \partial_1 g_2\, \partial_1 f_1 + \partial_2 g_2\, \partial_1 f_2 & \partial_1 g_2\, \partial_2 f_1 + \partial_2 g_2\, \partial_2 f_2 & \partial_1 g_2\, \partial_3 f_1 + \partial_2 g_2\, \partial_3 f_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3) Seien $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0.
Produktregel: $\varphi \cdot f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist differenzierbar in x_0 und

$$\begin{aligned}
(\varphi \cdot f)'(x_0)(v) &= \varphi(x_0) f'(x_0)(v) + \varphi'(x_0)(v) f(x_0) \text{ für } v \in \mathbb{R}^2 \\
&= \varphi(x_0) \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \underbrace{(\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\text{Skalar}} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\
&= \ldots + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \left((\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \\
&\overset{\text{AG für}}{\underset{\text{Matrizen}}{=}} \ldots + \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + (\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\varphi(x_0) f'(x_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \end{pmatrix} \big(\partial_1 \varphi(x_0), \partial_2 \varphi(x_0)\big)}_{= \begin{pmatrix} f_1 \partial_1 \varphi & f_1 \partial_1 \varphi \\ f_1 \partial_1 \varphi & f_1 \partial_1 \varphi \end{pmatrix}} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

11.30 Geometrische Veranschaulichung: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Den Graphen von f

$$G(f) := \big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in \mathbb{R}^2 \big\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

kann man sich als gekrümmte Fläche im $\mathbb{R}^3$ vorstellen, $\big(x_0, f(x_0)\big)$ als Punkt auf $G(f)$.
Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fest. Schnitt von $G(f)$ mit der Ebene $E = \big\{(x_0 + tv, s) : s, t \in \mathbb{R}\big\}$ ergibt die Schnittkurve

$$G(f) \cap E = K = \big\{ g_v(t) = (x_0 + tv, f(x_0 + tv)) : t \in \mathbb{R} \big\}.$$

f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow K$ hat einen Tangentenvektor im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$:

$$g_v'(0) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} f(x_0 + tv)\big|_{t=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \partial_1 f(x_0) v_1 + \partial_2 f(x_0) v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \langle \nabla f(x_0), v \rangle \end{pmatrix}.$$

Die Steigung der Tangente (gegenüber der (x_1, x_2)-Ebene) ist durch

$$m_v = \frac{\langle \nabla f(x_0), v \rangle}{\|v\|} = \|\nabla f(x_0)\| \cos\big(\angle\big(\nabla f(x_0), v\big)\big)$$

gegeben. Die Steigung nimmt den maximalen Wert $\|\nabla f(x_0)\|$ an, wenn der Richtungsvektor v parallel zum Vektor $\nabla f(x_0)$ ist.

1. Folgerung: $\nabla f(x_0)$ zeigt in Richtung der größten Zunahme von f, und $\|\nabla f(x_0)\|$ ist die größte Steigung einer Schnittkurve wie oben.

Der Tangentenvektor kann als Linearkombinaton geschrieben werden:

$$g_v'(0) = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f(x_0) \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f(x_0) \end{pmatrix}.$$

Alle $g_v'(0)$ liegen in einer Ebene.

2. Folgerung: Die Tangentialebene an $G(f)$ in $(x_0, f(x_0)$ ist durch

$$E = \Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix} (x_0)_1 \\ (x_0)_2 \\ f(x_0) \end{pmatrix}}_{\in G(f)} + v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f(x_0) \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f(x_0) \end{pmatrix} : v_1, v_2 \in \mathbb{R} \Bigg\}$$

gegeben. Gleichungsdarstellung von E:

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 = f(x_0) + \partial_1 f(x_0) \underbrace{\big(x_1 - (x_0)_1\big)}_{=v_1} + \partial_2 f(x_0) \underbrace{\big(x_2 - (x_0)_2\big)}_{=v_2} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),\ x = (x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

11.31 Notwendiges Kriterium für Extremum: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$. Hat f in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum, und ist f in x_0 differenzierbar, so folgt $f'(x_0) = 0$ bzw. $\nabla f(x_0) = 0$.

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $g_v(t) := f(x_0 + tv)$ für $t \in]-\delta, \delta[$ ($\delta > 0$ so gewählt, dass $x_0 + tv \in D$).

f differenzierbar in $x_0 \;\Rightarrow\; g_v$ differenzierbar in $t = 0$, $g_v'(0) = f'(x_0)v = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$
f hat in x_0 ein lokales Extremum $\;\Rightarrow\; g_v$ hat in $t = 0$ ein lokales Extremum
$\Rightarrow\; g_v'(0) = 0 = \langle \nabla f(x_0), v \rangle \;\Rightarrow\; \nabla f(x_0) \perp v$
v beliebig $\;\Rightarrow\; \forall v \in \mathbb{R}^d : \nabla f(x_0) \perp v$
$\Rightarrow\; \nabla f(x_0) = 0$ bzw. $f'(x_0) = 0$. $\square$

11.7 Der Mittelwertsatz

Erinnerung: Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar, so folgt

$$\exists \xi \in \,]a,b[\, : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

11.32 Mittelwertsatz für mehrere Variablen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in D$, so dass die Verbindungsstrecke in D enthalten ist:

$$S := \{x_1 + t(x_2 - x_1) : 0 \le t \le 1\} \subseteq D.$$

Ist f in jedem Punkt $x_0 \in S$ differenzierbar, dann:

$$\exists \xi \in \,]0,1[\, : f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{\left\langle \nabla f\big(x_1 + \xi(x_2 - x_1)\big), x_2 - x_1 \right\rangle}_{= f'(x_1+\xi(x_2-x_1))(x_2-x_1)}.$$

Beweis: $g(t) := f\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big)$ für $t \in [0,1]$

$\Rightarrow$ g ist stetig und g ist in $]0,1[$ differenzierbar,

$$g'(t) = f'\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big)(x_2 - x_1) = \left\langle \nabla f\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big), x_2 - x_1 \right\rangle.$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $\exists \xi \in \,]0,1[\, :$

$$f(x_1) - f(x_2) = g(1) - g(0) = g'(\xi)(1-0) = \left\langle \nabla f\big((x_1 + \xi(x_2 - x_1)\big), x_2 - x_1 \right\rangle.$$

$\square$

11.33 Bemerkung: Für den Beweis ist es wichtig, dass f reellwertig ist. Bei vektorwertigen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m$ kann der Satz zwar in jeder Koordinate separat angewandt werden, aber mit verschiedenen Werten von ξ. Man kann jedoch beweisen:

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \le \sup_{0 \le t \le 1} \underbrace{\big\| f'\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big) \big\|}_{\text{Abbildungsnorm}} \cdot \|x_2 - x_1\|.$$

11.34 Definition: $D \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **konvex**, wenn gilt

$$\forall x_1, x_2 \in D : S := \{x_1 + t(x_2 - x_1) : 0 \le t \le 1\} \subseteq D.$$

11.35 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $f : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in jedem Punkt $x \in D$. Dann gilt

$$f = \text{konstant} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in D : f'(x) = 0.$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Für $x_0 \in D,\ v \in \mathbb{R}^d,\ \|v\|$ genügend klein:

$$f(x_0 + v) = f(x_0) = f(x_0) + 0v = f(x_0) + \underbrace{0v}_{=f'(x_0)(v)} + o\big(\|v\|\big) \text{ für } v \to 0$$

$$\Rightarrow\; f'(x_0) = 0.$$

„$\Leftarrow$": Sei $x_0 \in D$ fest. zeige: $\forall x_1 \in D : f(x_1) = f(x_0)$.

D konvex $\;\Rightarrow\; S = \{x_0 + t(x_1 - x_0) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq D$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ und $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \forall j \in \{1, \ldots, m\} : 0 = f_j'(x)^T = \nabla f_j(x)$.

Nach Mittelwertsatz

$$\exists \xi_j \in \,]0,1[\, : f_j(x_1) - f_j(x_0) \;=\; \big\langle \nabla f_j\big(x_0 + \xi_j(x_1 - x_0)\big), x_1 - x_0 \big\rangle \;=\; 0.$$

$$\Rightarrow\; \forall j \in \{1, \ldots, m\} : f_j(x_1) = f_j(x_0).$$

□

11.36 Definition: $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen heißt **zusammenhängend**, falls

$$\forall x_1, x_2 \in D\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \xi_0 = x_1, \xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_n = x_2\ \forall j = 1, \ldots n :$$
$$S_j = \Big\{\big(\xi_{j-1} + t(\xi_j - \xi_{j-1})\big) : 0 \leq t \leq 1\Big\} \subseteq D$$

$D \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **Gebiet**, falls D offen und zusammenhängend ist.

11.37 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in jedem Punkt $x \in D$. Dann gilt

$$f = \text{konstant} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in D : f'(x) = 0.$$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Klar

„$\Leftarrow$“: Sei $x_0 \in D$ fest. Zeige: $\forall x_1 \in D : f(x_1) = f(x_0)$.
D zusammenhängend:

$$\exists \xi_0 = x_0, \xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_n = x_1 \ \forall j = 1, \ldots n : \quad S_j = \big\{ \big(\xi_{j-1} + t(\xi_j - \xi_{j-1})\big) : 0 \le t \le 1 \big\} \subseteq D.$$

Wie im vorigen Beweis folgt

$$f(x_0) = f(\xi_0) = f(\xi_1) = \ldots = f(\xi_n) = f(x_1)$$

also $f(x_1) = f(x_0)$. □

11.8 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

11.38 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existiert $\partial_{x_j} f(x)$ in $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$, und ist $\partial_{x_j} f(x)$ in x_0 partiell nach x_k differenzierbar, so heißt

$$\partial_{x_k}\big(\partial_{x_j} f\big)(x_0) \ =: \ \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_k}\partial_{x_j}}(x_0) \ =: \ \partial_{x_k}\partial_{x_j} f(x_0) \ := \ \partial_k \partial_j f(x_0)$$

partielle Ableitung zweiter Ordnung von f in x_0. Entsprechend partielle Ableitungen dritter und höherer Ordnung, z.B.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\partial x_{j_3}}(x_0) \ := \ \partial_{x_{j_1}}\big(\partial_{x_{j_2}}(\partial_{x_{j_3}} f)\big)(x_0)$$

Falls mehrmals nach einer Variablen abgeleitet wird:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k} \ = \ \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_j \partial x_k} \ = \ \partial^2_{x_j}\partial_{x_k} f \ = \ \partial^2_j \partial_k f.$$

11.39 Beispiele: **1)** $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + x\sin(y)$

2) $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$

Es gelten

$$\partial_x f(0,0) = 0, \quad \partial_y f(0,0) = 0,$$
$$\text{für } (x,y) \neq (0,0): \ \partial_x f(x,y) = y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_y f(x,y) = x\frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\partial_x\partial_y f(0,0) = 1 \neq \partial_y\partial_x f(0,0) = -1.$$

3) **Ableitung des Gradienten** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D. Dann gilt $\nabla f : D \to \mathbb{R}^n$. Ist ∇f in $x_0 \in D$ differenzierbar, so heißt die Jacobi-Matrix von ∇f:

$$H_f(x_0) \;:=\; (\nabla f)'(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_0) & \partial_2\partial_1 f(x_0) & \dots & \partial_n\partial_1 f(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(x_0) & \partial_2\partial_n f(x_0) & \dots & \partial_n^2 f(x_0) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f.

Anmerkung: $H_f(x_0)$ ist nicht die zweite Ableitung von f in x_0. Aber $f''(x_0)$ kann mit $H_f(x_0)$ angegeben werden:

$f'(x_0)$ ist lineare Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$

$f''(x_0)$ ordnet jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung $L_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu:

$$f''(x_0) : v \mapsto L_v,\; L_v(w) \;=\; \langle J_f(x_0)v, w\rangle\,.$$

11.40 Satz von Schwarz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $j, k \in \{1, \dots, d\}$, und es gebe ein $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$, so dass $\partial_{x_j} f, \partial_{x_k} f, \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x)$ in $B_\varepsilon(x_0)$ existieren.
Ist $\partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x)$ stetig in x_0, so ist $\partial_{x_j} f(x)$ in x_0 nach x_k differenzierbar, und es gilt

$$\partial_{x_k}\partial_{x_j} f(x_0) = \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0).$$

Beweis: Zeige: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\partial_{x_j} f(x_0 + he_k) - \partial_{x_j} f(x_0)\big) = \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0)$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\big(\partial_{x_j} f(x_0 + he_k) - \partial_{x_j} f(x_0)\big) \\
&\overset{\text{Def } \partial_{x_j}}{=} \quad \frac{1}{h}\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x_0 + he_k + te_j) - f(x_0 + he_k)\big) - \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x_0 + te_j) - f(x_0)\big)\right) \\
&= \quad \lim_{t\to 0}\frac{1}{ht}\big(f(x_0 + he_k + te_j) - f(x_0 + he_k)\big) - \big(f(x_0 + te_j) - f(x_0)\big)\big) \\
&\underset{\text{Differentialrechnung}}{\overset{\text{Mittelwertsatz}}{=}} \quad \lim_{t\to 0}\frac{1}{ht} h\big(\partial_{x_k} f(x_0 + \xi_h e_k + te_j) - f(x_0 + \xi_h e_k)\big), \qquad |\xi_h| < |h| \\
&\underset{\text{Differentialrechnung}}{\overset{\text{Mittelwertsatz}}{=}} \quad \lim_{t\to 0}\frac{1}{t} t\partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0 + \xi_h e_k + \tau_{ht} e_k), \qquad |\tau_{hk}| < |t|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; &\left|\frac{1}{h}\big(\partial_{x_j} f(x_0 + he_k) - \partial_{x_j} f(x_0)\big) - \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0)\right| \\
= \; &\left|\lim_{t\to 0}\underbrace{\partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0 + \xi_h e_k + \tau_{ht} e_k) - \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0)}_{|.|<\varepsilon \text{ für } \|\xi_h e_k + \tau_{ht} e_k\| < \delta}\right| \\
\leq \; &\varepsilon \text{ für } \underbrace{|h| < \frac{\delta}{2}}_{\Rightarrow |\xi_h| < \delta/2}
\end{aligned}$$

$\square$

11.41 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$C^k(D \to \mathbb{R}^m) \;:=\; \big\{ f : D \to \mathbb{R}^m \;\big|\; \text{alle partiellen Ableitungen von } f \text{ bis zur } k\text{-ten Ordnung existieren und sind stetig in } D \big\}$$

der **Raum der k-Mal stetig differenzierbaren Funktionen** auf D.

11.42 Folgerungen: **1)** $f \in C^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}) \;\Rightarrow\;$ die Hesse Matrix von f ist symmetrisch.

Z.B. Für $d = 3$: $H_f(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_0) & \partial_2\partial_1 f(x_0) & \partial_3\partial_1 f(x_0) \\ \partial_1\partial_2 f(x_0) & \partial_2^2 f(x_0) & \partial_3\partial_2 f(x_0) \\ \partial_1\partial_3 f(x_0) & \partial_2\partial_3 f(x_0) & \partial_3^2 f(x_0) \end{pmatrix}$.

2) Für $f \in C^k(D \to \mathbb{R})$ ist es bei partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k egal, in welcher Reihenfolge abgeleitet wird:

$$k_1 + k_2 + k_3 \leq k \;\Rightarrow\; \partial_1^{k_1}\partial_2^{k_2}\partial_3^{k_3} f \;=\; \partial_3^{k_3}\partial_2^{k_2}\partial_1^{k_1} f \;=\; \ldots$$

11.43 Multiindizes: Für partielle Ableitungen höherer Ordnung ist folgende Notation geschickt:

$$\nabla^\alpha f \;:=\; \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f \qquad \text{für } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

(∇ sprich „Nabla“). Zum Rechnen mit sogenannten **Multiindizes** $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ vereinbart man:

$$\begin{aligned} |\alpha| \;&:=\; \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \\ \alpha \leq \beta \;&\Leftrightarrow\; \alpha_1 \leq \beta_1 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; \alpha_n \leq \beta_n \\ \alpha! \;&:=\; (\alpha_1!) \cdots (\alpha_n!) \\ \binom{\alpha}{\beta} \;&:=\; \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} \;=\; \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \end{aligned}$$

11.44 Leibniz-Formel: Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g \in C^m(D \to \mathbb{R})$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$ gilt:

$$\nabla^\alpha (g \cdot f) \;=\; \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n,\; \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \big(\nabla^\beta f\big) \cdot \big(\nabla^{\alpha-\beta} g\big) \qquad \text{in } D.$$

Beweis: Im Fall $d = 2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$:

$$\begin{aligned} \partial_1^{\alpha_1}(g \cdot f) \;&=\; \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \big(\partial_1^{\beta_1} f\big) \cdot \big(\partial_1^{\alpha_1-\beta_1} g\big) \\ \Rightarrow\; \partial_2^{\alpha_2}\partial_1^{\alpha_1}(g \cdot f) \;&=\; \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \partial_2^{\alpha_2}\Big(\big(\partial_1^{\beta_1} f\big) \cdot \big(\partial_1^{\alpha_1-\beta_1} g\big)\Big) \\ &=\; \underbrace{\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2}}_{\widehat{=}\beta=(\beta_1,\beta_2)\leq\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)} \underbrace{\binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}}_{=\binom{\alpha}{\beta}} \underbrace{\big(\partial_2^{\beta_2}\partial_1^{\beta_1} f\big)}_{=\nabla^\beta f} \cdot \underbrace{\big(\partial_2^{\alpha_2-\beta_2}\partial_1^{\alpha_1-\beta_1} g\big)}_{=\nabla^{\alpha-\beta} g}\Big) \end{aligned}$$

$\square$

11.45 Ableitungen längs einer Geraden: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\{x_0 + t \cdot v : -\delta < t < \delta\} \subseteq D$, und sei $g(t) := f(x_0 + t \cdot v)$. Falls $f \in C^k(D \to \mathbb{R})$, so ist g k-Mal differenzierbar mit

$$g^{(k)}(t) \;=\; \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(\nabla^\alpha f\right)(x_0 + t \cdot v) \cdot v^\alpha \text{ für } |t| < \delta,$$

wobei $v^\alpha := v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{j_1=1}^{d} \partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1} \qquad \left(= \sum_{|\alpha|=1} \nabla^\alpha f(x_0 + t \cdot v)\, v^\alpha \right) \\ g''(t) &= \sum_{j_2=1}^{d} \sum_{j_1=1}^{d} \partial_{j_2} \partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1}\, v_{j_2} \\ &\;\vdots \\ g^{(k)}(t) &= \sum_{j_k=1}^{d} \sum_{j_{k-1}=1}^{d} \ldots \sum_{j_1=1}^{d} \partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1}\, v_{j_2} \cdots v_{j_k}. \end{aligned}$$

In dieser k-fachen Summe kommen genau alle $\nabla^\alpha f$ mit $|\alpha| = k$ vor, manche mehrfach.

Wie oft kommt ein fest gewähltes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| = k$ vor? Kombinatorik: Verteile $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$ Einträge auf die k Plätze $j_1, \ldots, j_k$: Das sind $k!$ Möglichkeiten. Davon sind aber $\alpha_1!$ Möglichkeiten gleich, entsprechend sind $\alpha_2!$, $\ldots$, $\alpha_d!$ Möglichkeiten gleich.

$$\Rightarrow\; g^{(k)}(t) \;=\; \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_d!}\, \nabla^\alpha f(x_0 + t \cdot v).$$

□

11.46 Satz von Taylor für mehrere Variablen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^{k+1}(D \to \mathbb{R})$, $x, x_0 \in D$ so dass die Verbindungsstrecke ganz in D liegt: $\{x_0 + t \cdot (x - x_0) : 0 \le t \le 1\} \subset D$. Dann existiert ein $\tau \in]0, 1[$, so dass

$$f(x) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)\big(x_0 + \tau \cdot (x - x_0)\big) \cdot (x - x_0)^\alpha.$$

Beweis: Wende den Satz von Taylor 7.31 auf die Funktion $g(t) := f\big(x_0 + t \cdot (x - x_0)\big)$ an:

$$f(x_0) \;=\; g(1) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0)(1-0)^j + \frac{g^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}(1-0)^{k+1}.$$

Verwende den letzten Satz für $g^{(j)}(t)$ $(1 \le j \le k+1)$.

□

11.47 Beispiel: $f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + y^2 - 2x + 6y$ bei $(x_0, y_0) = (1, -3)$:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= -\frac{31}{3} + 2(x-1)^2 + (y+3)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 \\
&= -\frac{31}{3} + (x-1)^2 \underbrace{\left(2 + \frac{2}{3}(x-1)\right)}_{\geq 0 \text{ für } x > -2} + (y+3)^2.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ f hat in $(1, -3)$ ein lokales Minimum.

11.48 Diskussion: Der Summand für

$j = 0$: $\displaystyle\sum_{|\alpha|=0} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha \; = \; f(x_0)$,

$j = 1$: $\displaystyle\sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha \; = \; \sum_{l=1}^{d} \partial_l f(x_0)(x - x_0)_l \; = \; f'(x_0)(x - x_0)$.

$j = 2$:
$$
\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha &= \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^{d} \partial_i \partial_l f(x_0)(x - x_0)_i (x - x_0)_l \\
&= \frac{1}{2} \left\langle H_f(x_0)(x - x_0), (x - x_0) \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Der Satz von Taylor mit $k = 1$ besagt

$$
f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} \Big\langle H_f\big(x_0 + \tau(x - x_0)\big)(x - x_0), (x - x_0) \Big\rangle .
$$

bzw. mit $v = x - x_0$

$$
f(x_0 + v) = f(x_0) + f'(x_0)(v) + \frac{1}{2} \left\langle H_f(x_0 + \tau v)v, v \right\rangle .
$$

11.9 Extrema

11.49 Lineare Algebra: Es sei $A = \big(a_{jk}\big)_{j,k=1,\dots d}$ eine relle symmetrische $d \times d$-Matrix.

1) Die Abbildung $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : v \mapsto \langle Av, v \rangle = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{d} a_{jk} v_k v_j$ heißt **quadratische Form**.

2) A (und auch q) heißt **positiv semidefinit**, falls

$$
\forall v \in \mathbb{R}^d : \langle Av, v \rangle \geq 0
$$

bzw. **positiv definit**, falls

$$
\forall v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \langle Av, v \rangle > 0.
$$

3) A heißt **negativ (semi-)definit**, falls $-A$ positiv (semi-)definit ist.

4) Da A diagonalisierbar ist, gelten:

$$\begin{array}{rcl} A \text{ ist positiv definit (semidefinit)} & \Leftrightarrow & \text{alle Eigenwerte sind } > 0 \ (\geq 0) \\ A \text{ ist negativ definit (semidefinit)} & \Leftrightarrow & \text{alle Eigenwerte sind } < 0 \ (\leq 0) \end{array}$$

Insbesondere: Ist A positiv definit und $\lambda_0 > 0$ der kleinste Eigenwert, so gilt:

$$\|v\| = 1 \ \Rightarrow \ \langle Av, v \rangle \ \geq \ \lambda_0.$$

5) $\det(A)$ ist das Produkt der Eigenwerte. Positivitätstest von Jacobi:

$d = 2$**:** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist positiv definit $\Leftrightarrow \ a_{11} > 0 \ \wedge \ \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$

$d = 3$**:** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist positiv definit $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ a_{11} > 0 \ \wedge \ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \ \wedge \ \det(A) > 0.$$

Gilt entsprechend auch für $d \geq 4$, siehe z.B. Meyberg-Vachenauer: *Höhere Mathematik*.

11.50 Erinnerung: $f'(x_0) = 0$ ist notwendige Bedingung für ein Extremum (siehe 11.31).

11.51 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$.

1) Hat f in x_0 ein lokales Minimum (Maximum), so ist $H_f(x_0)$ positiv (negativ) semidefinit.

2) Ist $H_f(x_0)$ positiv (negativ) definit, so hat f in x_0 ein lokales Minimum (Maximum).

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ fest. Wähle $t_0 > 0$, so dass $x_0 + tv \in D$ für $0 \leq t \leq t_0$. Aus Taylor: $\exists \tau \in]0,1[$:

$$f(x_0 + tv) \ = \ f(x_0) + 0 + \langle H_f(x_0 + \tau \cdot tv)tv, tv \rangle \, .$$

1) Hat f in x_0 ein lokales Minimum, so folgt

$$\langle H_f(x_0 + \tau \cdot tv)v, v \rangle \ = \ \frac{1}{t^2} \langle H_f(x_0 + \tau \cdot tv)(tv), tv \rangle \ = \ \frac{1}{t^2}\big(f(x_0 + tv) - f(x_0)\big) \ \geq \ 0.$$

für $0 < t < t_1$, $t_1 > 0$ geeignet gewählt. Da alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung stetig sind, folgt (v ist fest!)

$$\langle H_f(x_0)v, v \rangle \ = \ \lim_{t \to 0} \langle H_f(x_0 + \tau \cdot tv)v, v \rangle \ \geq \ 0.$$

Da $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ beliebig war, folgt die positive Semidefinitheit von $H_f(x_0)$.

2) Sei $H_f(x_0)$ positiv definit. Zeige:

$$\exists\delta > 0\ \forall x \in B_\delta(x_0) : H_f(x) \text{ ist positiv definit.} \qquad (*)$$

Dann folgt für $x \in B_\delta(x_0)$ aus dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{11.48}{=} f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\big\langle H_f\big(x_0+\tau(x-x_0)\big)(x-x_0), x-x_0\big\rangle}_{>0 \text{ da } H_f(x) \text{ positiv definit}} \\ &> f(x_0), \end{aligned}$$

und f hat in x_0 ein lokales Minimum.

Beweis von $(*)$: Sei λ_0 der kleinste Eigenwert von $H_f(x_0)$. Dann gilt

$$\forall v \in \mathbb{R}^d : \|v\| = 1 \Rightarrow \langle H_f(x_0)v, v\rangle \geq \lambda_0.$$

Da $\partial_j\partial_k f(x)$ stetig in x_0:

$$\exists\delta > 0\ \forall x \in B_\delta(x_0)\ \forall j,k \in \{1,\dots,d\} : \big|\partial_j\partial_k f(x) - \partial_j\partial_k f(x_0)\big| < \frac{\lambda_0}{2d^2}.$$

Für $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\|v\| = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \big|\langle H_f(x)v, v\rangle - \langle H_f(x_0)v, v\rangle\big| &= \big|\big\langle\big(H_f(x) - H_f(x_0)\big)v, v\big\rangle\big| \\ &= \left|\sum_{j,k=1}^{d}\big(\partial_j\partial_k f(x) - \partial_j\partial_k f(x_0)\big)v_jv_k\right| \\ &\leq \sum_{j,k=1}^{d}\big|\partial_j\partial_k f(x) - \partial_j\partial_k f(x_0)\big| \cdot \underbrace{|v_jv_k|}_{\leq\|v\|\cdot\|v\|=1} \\ &< d^2\frac{\lambda_0}{2d^2} \\ &= \frac{\lambda_0}{2} \end{aligned}$$

und daraus

$$\langle H_f(x)v, v\rangle = \langle H_f(x_0)v, v\rangle + \langle H_f(x)v, v\rangle - \langle H_f(x_0)v, v\rangle \geq \lambda_0 - \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2}.$$

Für beliebiges $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt dann

$$\langle H_f(x)v, v\rangle = \|v\|^2\left\langle H_f(x)\frac{1}{\|v\|}v, \frac{1}{\|v\|}v\right\rangle \geq \|v\|^2\frac{\lambda_0}{2} > 0.$$

Dies beweist die positive Definitheit von $H_f(x)$ für $x \in B_\delta(x_0)$.

$\square$

11.52 Beispiele: **1)** $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x^2 - y^2)\ln x$ in $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$:

Kritische Punkte $P_1(\mathrm{e}^{-1/2}, 0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(1,-1)$.

f hat in P_1 ein Minimum, in P_2 und P_3 kein Extremum.

2) $f(x,y) = (x^2+y^2)(x^2+y^2-3x)+2x^2$:
Längs jeder Geraden durch $(0,0)$ hat f ein Minimum. Aber es gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \frac{3}{2}\cos\varphi \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } \varphi \to \frac{\pi}{2}$$

und $f(x,y) = -\dfrac{9}{16}\cos^4\varphi < 0$. Also hat f in $(0,0)$ kein Minimum.

11.10 Zusammenhänge

11.53 Verschiedene Ableitungsbegriffe: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$:

(i) f ist in x_0 Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $f'(x_0)$.

$\Downarrow$

(ii) f ist in x_0 schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung $Df(x_0)$.

$\Downarrow$

(iii) f ist in x_0 in jede Richtung $v \in \mathbb{R}^d$ differenzierbar mit Richtungsableitung $Df(x_0)(v)$.

$\Downarrow$

(iv) f ist in x_0 partiell differenzierbar nach $x_1, \ldots, x_d$.

11.54 Weitere Beziehungen: 1) (ii) $\Rightarrow$ $Df(x_0)(v) = J_f(x_0)v$ für $v \in \mathbb{R}^d$ mit

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \ldots & \partial_d f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \ldots & \partial_d f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \partial_2 f_m(x_0) & \ldots & \partial_d f_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

2) (i) $\Rightarrow$ $f'(x_0)(v) = Df(x_0)(v) = J_f(x_0)v$. Wir schreiben $f'(x_0) = J_f(x_0)$.

3) (iv) extended:

f in $B_\delta(x_0)$ partiell differenzierbar nach $x_1, \ldots, x_d$ und $\partial_j f$ stetig in x_0 $(j = 1, \ldots, d)$

$\Rightarrow$ (i).

11.55 Beispiele: $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m : x \mapsto \text{konst} \ \Rightarrow\ f'(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d$ ($0 = m \times d$-Matrix),
$\mathrm{Id} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d : x \mapsto x \ \Rightarrow\ f'(x) = E$ für $x \in \mathbb{R}^d$ ($E = d \times d$-Einheitsmatix),
$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle x, x\rangle \ \Rightarrow\ f'(x) = 2(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ für $x \in \mathbb{R}^d$.

12 Implizit definierte Funktionen

12.1 Kontrahierende Abbildungen

12.1 Banachscher Fixpunktsatz: Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum, $f : M \to M$ eine **Kontraktion**, d.h.

$$\exists c \in [0,1[\ \ \forall x,y \in M : d\big(f(x),f(y)\big) \le c\, d(x,y).$$

Dann besitzt f genau einen **Fixpunkt** x_0, d.h.

$$\exists! x_0 \in M : f(x_0) = x_0.$$

Beweis: Existenz: Wähle irgendein $x_1 \in M$, definiere rekursiv $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Schritt 1: Die Folge (x_n) ist Cauchy-Folge, konvergiert also in M.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n-1}) = d\big(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})\big) &\le c\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\le c^2\, d(x_{n-2}, x_{n-3}) \\ &\ \vdots \\ &\le c^{n-2}\, d(x_2, x_1). \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N_\varepsilon : \dfrac{c^{n-1}}{1-c} d(x_2, x_1) < \varepsilon$.

Für $m > n > N_\varepsilon$ folgt

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\le} d(x_m, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\underset{\text{mehrfach}}{\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\le}} \sum_{j=n+1}^{m} d(x_j, x_{j-1}) \\ &\le \sum_{j=n+1}^{m} c^{j-2} d(x_2, x_1) \\ &\underset{j=k+n+1}{\overset{k=j-n-1}{\le}} d(x_2, x_1) \sum_{k=0}^{\infty} c^{n-1+k} \\ &= d(x_2, x_1) \frac{c^{n-1}}{1-c} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Schritt 2: Sei $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt $f(x_0) = x_0$.

Da f eine Kontraktion ist, ist f stetig: $d(x,y) < \varepsilon \ \Rightarrow \ d\big(f(x), f(y)\big) \le c\, d(x,y) < \varepsilon$.

$x_n \to x_0 \ \Rightarrow \ d\big(f(x_0), x_0\big) = \lim\limits_{n\to\infty} d\big(f(x_n), x_n\big) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} c^{n-1} d(x_2, x_1) = 0.$
$\Rightarrow \ f(x_0) = x_0.$

Eindeutigkeit: Seien $x_0, x_1 \in M$ mit $f(x_j) = x_j$.
$\Rightarrow\ d(x_0, x_1) = d\big(f(x_0), f(x_1)\big) \le c\, d(x_0, x_1) \overset{0\le c<1}{\Rightarrow}\ d(x_0, x_1) = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = x_0.$ $\square$

12.2 Beispiel (wichtig!): Sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$. Für $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt nach dem Mittelwertsatz 11.32

$$\begin{aligned} |f_j(x) - f_j(y)| &= \left| \sum_{k=1}^d \partial_k f_j\big(x + \xi(y-x)\big)(x_k - y_k) \right| \\ &\le d \max_{k\in\{1,\dots,d\}} \sup_{\xi\in[0,1]} \big|\partial_k f_j\big(x + \xi(y-x)\big)\big| \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

für jede Koordinatenfunktion f_j. Es folgt

$$\begin{aligned} \big\|f(x) - f(y)\big\| &= \left(\sum_{j=1}^d \big(f_j(x) - f_j(y)\big)^2 \right)^{1/2} \\ &\le d^{3/2} \max_{j,k\in\{1,\dots,d\}} \sup_{\xi\in[0,1]} \big|\partial_k f_j\big(x + \xi(y-x)\big)\big| \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$$c \ := \ d^{3/2} \max_{j,k\in\{1,\dots,d\}} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \big|\partial_k f_j(x)\big| \ < \ 1$$

ist f eine Kontraktion:

$$d\big(f(x), f(y)\big) \ = \ \big\|f(x) - f(y)\| \ \le \ c\|x - y\| \ = \ c\, d(x, y).$$

12.2 Satz über implizite Funktionen

12.3 Implizit definierte Funktionen: 1) Flächen im $\mathbb{R}^3$ werden oft durch Gleichungen definiert. Z.B. besteht die Einheitssphäre aus allen Punkten (x, y, z), die folgende Gleichung erfüllen:

$$F(x, y, z) \ := \ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \ = \ 0.$$

Oft wird eine explizite Darstellung $z = \varphi(x, y)$ benötigt. Bei der Kugel ist diese nur **lokal** möglich, z.B. Halbkugelfläche

$$z \ = \ \varphi(x, y) \ = \ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \text{für } x^2 + y^2 < 1.$$

Es gilt dann

$$F\big(x, y, \varphi(x, y)\big) \ = \ 0 \qquad \text{für } x^2 + y^2 < 1.$$

Man nennt $z = \varphi(x, y)$ eine **lokale Auflösung** der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ nach z.

2) Gegeben ist ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} F_1\big(x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_m\big) &=& 0 \\ F_2\big(x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_m\big) &=& 0 \\ \vdots && \vdots \;\; \vdots \\ F_m\big(x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_m\big) &=& 0 \end{array} \tag{$*$}$$

mit m Gleichungen für die m Unbekannten $y_1,\dots,y_m$. Die Gleichungen hängen von den Parametern $x_1,\dots,x_d$ ab. Eine lokale Auflösung ist eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \supseteq B_\delta(x_0) \mapsto \mathbb{R}^m$, so dass

$$\begin{array}{rcl} F_1\big(x,\varphi(x)\big) &=& 0 \\ \vdots && \vdots \;\; \vdots \\ F_m\big(x,\varphi(x)\big) &=& 0 \end{array} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in B_\delta(x_0).$$

Falls $\varphi(x)$ eindeutig ist: Die Funktion φ ist durch $(*)$ **implizit** definiert.

12.4 Satz über implizite Funktionen: Seien $D_x \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $D_y \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $F : D_x \times D_y \to \mathbb{R}^m$, $(x_0,y_0) \in D_x \times D_y$. Gelten

1) $F(x_0,y_0) = 0$,

2) $F \in C^1(D_x \times D_y \to \mathbb{R}^m)$,

3) die $m \times m$-Matrix $\partial_y F(x_0,y_0) := \begin{pmatrix} \partial_{y_1}F_1(x_0,y_0) & \dots & \partial_{y_m}F_1(x_0,y_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{y_1}F_m(x_0,y_0) & \dots & \partial_{y_m}F_m(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ ist invertierbar,

dann existieren $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass

$$\forall x \in B_{\delta_1}(x_0) \subseteq \mathbb{R}^d \ \exists! \varphi(x) \in B_{\delta_2}(y_0) \subseteq \mathbb{R}^m : F\big(x,\varphi(x)\big) = 0.$$

Außerdem gilt $\varphi \in C^1\big(B_{\delta_1}(x_0) \to \mathbb{R}^m\big)$.

Beweis: Setze $G(x,y) := y - \big(\partial_y F(x_0,y_0)\big)^{-1} F(x,y)$ für $(x,y) \in D_x \times D_y$.

1) Gesucht: Fixpunkt von $G(x,.)$:

$$G(x,y) = y \ \Leftrightarrow\ \big(\partial_y F(x_0,y_0)\big)^{-1} F(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ F(x,y) = 0.$$

2) Wahl des metrischen Raumes M:

$$\begin{array}{rcl} \partial_y G(x,y) &=& E_{d\times d} - \big(\partial_y F(x_0,y_0)\big)^{-1} \partial_y F(x,y) \\ &=& \big(\partial_y F(x_0,y_0)\big)^{-1} \big(\partial_y F(x_0,y_0) - \partial_y F(x,y)\big) \\ &\to& 0 \qquad \text{für } (x,y) \to (x_0,y_0), \end{array}$$

da $\partial_y F$ stetig in (x_0, y_0). Wähle $\delta_0 > 0$, so dass

$$\sup_{x\in B_{\delta_0}(x_0)} \sup_{y\in B_{\delta_0}(y_0)} \max_{1\le j,k\le m} \left|\partial_{y_j} G_k(x,y)\right| \;\le\; \frac{1}{2d^{3/2}}.$$

Setze $M := \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - y_0\| \le \delta_0\}$. Mit $d(y,\tilde{y}) = \|y - \tilde{y}\|$ ist (M,d) ein vollständiger metrischer Raum.

F ist stetig in (x_0, y_0) $\Rightarrow$

$$\exists \delta_1 \in]0,\delta_0[\;\; \forall x \in B_{\delta_1}(x_0) : \left\|\big(\partial_y F(x_0,y_0)\big)^{-1} \underbrace{\big(F(x,y_0) - F(x_0,y_0)\big)}_{\to 0 \text{ für } x\to x_0}\right\| \;<\; \frac{\delta_0}{2}$$

Sei nun $x_1 \in B_{\delta_1}(x_0)$ beliebig, aber fest gewählt.

3) Es gilt $\mathrm{Bild}\big(G(x_1,.)\big) \subseteq M$: Sei $y \in M$, also $\|y - y_0\| \le \delta_0$. Zeige $\|G(x_1,y) - y_0\| \le \delta_0$.

$$\begin{aligned}\big\|G(x_1,y) - y_0\big\| \;&=\; \big\|G(x_1,y) - G(x_0,y_0)\big\| \\ &\le\; \underbrace{\big\|G(x_1,y) - G(x_1,y_0)\big\|}_{(1)} + \underbrace{\big\|G(x_1,y_0) - G(x_0,y_0)\big\|}_{(2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1) \quad &\overset{\text{wie in 12.2}}{\le} \quad d^{3/2} \sup_{y\in B_{\delta_0}(y_0)} \max_{1\le j,k\le m} \left|\partial_{y_j} G_k(x_1,y)\right| \cdot \|y - y_0\| \\ &\le \quad d^{3/2} \frac{1}{2d^{3/2}} \|y - y_0\| \\ &\le \quad \frac{\delta_0}{2}, \\ (2) \quad &= \quad \left\|y_0 - \big(\partial_y F(x_0,y_0)\big)^{-1} F(x_1,y_0) - \big(y_0 - \big(\partial_y F(x_0,y_0)\big)^{-1} F(x_0,y_0)\big)\right\| \\ &= \quad \left\|\big(\partial_y F(x_0,y_0)\big)^{-1} \big(F(x_1,y_0) - F(x_0,y_0)\big)\right\| \\ &< \quad \frac{\delta_0}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \;\|G(x_1,y) - y_0\| \;<\; \delta_0$

4) $G(x_1,.)$ ist eine Kontraktion: Seien $y, \tilde{y} \in M$:

$$\begin{aligned}\big\|G(x_1,y) - G(x_1,\tilde{y})\big\| \quad &\overset{\text{wie in 12.2}}{\le} \quad d^{3/2} \sup_{y\in B_{\delta_0}(y_0)} \max_{1\le j,k\le m} \left|\partial_{y_j} G_k(x_1,y)\right| \cdot \|y - \tilde{y}\| \\ &\le \quad d^{3/2} \frac{1}{2d^{3/2}} \|y - \tilde{y}\| \\ &= \quad \underbrace{\frac{1}{2}}_{=:c} \|y - \tilde{y}\|.\end{aligned}$$

Mit dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun: $\exists! y(x_1) \in M : G(x_1, y(x_1)) = y(x_1)$.

Definiere $\varphi(x) := y(x)$ für $x \in B_{\delta_1}(x_0)$. Dann gilt

$F\big(x, \varphi(x)\big) = 0$ für $x \in B_{\delta_1}(x_0)$ und

$y = \varphi(x)$ ist die einzige Lösung von $F(x,y) = 0$ mit $\|y - y_0\| \le \delta_0$.

5) Zeige: φ ist stetig in x_0. Beachte: $F(x_0, y_0) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(x_0) = y_0$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $\tilde{\delta}_0 := \min\{\varepsilon, \delta_0\} > 0$ und $\tilde{M} := \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - y_0\| < \tilde{\delta}_0\}$. Führe Schritt 3 und 4 für $x_1 \in B_{\tilde{\delta}_1}(x_0)$ mit geeignetem $\tilde{\delta}_1 \in \,]0, \tilde{\delta}_0[$ durch.

$$\Rightarrow\; \exists! \tilde{y} \in \tilde{M} : G(x_1, \tilde{y}) = \tilde{y} \text{ bzw. } F(x, \tilde{y}) = 0.$$

Da $\tilde{M} \subseteq M$ und die Lösung von $F\big(x, y\big) = 0$ eindeutig in M ist, folgt $\tilde{y} = \varphi(x)$.
$\Rightarrow\; \forall x_1 \in B_{\tilde{\delta}_1}(x_0) : \big\|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)\big\| \;=\; \|\tilde{y} - y_0\| \le \tilde{\delta}_0 \le \varepsilon$.
Oder anders: $\|x_1 - x_0\| < \tilde{\delta}_1 \;\Rightarrow\; \big\|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)\big\| \le \varepsilon$.
Dies beweist die Stetigkeit von φ in x_0.

6) Zeige, dass φ stetig ist: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\partial_y F(x_0, y_0) \text{ invertierbar} \;\Leftrightarrow\; \det\big(\partial_y F(x_0, y_0)\big) \neq 0 \\
&\underset{\text{von } F \text{ sind stetig}}{\overset{\text{partielle Ableitungen}}{\Rightarrow}} \quad \exists \delta_3 \in \,]0, \delta_1[\;\; \forall x \in B_{\delta_3}(x_0)\; \forall y \in B_{\delta_3}(y_0) : \det\big(\partial_y F(x, y)\big) \neq 0. \\
&\Rightarrow \quad \exists \delta_3 \in \,]0, \delta_1[\;\; \forall x \in B_{\delta_3}(x_0)\; \forall y \in B_{\delta_3}(y_0) : \partial_y F(x, y) \text{ ist invertierbar.}
\end{aligned}$$

Wende 1) – 5) im Punkt $\big(x, \varphi(x)\big)$ anstelle von (x_0, y_0) an
$\Rightarrow$ neue Lösung $=$ alte Lösung wegen Eindeutigkeit
$\Rightarrow$ φ ist stetig in x für alle $x \in B_{\delta_3}(x_0)$ falls $\delta_3 < \delta_0$, sonst für alle $x \in B_{\delta_0}(x_0)$.

7) Differenzierbarkeit wird nach dem folgenden Satz bewiesen.

□

12.5 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $A : D \to \mathbb{R}^{m^2}$ eine matrixwertige Funktion, $A(x) = \big(a_{jk}(x)\big)_{j,k=1,\ldots,m}$, $x_0 \in D$, $\forall j, k = 1, \ldots m : a_{jk}$ stetig in x_0, $\det\big(A(x_0)\big) \neq 0$. Dann gelten

1) $\exists \delta > 0\; \forall x \in B_\delta(x_0) : \det\big(A(x)\big) \neq 0$.

2) $\big(A(x)\big)^{-1} \to \big(A(x_0)\big)^{-1}$ für $x \to x_0$ (Konvergenz der Einträge in der Matrix).

Beweis: **1)** Z.B. $m = 2$: $\det\big(A(x)\big) = \det\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} = a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{12}(x)a_{21}(x)$
$\Rightarrow$ $\det\big(A(x)\big)$ ist stetig in x_0
$\Rightarrow$ Behauptung.
Allgemeines m: Leibniz-Formel: $\det\big(A(x)\big) =$ Summe von Produkten aus $a_{jk}(x)$
$\Rightarrow$ $\det\big(A(x)\big)$ ist stetig in x_0.

2) Z.B. $n = 2$: Cramersche Regel:

$$\big(A(x)\big)^{-1} \;=\; \frac{1}{\det\big(A(x)\big)} \begin{pmatrix} a_{22}(x) & -a_{12}(x) \\ -a_{21}(x) & a_{11}(x) \end{pmatrix} \;\to\; \big(A(x_0)\big)^{-1} \quad \text{für } x \to x_0.$$

Im allgemeinen Fall genauso mit Cramerscher Regel

$$\big(A(x)\big)^{-1} \;=\; \frac{1}{\det\big(A(x)\big)} \operatorname{adj}\big(A(x)\big) \;\to\; \big(A(x_0)\big)^{-1} \quad \text{für } x \to x_0.$$

□

Beweis des Satzes über implizite Funkionen, Fortsetzung: Bisher bewiesen: $\exists \delta_0, \delta_3 > 0$:

$$\forall x \in B_{\delta_3}(x_0)\ \exists! \varphi(x) \in \mathbb{R}^d : \|\varphi(x) - y_0\| \leq \delta_0 \ \wedge\ F\big(x, \varphi(x)\big) = 0$$

und φ ist stetig. Daher ist $\delta_4 \in]0, \delta_3]$ wählbar, so dass $\|x - x_0\| < \delta_4 \Rightarrow \|\varphi(x) - y_0\| < \delta_0$.

Nun muss noch die Differenzierbarkeit von φ nachgewiesen werden. Zeige

$$\partial_{x_l}\varphi(x) \ = \ -\big(\partial_y F\big(x, \varphi(x)\big)\big)^{-1} (\partial_{x_l}F)\big(x, \varphi(x)\big) \quad \text{für } x \in B_{\delta_3}(x_0) \tag{$*$}$$

für $l = 1, \ldots, d$. Mit 12.5 folgt dann aus der Stetigkeit von φ auch die Stetigkeit von $\partial_{x_l}\varphi$
$\Rightarrow\ \varphi \in C^1(B_{\delta_3}(x_0) \to \mathbb{R}^d)$.
Sei $h \neq 0$. Für $j = 1, \ldots, m$ gilt mit zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes

$$\begin{aligned}
0 \ &= \ \frac{1}{h}\Big(\underbrace{F_j\big(x + h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big)}_{=0} - F_j\big(x, \varphi(x + h\, e_l)\big)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{h}\Big(F_j\big(x, \varphi(x + h\, e_l)\big) - \underbrace{F_j\big(x, \varphi(x)\big)}_{=0}\Big) \\
&= \ \frac{1}{h}(\partial_x F_j)\big(x + \xi_j h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big)\,(x + h\, e_l - x) \\
&\quad + \frac{1}{h}(\partial_y F_j)\big(x, \varphi(x) + \eta_j(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x))\big)\big(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x)\big),
\end{aligned}$$

wobei $\xi_j, \eta_j \in]0, 1[$. Fasse die Koordinaten $F_1, \ldots, F_m$ zu einem Vektor zusammen:

$$\begin{aligned}
0 \ &= \ \begin{pmatrix} (\partial_{x_l}F_1)\big(x + \xi_1 h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big) \\ \vdots \\ (\partial_{x_l}F_m)\big(x + \xi_m h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big) \end{pmatrix} \\
&\quad + \underbrace{\begin{pmatrix} (\partial_y F_1)\big(x, \varphi(x) + \eta_1(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x))\big) \\ \vdots \\ (\partial_y F_m)\big(x, \varphi(x) + \eta_m(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x))\big) \end{pmatrix}}_{=:A(h)\ \overset{h\to 0}{\to}\ (\partial_y F)(x,\varphi(x))\ \text{invertierbar}} \frac{1}{h}\big(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x)\big).
\end{aligned}$$

Aus Satz 12.5: $A(h)$ ist für kleines $|h|$ invertierbar und $\big(A(h)\big)^{-1} \to \big((\partial_y F)(x, \varphi(x))\big)^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \frac{1}{h}\big(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x)\big) \ &= \ -\big(A(h)\big)^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} (\partial_{x_l}F_1)\big(x + \xi_1 h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big) \\ \vdots \\ (\partial_{x_l}F_m)\big(x + \xi_m h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big) \end{pmatrix}}_{\to\ (\partial_{x_l}F\big(x,\varphi(x)\big))} \\
&\overset{h\to 0}{\to} \ -(\partial_y F)\big(x, \varphi(x)\big)\big(\partial_{x_l}F\big(x, \varphi(x)\big)\big).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ (*)$. $\square$

12.6 Berechnung der Ableitung: Sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt, so ist die Auflösungsfunktion φ differenzierbar. Die Ableitung kann dann mit der Kettenregel berechnet werden: Beachte

$$F'(x, y) \ = \ \big(\partial_x F(x, y) \quad \partial_y F(x, y)\big) \quad (m \times (d + m)\text{-Matrix}).$$

Definiere $\Phi(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d}(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi'(x) = \begin{pmatrix} E_{d\times d} \\ \varphi'(x) \end{pmatrix}$ ($(d+m)\times d$-Matrix). Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= F\big(x,\varphi(x)\big) \\ \Leftrightarrow 0 &= (F\circ\Phi)(x) \\ \Rightarrow 0 &= (F\circ\Phi)'(x) = F'(\Phi(x))\circ\Phi'(x) = \partial_x F\big(x,\varphi(x)\big)E_{d\times d} + \partial_y F\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x) \\ \Rightarrow \varphi'(x) &= -\big(\partial_y F\big(x,\varphi(x)\big)\big)^{-1}(\partial_x F)\big(x,\varphi(x)\big). \end{aligned}$$

Falls $F \in C^k(D_x \times D_y \to \mathbb{R}^m) \Rightarrow$ Formel kann differenziert werden $\Rightarrow \varphi \in C^k(B_{\delta_1}(x_0) \to \mathbb{R}^m)$.

12.7 Hilfssatz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $g : D \to \mathbb{R}^m$ stetig, $O \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Dann ist $g^{-1}(O) = \{x \in D : g(x) \in O\}$ offen im $\mathbb{R}^d$.

Beweis: Sei $x_0 \in g^{-1}(O)$. Zeige: $\exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subseteq g^{-1}(O)$.

O offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon\big(g(x_0)\big) \subseteq O$

g stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow g(x) \in B_\varepsilon\big(g(x_0)\big) \subseteq O$

$\Rightarrow B_\delta(x_0) \subseteq g^{-1}(O)$. $\square$

Erinnerung: Formel aus Analysis 1: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

12.3 Umkehrabbildungen

12.8 Anwendung: Umkehrfunktion: Gegeben: $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^d$.
Gesucht: Zu $y \in \mathrm{Bild}(f)$ suche $x \in D$ mit $f(x) = y$
Methode: Definiere $F(y,x) := y - f(x)$ für $y \in \mathbb{R}^d, x \in D$,
suche lokale Auflösung $x = \varphi(y)$ mit $F\big(y,\varphi(y)\big) = 0 \Leftrightarrow y = f\big(\varphi(y)\big)$.
Satz über implizite Funktionen anwenden. Welche Voraussetzungen muss f dafür erfüllen?

0) $F : D \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, also $m = d$.

1) $F(x_0, y_0) = 0$: Ein $x_0 \in D$ auswählen, $y_0 := f(x_0)$ setzen.

2) $F \in C^1(D_x \times D_y \to \mathbb{R}^d)$: $D_x := D$, $D_y := \mathbb{R}^d$
$\partial_y F(x,y) = E$ ist stetig
$\partial_x F(x,y) = -f'(x)$. Setze voraus: $f \in C^1(D \to \mathbb{R})$.

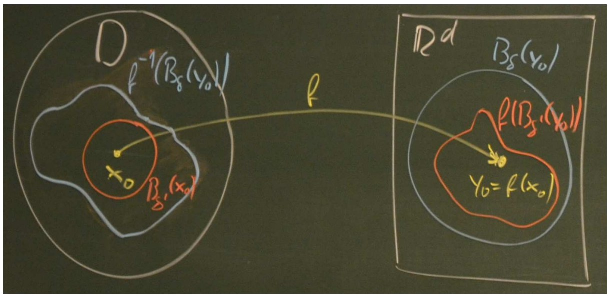
3) $\partial_x F(x_0, y_0) = -f'(x_0)$ muss invertierbar sein.

Dann besagt der Satz über implizite Funktionen: $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$:

$$\forall y \in B_{\delta_1}(y_0)\ \exists! \varphi(y) \in B_{\delta_2}(x_0) : F\big(y, \varphi(y)\big) = 0 \text{ bzw. } y = f\big(\varphi(y)\big).$$

Das bedeutet: Lokal auf $B_{\delta_1}(y_0)$ existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) := \varphi(y)$, denn $f\big(\varphi(y)\big) = y$. Außerdem gilt $f^{-1} = \varphi \in C^1(B_{\delta_1}(y_0) \to \mathbb{R}^d)$. Wie in 12.6 erhält man

$$\begin{aligned} 0 = y - f\big(\varphi(y)\big) \quad &\underset{\text{Kettenregel}}{\overset{\text{Ableiten}}{\Rightarrow}} \quad 0 = E_{d\times d} - \underbrace{f'\big(f^{-1}(y)\big)}_{\text{invertierbar}} \circ \big(f^{-1}(y)\big)' \\ &\Rightarrow \quad \big(f^{-1}(y)\big)' = \Big(f'\big(f^{-1}(y)\big)\Big)^{-1}. \end{aligned}$$



12.7 $\Rightarrow$ $f^{-1}\big(B_{\delta_1}(y_0)\big)$ ist offen $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}\big(B_{\delta_1}(y_0)\big)$.
Dann ist $f : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^d$ injektiv.
f^{-1} stetig $\overset{12.7}{\Rightarrow}$ $f\big(B_\delta(x_0)\big) = \big(\underbrace{f^{-1}}_{\text{stetig}}\big)^{-1}\big(B_\delta(x_0)\big)$ ist offen.
Außerdem ist f^{-1} ist auf $f\big(B_\delta(x_0)\big)$ stetig differenzierbar.

12.9 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $f \in C^1(D \to \mathbb{R})$, $x_0 \in D$, $f'(x_0)$ invertierbare $d \times d$-Matrix. Dann

$$\exists \delta > 0\ f : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^d \text{ ist injektiv.}$$

Außerdem ist $f\big(B_\delta(x_0)\big)$ offen, und es gelten

$$\begin{aligned} &f^{-1} \in C^1\Big(f\big(B_\delta(x_0)\big) \to \mathbb{R}^d\Big) \\ &\big(f^{-1}(y)\big)' = \Big(f'\big(f^{-1}(y)\big)\Big)^{-1} \quad \text{für } y \in f\big(B_\delta(x_0)\big). \end{aligned}$$

Gilt zusätzlich $f \in C^k(D \to \mathbb{R}^d)$, so folgt $f^{-1} \in C^k\Big(f\big(B_\delta(x_0)\big) \to \mathbb{R}^d\Big)$.
Man sagt: $f : B_\delta(x_0) \to f\big(B_\delta(x_0)\big)$ ist ein $\boldsymbol{C^k}$**-Diffeomorphismus** (d.h. $f : B_\delta(x_0) \to f\big(B_\delta(x_0)\big)$ ist bijektiv und f, f^{-1} sind k-Mal stetig differenzierbar).

12.10 Wichtigste Form der Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big) \;=\; (\partial_{x_1} f)(\ldots)g_1'(t) + (\partial_{x_2} f)(\ldots)g_2'(t) + (\partial_{x_3} f)(\ldots)g_3'(t)$$

falls g_1, g_2, g_3 differenzierbar in t und f differenzierbar in $\big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big)$.

12.11 Beispiel Polarkoordinaten:

$$\begin{array}{rcl} x(r,\varphi) & = & r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) & = & r\sin\varphi \end{array} \quad \text{für } r>0,\ 0<\varphi<2\pi \text{ (oder } \varphi_0<\varphi<2\pi+\varphi_0).$$

Dadurch ist eine bijektive Abbildung $]0,\infty[\times]0,2\pi[\ \ni (r,\varphi)\mapsto (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):x\geq 0\}$ definiert.

Umkehrfunktion? $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ist klar. $\varphi(x,y)=?$.

Es gilt

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right)=r\neq 0 \ \Rightarrow$ die Abbildung ist lokal invertierbar und

$$\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1}\Bigg|_{(r,\varphi)=(r(x,y),\varphi(x,y))} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Diese Formel ist für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ohne Ausnahmen gültig.
Umrechnung von Ableitungen:
Für $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sei $F(r,\varphi):=f\big(x(r\varphi),y(r,\varphi)\big)=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$. Mit Kettenregel:

$$F'(r,\varphi) \ = \ (\partial_r F,\partial-\varphi F) \ = \ f'\big(x(r\varphi),y(r,\varphi)\big)\circ\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$$

Ist umgekehrt $G(x,y):=g\big(r(x,y),\varphi(x,y)\big)$, so ergibt die Kettenregel

$$G'(x,y) \ = \ g'\big(r(x,y),\varphi(x,y)\big)\circ\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)}$$

12.4 Extrema unter Nebenbedingungen

12.12 Beispiel: Gesucht ist der Quader mit dem größten Volumen und Oberflächeninhalt 1:

Maximiere	$f(a,b,c)=abc$	(Z)
unter der Nebenbedingung	$g(a,b,c)=2ab+2ac+2bc=1$	(N)

Lösungsmöglichkeit: Löse (N) nach c auf: $c=\dfrac{1-2ab}{2(a+b)}$, setze in (Z) ein und löse Extremwertproblem in zwei Variablen.

Bei komplizierte Nebenbedingung (N), z.B. $g(a,b,c)=a^2+b^2+c^2$ oder mehreren Nebenbedingungen, ist globale Auflösung nach einer Variablen eventuell gar nicht möglich.

12.13 Notwendige Bedingung: Seien $m<d$, $D\subseteq\mathbb{R}^d$ offen, $f\in C^1(D\to\mathbb{R})$, $g\in C^1(D\to\mathbb{R}^m)$ mit $\mathrm{Rang}\big(g'(x)\big)=m$ auf D und

$$N \ := \ \big\{x\in D: g(x)=0\big\}.$$

(N ist die Menge der $x \in D$, die die m Nebenbedingungen $g_1(x) = 0 \wedge \ldots \wedge g_m(x) = 0$ erfüllen.)

Hat die eingeschränkte Funktion $f\big|_N$ ein lokales Extremum in $x_0 \in N$, so folgt

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m : f'(x_0) + \lambda^T g'(x_0) \;=\; 0$$

bzw. ausgeschrieben

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m \;\forall j = 1, \ldots d: \;\partial_j f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \partial_j g_k(x_0) \;=\; 0.$$

Beweis: Wegen $\operatorname{Rang}\big(g'(x_0)\big) = m$ gilt (eventuell nach Vertauschung der Reihenfolge der Koordinaten)

$$\operatorname{Rang}\big(\partial_k g_j(x_0)\big)_{j,k=1,\ldots,m} = m \text{ bzw. äquivalent } \det\big(\partial_k g_j(x_0)\big)_{j,k=1,\ldots,m} \neq 0.$$

Setze $y = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,\; z = (x_{m+1}, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-m}$, entsprechend y_0, z_0.

$$\Rightarrow \; g(y_0, z_0) = 0 \text{ und } \partial_y g(y_0, z_0) = \big(\partial_k g_j(x_0)\big)_{j,k=1,\ldots,m} \text{ ist invertierbar.}$$

Beachte

$$\begin{aligned} f'(x_0) + \lambda^T g'(x_0) \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \big(\partial_y f(y_0, z_0), \partial_z f(y_0, z_0)\big) + \lambda^T \big(\partial_y g(y_0, z_0), \partial_z g(y_0, z_0)\big) \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{\partial_y f(y_0, z_0) + \lambda^T \partial_y g(y_0, z_0) = 0}_{(1)} \wedge \; \underbrace{\partial_z f(y_0, z_0) + \lambda^T \partial_z g(y_0, z_0) = 0}_{(2)} \end{aligned}$$

1) Bestimmung des Vektors λ: Das lineare Gleichungssystem

$$\big(\partial_y g(x_0, y_0)\big)^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \;=\; -\begin{pmatrix} \partial_{y_1} f(y_0, z_0) \\ \cdots \\ \partial_{y_m} f(y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

besitzt eine eindeutige Lösung $\lambda =: \lambda_0 \in \mathbb{R}^m$. Transponieren der Gleichung:

$$\lambda_0^T \partial_y g(y_0, z_0) \;=\; -\partial_y f(y_0, z_0).$$

$\Rightarrow \;\exists! \lambda_0 \in \mathbb{R}^m$: (1) ist erfüllt.

2) Nachweis von (2) für $\lambda = \lambda_0$:

Wende den Satz über implizite Funktionen auf

$$g(y, z) = 0, \quad g(y_0, z_0) = 0, \quad \partial_y g(y_0, z_0) \text{ invertierbar}$$

an $\Rightarrow$ Es existiert eine eindeutige lokale Auflösung $\varphi \in C^1\big(B_\delta(z_0) \to \mathbb{R}^m\big)$ so dass

$$g\big(\varphi(z), z\big) = 0 \text{ für } z \in B_\delta(z_0).$$

Wir benötigen φ'. Mit Kettenregel:

$$\begin{aligned}\underbrace{\partial_y g(y_0,z_0)\circ\varphi'(z_0)}_{\text{Matrix Mal Vektor}}+\partial_z g(y_0,z_0) &= 0\\ \Rightarrow\ \varphi'(z_0)=-\big(\partial_y g(y_0,z_0)\big)^{-1}\partial_z g(y_0,z_0).\end{aligned}$$

Setze $y=\varphi(z)$ in f ein:

$$F(z) := f\big(\varphi(z),z\big).$$

$f\big|_N$ hat lokales Extremum in x_0 $\Rightarrow$ F hat ein lokales Extremum in z_0 $\Rightarrow$ $F'(z_0)=0$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad (\partial_y f)(y_0,z_0)\circ\varphi'(z_0)+\partial_z f(y_0,z_0) = 0\\
&\Leftrightarrow\quad (\partial_y f)(y_0,z_0)\Big(-\big(\partial_y g(y_0,z_0)\big)^{-1}\partial_z g(y_0,z_0)\Big)+\partial_z f(y_0,z_0) = 0\\
&\underset{\lambda=\lambda_0}{\overset{(1)}{\Rightarrow}}\quad \big(\lambda_0^T\partial_y g(y_0,z_0)\big)\big(\partial_y g(y_0,z_0)\big)^{-1}\partial_z g(y_0,z_0)+\partial_z f(y_0,z_0) = 0\\
&\overset{\text{AG}}{\Leftrightarrow}\quad \lambda_0^T\partial_z g(y_0,z_0)+\partial_z f(y_0,z_0) = 0\\
&\Leftrightarrow\quad (2)
\end{aligned}$$

□

12.14 Bemerkung: Zur Bestimmung von Kandidaten für lokale Extrema werden die $d+m$ Gleichungen

$$\begin{aligned}f'(x_0)+\lambda^T g'(x_0) &= 0 \quad (d \text{ Gleichungen})\\ g'(x_0) &= 0 \quad (m \text{ Gleichungen})\end{aligned}$$

für die $d+m$ Unbekannten $x_1,\dots,x_d,\lambda_1,\dots,\lambda_m$ gelöst.

12.15 Methode von Lagrange: Seien die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt. Bilde die Funktion

$$F(x,\lambda) := f(x)+\lambda^T g(x) \text{ für } x\in D,\ \lambda\in\mathbb{R}^m.$$

Hat $f\big|_N$ in $x_0\in N$ ein lokales Extremum, so folgt

$$\exists\lambda_0\in\mathbb{R}^m : F'(x_0,\lambda_0) = 0.$$

Beweis: Beachte: $F'=(\partial_x F,\partial_\lambda F)$. Nach letztem Satz:

$$\exists\lambda_0\in\mathbb{R}^m : f'(x_0)+\lambda_0^T g'(x_0)=0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\partial_x F(x_0,\lambda_0) &= f'(x_0)+\lambda_0^T g'(x_0) = 0,\\ \partial_\lambda F(x_0,\lambda_0) &= g(x_0) \overset{x_0\in N}{=} 0.\end{aligned}$$

□

12.16 Beispiel: Gesucht ist das Maximum von $f(a,b,c) = abc$
unter der Nebenbedingung $g(a,b,c) = 2ab + 2ac + 2bc = 1$.
Hinweis: Lös man die Nebenbedingung nach c auf: $c = \dfrac{1-2ab}{2(a+b)}$, so folgt mit der Abschätzung $(a+b)^2 \geq 4ab$:

$$0 \;\leq\; f(a,b,c) \;\leq\; ab\frac{1-2ab}{4\sqrt{ab}} \;=\; \frac{1}{4}\sqrt{ab}(1-2ab).$$

in $D = \{(a,b,c) : a,b,c > 0\}$. Man sieht, dass f am Rand von D verschwindet.

12.17 Satz von Heine-Borel: In $\mathbb{R}^d$ gilt für $K \subseteq \mathbb{R}^d$

$$K \text{ ist kompakt } \Leftrightarrow K \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.}$$

Der Beweis verläuft entsprechend dem Fall $d = 1$.

12.18 Satz: Seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume, $D \subseteq M_1$ offen, $f : D \to M_2$ stetig. Ist $K \subseteq D$ kompakt, dann ist $f(K)$ kompakt.

Beweis: Sei $O = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, d.h. die Elemente von O sind offen und $f(K) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha$.

Zeige: $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A : f(K) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} O_{\alpha_j}$. Dann folgt die Kompaktheit von $f(K)$.
Betrachte $O' := \left\{f^{-1}(O_\alpha) : \alpha \in A\right\}$. Dann:

1) $\forall \alpha \in A : f^{-1}(O_\alpha)$ ist offen. Siehe Beweis von Satz 12.7.

2) O' ist Überdeckung von K, denn $x \in K \;\Rightarrow\; \exists \alpha \in A : f(x) \in O_\alpha \;\Rightarrow\; x \in f^{-1}(O_\alpha)$.

3) O' offene Überdeckung von $K \;\wedge\; K$ kompakt
$\Rightarrow\; \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A : K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} f^{-1}(O_{\alpha_j})$.
$\Rightarrow\; f(K) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} f\big(f^{-1}(O_{\alpha_j})\big) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} O_{\alpha_j}$.

□

12.19 Folgerung: Ist (M,d) metrischer Raum, $D \subseteq M$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $K \subseteq D$ kompakt. Dann besitzt $f\big|_K$ auf K ein Maximum und ein Minimum:

$$\exists x_1, x_2 \in K\ \forall x \in K : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Beweis: $f(K)$ ist kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$
$\overset{\text{Satz 6.32}}{\Rightarrow}\ \sup\{f(x) : x \in K\} = \sup\{y : y \in f(K)\} \in f(K)$.
Genauso für Minimum.

□

13 Gleichmäßigkeit

13.1 Vertauschung von Grenzwert und Integral

13.1 Frage: Gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}x \;=\; \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathsf{d}x?$$

Antwort: Nicht allgemein, denn

$$f_n(x) \;:=\; \begin{cases} n^2x & 0\le x<\frac{1}{n} \\ 2n-n^2x & \frac{1}{n}\le x<\frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n}\le x \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \forall n\in\mathbb{N}: \int_0^1 f_n(x) \;=\; 1$$

$$\text{Aber: } \forall x\in[0,1]: f_n(x)\to 0 \quad\Rightarrow\quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathsf{d}x \;=\; 0$$

13.2 Satz: Sei $-\infty<a<b<\infty<$, $\forall n\in\mathbb{N}: f_n\in\mathcal{R}([a,b])$ und $f_n\to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Dann folgen

- $f\in\mathcal{R}([a,b])$,
- $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent,
- $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}x \;=\; \int_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=f(x)}\,\mathsf{d}x.$

Beweis: $f_n\to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\|f_n-f\|_\infty=\sup\limits_{[a,b]}\big|f_n(x)-f(x)\big|\to 0.$

10.18: $\big(\mathcal{R}([a,b]),\|.\|_\infty\big)$ ist ein Banachraum, d.h. vollständig $\Rightarrow$ $f\in\mathcal{R}([a,b])$.
Also ist f über $[a,b]$ integrierbar.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \left|\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}x\right| &\overset{\text{Linearität}}{=} \left|\int_a^b \big(f_n(x)-f(x)\big)\,\mathsf{d}x\right| \\ &\overset{\text{Monotonie}}{\le} \int_a^b \big|f_n(x)-f(x)\big|\,\mathsf{d}x \\ &\overset{\text{Monotonie}}{\le} \int_a^b \|f_n-f\|_\infty\,\mathsf{d}x \\ &= (b-a)\|f_n-f\|_\infty \;\to\; 0.\end{aligned}$$

$\square$

13.3 Folgerung: Sei $-\infty < a < b < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{R}([a,b])$. Ist die Reihe

$$f(x) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$, so folgen

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \;\wedge\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \text{ ist konvergent } \;\wedge\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

13.4 Gleichmäßiger Grenzwert einer Funktion: Seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume, $D \subseteq M_1$, X Menge, $f : D \times X \to M_2$, $x_0 \in H(D)$, $\varphi : X \to M_2$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x,t) = \varphi(t) \textbf{ gleichmäßig bezüglich } t \in X,$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x' \in D\ \forall t \in X : d_1(x,x') < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2\big(f(x,t), \varphi(t)\big) < \varepsilon$$

(vgl. 9.1).

13.5 Satz: Sei (M,d) metrischer Raum, $D \subseteq M$, $-\infty < a < b < \infty <$, $f : D \times [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\forall x \in D : f(x,.) : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ ist Regelfunktion.}$$

Gilt für ein $x_0 \in H(D) \cap D$

$$\lim_{x \to x_0} f(x,t) = \varphi(t) \text{ gleichmäßig bezüglich } t \in [a,b],$$

dann folgen:

- $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$,
- $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \lim_{x \to x_0} f(x,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$

Beweis: Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to x_0$. Setze $g_n(t) := f(x_n,t)$. Dann folgt $g_n \in \mathcal{R}([a,b])$ und $g_n(t) \to \varphi(t)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [a,b]$.

$$\overset{13.2}{\Rightarrow}\; \varphi \in \mathcal{R}([a,b]) \;\wedge\; \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x_n,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \lim_{n \to \infty} f(x_n,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Da der Grenzwert nicht von der Folge (x_n) abhängt, folgt die Behauptung. $\square$

13.2 Parameterabhängige Integrale

13.6 Grundvoraussetzung: In diesem Kapitel wird immer vorausgesetzt:
$-\infty < a < b < \infty$, X ist eine Menge, $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ und

$$J(x) \;:=\; \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ für } x \in X,$$

sofern $f(x,.) \in \mathcal{R}([a,b])$.

13.7 Satz: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $f \in C(K \times [a,b] \to \mathbb{R})$. Dann ist J definiert und stetig auf K.

Beweis: **1)** Für jedes feste $x \in K$ gilt $f(x,.) \in C([a,b] \to \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; J(x)$ ist definiert.

2) Setze

$$K' \;:=\; K \times [a,b] \;=\; \big\{(x,t) = (x_1,\dots,x_d,t) : x \in K \;\wedge\; t \in [a,b]\big\}.$$

Nach Heine Borel ist K beschränkt und abgeschlossen
$\Rightarrow$ K' ist beschränkt und abgeschlossen
$\overset{\text{Heine-Borel}}{\Rightarrow}$ K' ist kompakt.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Satz 6.52 ist f auf K' gleichmäßig stetig.

$$\Rightarrow\; \exists \delta_\varepsilon > 0\; \forall (x,t),(x',t') \in K' : \big\|(x,t)-(x',t')\big\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \big|f(x,t)-f(x',t')\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Für $x, x' \in K$ mit $\|x - x'\| < \delta_\varepsilon$ folgt $\|(x,t)-(x',t)\| < \delta_\varepsilon$ für $t \in [a,b]$ und

$$\begin{aligned} \big|J(x)-J(x')\big| &= \left|\int_a^b \big(f(x,t)-f(x',t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_a^b \big|f(x,t)-f(x',t)\big|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

13.8 Folgerung: Sei $-\infty \le c < d \le \infty$ und $f \in C(\,]c,d[\, \times [a,b] \to \mathbb{R})$. Dann ist J definiert und stetig auf $]c,d[$.

Beweis: $J(x)$ ist definiert: Wie vorher.

Sei $x \in\,]c,d[$ fest. Wähle $\delta > 0$, so dass $K := [x-\delta, x+\delta] \subseteq\,]c,d[$.

$$\overset{\text{voriger Satz}}{\Rightarrow} \quad J \text{ ist stetig auf K} \quad\Rightarrow\quad J \text{ ist stetig in } x.$$

□

13.9 Satz: Seien $-\infty \le c < d \le \infty$, $\Omega :=]c,d[\, \times [a,b]$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

- $\forall x \in]c,d[: f(x,.) \in \mathcal{R}([a,b])$,
- $\forall (x,t) \in \Omega : f$ ist in (x,t) partiell nach x differenzierbar,
- $\partial_x f \in C(\Omega \to \mathbb{R})$.

Dann gilt $J \in C^1(\,]c,d[\to \mathbb{R})$ und

$$J'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ für } x \in]c,d[\,,$$

d.h. Ableitung nach x und $\displaystyle\int_a^b \ldots \,\mathrm{d}t$ sind vertauschbar.

Beweis: Nach Voraussetzungen sind $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t,\ \int_a^b \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t$ definiert für $x \in]c,d[$.

Sei $x \in]c,d[$ fest. Wähle $\delta_0 > 0$, so dass $K := [x-\delta_0, x+\delta_0] \subseteq]c,d[$. Dann ist $\partial_x f$ auf $[x-\delta_0, x+\delta_0] \times [a,b]$ gleichmäßig stetig.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\delta \in]0,\delta_0]$, so dass

$$\forall x, x' \in [x_0-\delta, x_0+\delta]\ \forall t \in [a,b] : |x-x'| < \delta \Rightarrow \big|\partial_x f(x,t) - \partial_x f(x',t)\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Für $|h| < \delta,\ h \neq 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{J(x+h)-J(x)}{h} - \int_a^b \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \quad &= \quad \left|\int_a^b \left(\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h} - \partial_x f(x,t)\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\overset{\text{Mittelwertsatz}}{\underset{\text{Diff'rechnung}}{=}} \quad \left|\int_a^b \big(\partial_x f(x+\xi_t h,t) - \partial_x f(x,t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \quad \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t \\
&= \quad \varepsilon.
\end{aligned}$$

(Beachte: $\forall t \in [a,b] : \partial_x f(.,t)$ stetig $\Rightarrow$ $f(.,t)$ stetig.)

$\varepsilon \to 0+0 \;\Rightarrow\;$ Formel für $J'(x)$.

13.8 $\;\Rightarrow\; J' \in C(\,]c,d[\to \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; J \in C^1(\,]c,d[\to \mathbb{R})$. □

13.10 Satz: Seien die Voraussetzungen von Satz 13.9 erfüllt, $u, o \in C^1(]c,d[\to \mathbb{R})$ mit $\mathrm{Bild}(u), \mathrm{Bild}(o) \subseteq [a,b]$ und

$$J(x) \;:=\; \int_{u(x)}^{o(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann folgt $J \in C^1(\,]c,d[\to \mathbb{R})$ und

$$J'(x) \;=\; f\big(x, o(x)\big)o'(x) - f\big(u(x)\big)u'(x) + \int_{u(x)}^{o(x)} \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis: Setze

$$F(x_1, x_2, x_3) \;:=\; \int_{x_1}^{x_2} f(x_3, t)\,\mathrm{d}t.$$

Es gelten

$$\partial_1 F(x_1, x_2, x_3) \;=\; -f(x_3, x_1), \quad \partial_2 F(x_1, x_2, x_3) \;=\; f(x_3, x_2).$$

Aus dem letzten Satz:

$$\partial_3 F(x_1, x_2, x_3) \;=\; \int_{x_1}^{x_2} \partial_x f(x_3, t)\,\mathrm{d}t.$$

Nun gilt $J(x) = F\big(u(x), o(x), x\big)$. Mit Kettenregel:

$$J'(x) \;=\; (\partial_1 F)\big(u(x), o(x), x\big)u'(x) + (\partial_2 F))\big(u(x), o(x), x\big)o'(x) + (\partial_3 F))\big(u(x), o(x), x\big) \cdot 1.$$

□

13.3 Uneigentliche parameterabhängige Integrale

13.11 Definition: Sei X eine Menge (Parametermenge), $f : X \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ und für jedes $x \in X$ konvergiere

$$\int_0^\infty f(x, t)\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Dann konvergiert $(*)$ **gleichmäßig bezüglich $\boldsymbol{x \in X}$**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists R_\varepsilon > 0 \; \forall R > R_\varepsilon \; \forall x \in X : \left| \int_0^\infty f(x, t)\,\mathrm{d}t - \int_0^R f(x, t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

13.12 Satz: Es gelte $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in C([0, \infty[\to \mathbb{R})$ und

1) $\forall R \geq 0 : f_n \to f$ gleichmäßig auf $[0, R]$ und

2) $\displaystyle\int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert gleichmäßig bezüglich $n \in \mathbb{N}$.

Dann folgen:

1) $f \in C([0, \infty[\to \mathbb{R})$,

2) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert,

3) $\displaystyle\left(\int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t.$

D.h. Limes und $\displaystyle\int_0^\infty$ sind vertauschbar.

Beweis: **1)** Satz 9.19: $f \in C([0,R] \to \mathbb{R})$ für jedes $R > 0 \;\Rightarrow\;$ 1).

2) Setze $F_n(R) := \displaystyle\int_0^R f_n(t)\,\mathsf{d}t$. Dann

$$F(R) \;:=\; \int_0^R f(t)\,\mathsf{d}t \;=\; \int_0^R \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathsf{d}t \;\overset{13.2}{=}\; \lim_{n\to\infty}\int_0^R f_n(t)\,\mathsf{d}t \;=\; \lim_{n\to\infty} F_n(R).$$

Sei (R_k) Folge in $\mathbb{R}$ mit $R_k \to \infty$. Laut Voraussetzung

$$F_n(R_k) \;\to\; \int_0^\infty f_n(t)\,\mathsf{d}t \text{ gleichmäßig bezüglich } n \in \mathbb{N}.$$

$$\overset{\text{Satz 9.16}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(t)\,\mathsf{d}t \;=\; \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} F_n(R_k) \;=\; \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} F_n(R_k) \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_0^{R_k} f(t)\,\mathsf{d}t.$$

und alle Grenzwerte existieren.

$\Rightarrow$ 3).

Die linke Seite ist unabhängig von der gewählten Folge (R_k)

$\Rightarrow$ 2) und $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,\mathsf{d}t \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_0^{R_k} f(t)\,\mathsf{d}t \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(t)\,\mathsf{d}t.$

$\Rightarrow$ 4).

□

13.13 Bemerkung: Der letzte Satz gilt entsprechend für Funktionenreihen.

13.14 Stetigkeit des Integrals über die Grenzfunktion: Sei (M,d) metrischer Raum, $D \subseteq M$, $f : D \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in H(D) \cap D$,

1) $\forall R \geq 0 : f(x,t) \to f(x_0,t)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0,R]$ und

2) Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty f(x,t)\,\mathsf{d}t$$

konvergiere gleichmäßig bezüglich $x \in D$.

Dann folgt

$$\lim_{x\to x_0}\int_0^\infty f(x,t)\,\mathsf{d}t \;=\; \int_0^\infty \lim_{x\to x_0} f(x,t)\,\mathsf{d}t \;=\; \int_0^\infty f(x_0,t)\,\mathsf{d}t.$$

D.h. $J(x) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,t)\,\mathsf{d}t$ ist stetig in x_0.

Beweis: Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to x_0$. Zeige $J(x_n) \to J(x_0)$.
Setze $f_n(t) := f(x_n,t)$.

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_n(t) \to f(x_0,t) \text{ gleichmäßig bezüglich } t \in [0,R], \\ \displaystyle\int_0^\infty f_n(t)\,\mathsf{d}t \text{ konvergiert gleichmäßig bezüglich } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} J(x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(t)\,\mathsf{d}t \;\overset{13.12}{=}\; \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathsf{d}t \;=\; \int_0^\infty f(x_0,t)\,\mathsf{d}t \;=\; J(x_0).$$

□

13.15 Satz: Sei $f \in C(\,]a,b[\,\times[0,\infty[\,\to\mathbb{R})$ für alle $(x,t)\in\,]a,b[\,\times[0,\infty[$ partiell nach x differenzierbar mit $\partial_x f \in C(\,]a,b[\,\times[0,\infty[\,\to\mathbb{R})$. Gilt außerdem

1) $\forall x \in\,]a,b[\,: J(x) := \displaystyle\int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ ist konvergent und

2) $\displaystyle\int_0^\infty \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert gleichmäßig bezüglich $x\in\,]a,b[$.

Dann ist J differenzierbar in $]a,b[$ und es gilt

$$J'(x) \;=\; \int_0^\infty \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ für } x\in\,]a,b[\,.$$

Beweis: Setze $J_R(x) := \displaystyle\int_0^R f(x,t)\,\mathrm{d}t$ für $R>0,\ x\in\,]a,b[$.

Satz 13.9 $\Rightarrow$ $J_R'(x) = \displaystyle\int_0^R \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t$ für $R>0,\ x\in\,]a,b[$.

Sei (R_k) in $\mathbb{R}$ mit $R_k\to\infty$. Nach Voraussetzung:

$$\forall x\in\,]a,b[\,: J_{R_k}(x)\to J(x) \text{ und } J_{R_k}'(x)\to \int_0^\infty \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ gleichmäßig bezüglich } x.$$

Satz 9.22 $\Rightarrow$ J ist differenzierbar und $J'(x) = \displaystyle\lim_{k\to\infty} J_{R_k}'(x) = \int_0^\infty \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t$. $\square$

14 Integration im $\mathbb{R}^n$

14.1 Treppenfunktionen

14.1 Volumen: Ein **abgeschlossenes Intervall** I im $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} I &= \prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j] = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n] \\ &= \big\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \;\big|\; \forall j\in\{1,\dots,n\}: a_j\le x_j\le b_j\big\} \end{aligned}$$

mit $-\infty < a_j \le b_j < \infty$. Das **Maß** des Intervalls ist

$$\mu_n(I) = \mu_n\Big(\prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j]\Big) := \prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j).$$

Falls $\exists j\in\{1,\dots,n\}: a_j=b_j$, so gilt $\mu_n(I)=0$ und I heißt **Nullmenge**.

14.2 Beispiele: **1)** $n=3$: $I=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$, $\mu_3(I)=6$.

2)

14.3 Bemerkungen: **1)** Setzt man $I' := \prod_{j=1}^{n-1}[a_j,b_j]$, so gelten

$$I = I'\times[a_n,b_n] \quad \text{und} \quad \mu_n(I) = \underbrace{(b_n-a_n)}_{=\mu_1([a_n,b_n])}\mu_{n-1}(I').$$

2) Für $X\subseteq\mathbb{R}^n$ ist

$$\chi_X:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}: x\mapsto\begin{cases}1 & \text{falls } x\in X\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

die **charakteristische Funktion** von X.
Mit I' wie vorher gilt

$$\chi_I(x',x_n) = \chi_{I'}(x')\cdot\chi_{[a_n,b_n]}(x_n) \quad \text{für } x'\in\mathbb{R}^{n-1},\ x_n\in\mathbb{R}.$$

3) I_1, I_2 Intervalle im $\mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; I_1 \cap I_2$ ist ein Intervall im $\mathbb{R}^n$ oder die leere Menge.

14.4 Treppenfunktionen: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall.

1) Eine Funktion $t : I \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion** auf I, falls

$$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists \text{ Intervalle } I_1, \ldots, I_m \subseteq I\ \exists c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R} : t = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{I_j}.$$

2) Zwei Treppenfunktionen $t_1, t_2 : I \to \mathbb{R}$ heißen **gleich fast überall**, falls es endlich viele Nullmengen $N_1, \ldots, N_k$ gibt, so dass $t_1(x) = t_2(x)$ für $x \in I \setminus \bigcup_{j=1}^{k} N_j$. Schreibe $t_1 = t_2$ f.ü.

3) $\mathcal{T}(I) := \{t : I \to \mathbb{R} \mid t \text{ ist Treppenfunktion}\}$.

14.5 Bemerkung: $\mathcal{T}(I)$ ist ein Untervektorraum das Raumes aller Funktionen von I nach $\mathbb{R}$.

14.6 Definition: Für $t \in \mathcal{T}(I)$ mit $t = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{I_j}$ heißt

$$\int_I t(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \int_I t \;:=\; \sum_{j=1}^{m} c_j\, \mu_n(I_j)$$

das **Integral** von t über I.

14.7 Satz: $t_1 = t_2$ fast überall $\;\Rightarrow\; \int_I t_1 = \int_I t_2.$

Ohne Beweis

14.8 Eigenschaften: Für $t, t_1, t_2 \in \mathcal{T}(I)$ und $c \in \mathbb{R}$ gelten

1) $t_1 + t_2 \in \mathcal{T}(I)$ und $\int_I (t_1 + t_2) = \int_I t_1 + \int_I t_2$,

2) $c \cdot t \in \mathcal{T}(I)$ und $\int_I (c \cdot t) = c \int_I t$,

3) $\forall x \in I : t_1(x) \le t_2(x) \;\Rightarrow\; \int_I t_1 \le \int_I t_2$ (Monotonie),

4) $\left| \int_I t \right| \le \|t\|_\infty \cdot \mu(I)$,

5) $|t| \in \mathcal{T}(I)$ und $\left| \int_I t \right| \le \int_I |t|$,

6) $t_1 \cdot t_2 \in \mathcal{T}(I)$.

14.2 Das Regelintegral

14.9 Definition und Satz: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit $\mu_n(I) > 0$.

1) $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, falls

$$\exists (t_k) \text{ in } \mathcal{T}(I) : \; t_k \to f \text{ gleichmäßig auf } I$$
$$\text{bzw. } \|f - t_k\|_\infty = \sup_{x \in I} \big|f(x) - t_k(x)\big| \to 0.$$

2) $\mathcal{R}(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Regelfunktion}\}$.

3) Für $f \in \mathcal{R}(I)$, (t_k) in $\mathcal{T}(I)$, $t_k \to f$ gleichmäßig auf I, existiert

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \int_I f \;:=\; \lim_{k\to\infty} \int_I t_k$$

und ist unabhängig von der Folge (t_k).
$\displaystyle\int_I f$ heißt **(Regel-)integral** von f über I.

Beweis: 1) $\displaystyle\left|\int_I t_k - \int_I t_l\right| = \left|\int_I (t_k - t_l)\right| \le \|t_k - t_l\|_\infty \cdot \mu_n(I) < \varepsilon$
für $k, l > K_\varepsilon$, da $\|t_k - f\|_\infty \to 0$
$\Rightarrow \displaystyle\left(\int_I t_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge, also konvergent in $\mathbb{R}$.

2) Sind $(t_k), (\tilde{t}_k$ zwei solche Folgen, dann gilt $\displaystyle\left|\int_I t_k - \int_I \tilde{t}_k\right| \le \|t_k - \tilde{t}_k\|_\infty \cdot \mu_n(I) \to 0$.
$\Rightarrow \displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_I t_k = \lim_{k\to\infty} \int_I \tilde{t}_k$. □

14.10 Satz: 1) $f \in \mathcal{R}(I) \;\Rightarrow\; f$ ist beschränkt auf I.

2) $f \in C(I \to \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; f \in \mathcal{R}(I)$.

3) Die Eigenschaften aus 14.8 übertragen sich durch Grenzwertbildung direkt auf das Regelintegral.

Beweis: 1) $\varepsilon := 1 \;\Rightarrow\; \exists K \in \mathbb{N} : \|t_K - f\|_\infty < 1$.
$\displaystyle t_k = \sum_{j=1}^m c_j\, \chi_{I_j} \;\Rightarrow\; \|t_K\|_\infty \le \sum_{j=1}^m |c_j| < \infty$.
$\Rightarrow \|f\|_\infty = \|f - t_K + t_K\|_\infty < \|f - t_K.\|_\infty + \|t_k\|_\infty < 1 + \|t_k\|_\infty < \infty$.

2) Beweis im Fall $n = 2$: Sei $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Kontstruiere t_k mit $\|t_k - f\|_\infty < \frac{1}{k}$.

I ist kompakt, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig. Wähle $\delta > 0$, so dass

$$\forall x, x' \in I : |x - x'| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(x')\big| < \frac{1}{k}.$$

Sei $I = [a, b] \times [[c, d]$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{N}, \frac{d-c}{N} < \frac{\delta}{2}$. Setze

$$\begin{aligned}
J_{rs}^{(1)} &:= [a + r\frac{b-a}{N}, a + (r+1)\frac{b-a}{N}] \times [c + s\frac{d-c}{N}, c + (s+1)\frac{d-c}{N}] \\
J_{rs}^{(2)} &:= [a + r\frac{b-a}{N}, a + (r+1)\frac{b-a}{N}] \times [c + (s+1)\frac{d-c}{N}, c + (s+1)\frac{d-c}{N}] \\
J_{rs}^{(3)} &:= [a + (r+1)\frac{b-a}{N}, a + (r+1)\frac{b-a}{N}] \times [c + s\frac{d-c}{N}, c + (s+1)\frac{d-c}{N}]
\end{aligned}$$

für $0 \le r, s \le N - 1$. Seien $x_{rs} \in J_{rs}^{(1)}$ Dann ist

$$t_k := \sum_{r,s=0}^{N-1} f(x_{rs})\chi_{J_{rs}^{(1)}} - \sum_{r,s=0}^{N-2} f(x_{rs})\chi_{J_{rs}^{(2)}} - \sum_{r,s=0}^{N-2} f(x_{rs})\chi_{J_{rs}^{(3)}}$$

die gewünschte Treppenfunktion.

3) Siehe Beweis von Satz 10.20. □

14.3 Iterierte Integrale

14.11 Satz: Sei $I = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$ Intervall mit $\mu(I) \neq 0$, $f \in \mathcal{R}(I)$.

Für jedes $c \in [a_n, b_n]$ sei $\tilde{f}_c(x') := f(x', c)$ für $x' \in I' = \prod_{j=1}^{n-1} [a_j, b_j]$. Dann gelten:

1) $\forall c \in [a_n, b_n] : \tilde{f}_c \in \mathcal{R}(I')$,

2) $x_n \mapsto \int_{I'} f(x', x_n)\, \mathsf{d}x' \in \mathcal{R}([a_n, b_n])$,

3) $\int_I f \; = \; \int_{x_n=a_n}^{b_n} \left(\int_{I'} f(x', x_n)\, \mathsf{d}x' \right) \mathsf{d}x.$

Beweis: 1) Sei zunächst $f = t \in \mathcal{T}(I)$, $t = \sum_{l=1}^{m} c_l\, \chi_{I_l}$, $I_l = \prod_{j=1}^{n} [a_j^{(l)}, b_j^{(l)}]$.

Mit $I'_l := \prod_{j=1}^{n-1} [a_j^{(l)}, b_j^{(l)}]$ folgt $t(.,x_n) = \sum_{l=1}^{m} c_l\, \chi_{[a_n^{(l)}, b_n^{(l)}]}(x_n) \chi_{I'_l} \in \mathcal{T}(I')$ und

$$\begin{aligned}
\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{I'} t(x', x_n) \,\mathsf{d}x' \right) \mathsf{d}x &= \int_{a_n}^{b_n} \sum_{l=1}^{m} c_l \chi_{[a_n^{(l)}, b_n^{(l)}]}(x_n) \mu_{n-1}(I'_l) \,\mathsf{d}x_n \\
&= \sum_{l=1}^{m} c_l \underbrace{\mu_1\big([a_n^{(l)}, b_n^{(l)}]\big) \mu_{n-1}(I'_l)}_{=\mu_n(I_l)} \\
&= \int_I t.
\end{aligned}$$

2) Sei (t_k) Folge in $\mathcal{T}(I)$, $t_k \to f$ gleichmäßig auf I. Dann

a) $\big|\tilde{f}_c(x') - \underbrace{t_k(x', c)}_{\in \mathcal{T}(I')}\big| = \big|f(x', c) - t_k(x', c)\big| \le \|f - t_k\|_\infty < \varepsilon$ für $k > K_\varepsilon$

$\Rightarrow\ \tilde{f}_c \in \mathcal{R}(I')$.

b) $$\begin{aligned}\Big| \int_{I'} f(x', x_n) \,\mathsf{d}x' - \underbrace{\int_{I'} t_k(x', x_n) \,\mathsf{d}x'}_{\in \mathcal{T}([a_n, b_n])} \Big| &\le \int_{I'} \big|f(x', x_n) - t_k(x', x_n)\big| \,\mathsf{d}x' \\ &\le \mu_{n-1}(I') \|f - t_k\|_\infty < \varepsilon \text{ für } k > K_\varepsilon\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \int_{I'} f(x', .) \,\mathsf{d}x' \in \mathcal{R}([a_n, b_n])$.

c) $$\begin{aligned}\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{I'} f(x', x_n) \,\mathsf{d}x' \right) \mathsf{d}x_n &\overset{\mathsf{Def}\int}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{I'} t_k(x', x_n) \,\mathsf{d}x' \right) \mathsf{d}x_n \\ &\overset{1)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_I t_k \overset{\mathsf{Def}\int}{=} \int_I f.\end{aligned}$$

□

14.12 Beispiel: $f(x,y) = x\mathrm{e}^{x+y}$, $I = [0,1] \times [0,2]$:
$f \in C(I \to \mathbb{R}) \ \Rightarrow\ f \in \mathcal{R}(I)$.

$$\int_I f \ = \ \int_{y=0}^{2} \left(\int_{x=0}^{1} x\mathrm{e}^{x+y} \,\mathsf{d}x \right) \mathsf{d}y \ = \ \mathrm{e}^2 - 1.$$

14.13 Folgerung: Für $f \in \mathcal{R}([a,b] \times [c,d])$ (also insbesondere für $f \in C([a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R})$) gilt

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f \ = \ \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \,\mathsf{d}x \right) \mathsf{d}y \ = \ \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \,\mathsf{d}y \right) \mathsf{d}x.$$

D.h. die Reihenfolge der Intgrationen ist vertauschbar.

14.4 Das Maß von Mengen

14.14 Definition: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt.

1) Das kleinste Intervall, das X enthält, wird mit $I(X)$ bezeichnet:

$$I(X) := \bigcap_{\{I \subseteq \mathbb{R}^n : I \text{ Intervall } \wedge \ X \subseteq I\}} I.$$

$I(X)$ ist kompakt (beschränkt: klar, abgeschlossen als Schnitt abgeschlossener Mengen).

2) Eine endliche Menge $P = \{I_1, \ldots, I_m\}$ von Intervallen heißt **Partition** von $I(X)$, falls

(i) $\forall j, k = 1, \ldots, m : j \neq k \ \Rightarrow \ \mu_n(I_j \cap I_k) = 0$,
d.h. die Intervalle haben höchstens auf ihrem Rand gemeinsame Punkte.

(ii) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} I_j = I(X)$.

3) Für jede Partition P von $I(X)$ sei

$$\begin{aligned} m_P(X) &:= \sum_{\{I \in P : I \subseteq X\}} \mu_n(I), \\ M_P(X) &:= \sum_{\{I \in P : I \cap X \neq \emptyset\}} \mu_n(I). \end{aligned}$$

14.15 Definition: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt.

1) $\mu_i := \sup\{m_P(X) : P$ ist Partition von $I(X)\}$ heißt **inneres Riemann-Maß** von X,
$\mu_a := \inf\{M_P(X) : P$ ist Partition von $I(X)\}$ heißt **äußeres Riemann-Maß** von X.

2) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Riemann-messbar**, falls $\mu_i(X) = \mu_a(X)$.

3) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Nullmenge**, falls X Riemann-messbar ist mit $\mu(X) = 0$.

14.16 Bemerkungen: 1) $I \subseteq \mathbb{R}^n$ Intervall $\Rightarrow$ I messbar, $\mu(I) = \mu_n(I)$,

2) Ist $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit $I(X) \subseteq I$, so gilt

$$\sup\{m_P(X) : P \text{ ist Partition von } I(X)\} = \sup\{m_P(X) : P \text{ ist Partition von } I\}.$$

14.17 Satz: 1) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge und $X' \subseteq X$ $\Rightarrow$ X' messbar und $\mu(X') = 0$.

2) $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmengen $\Rightarrow$ $X_1 \cup X_2$ sind Nullmengen.

Beweis: **1)** Sei $\varepsilon > 0$ und P Partition von $I(X)$ mit $M_P(X) < \varepsilon$

$$\Rightarrow M_P(X') = \sum_{\{I\in P: I\cap X'\neq\emptyset\}} \mu_n(I) \le \sum_{\{I\in P: I\cap X\neq\emptyset\}} \mu_n(X) = M_P(X) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu_a(X') = \inf\{M_P(X') : P \text{ Partition von } I(X)\} < \varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon>0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \mu_a(X') = 0.$$

2) Seien $\varepsilon > 0$ und P, P' Partitionen von $I(X_1 \cup X_2)$ mit $M_P(X_1), M_{P'}(X_2) < \varepsilon$.

Setze

$$P'' := \big\{I \cap I' : I \in P \ \wedge \ I' \in P'\big\}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P'' \text{ Partition von } I(X_1 \cup X_2) \\ M_{P''}(X_1) \le M_P(X_1) < \varepsilon \\ M_{P''}(X_1) \le M_{P'}(X_2) < \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad M_{P''}(X_1 \cup X_2) &= \sum_{\{I\in P'': I\cap(X_1\cup X_2)\neq\emptyset\}} \mu_n(I) \\ &\le \sum_{\{I\in P: I\cap X_1\neq\emptyset\}} \mu_n(I) + \sum_{\{I\in P: I\cap X_2\neq\emptyset\}} \mu_n(I) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

da $I \cap (X_1 \cup X_2) = (I \cap X_1) \cup (I \cap X_2)$.

$\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 : \mu_a(X_1 \cup X_2) < 2\varepsilon$. $\square$

14.18 Definition: Sei (M, d) metrischer Raum, $X \subseteq M$.

1) $\overset{\circ}{X} := \bigcup\{O \subseteq M : O \subseteq X \ \wedge \ O \text{ offen}\}$ heißt **Inneres** von X.

2) $\overline{X} := \bigcap\{A \subseteq M : X \subseteq A \ \wedge \ A \text{ abgeschlossen}\}$ heißt **Abschluss** von X.

3) $\partial X := \overline{X} - \overset{\circ}{X}$ heißt **Rand** von X.

14.19 Beispiele: $X = [a, b[\, \subseteq \mathbb{R}$: $\overline{X} = [a, b]$, $\overset{\circ}{X} = \,]a, b[\,$, $\partial X = \{a, b\}$.

$I = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$: $\overline{I} = I$, $\overset{\circ}{I} = \,]a, b[\, \times \,]c, d[\,$, $\partial I = [a, b] \times \{c, d\} \cup \{a, b\} \times [c, d]$.

14.20 Satz: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann ist X genau dann Riemann-messbar, wenn ∂X messbar und $\mu(\partial X) = 0$.

Beweis: $\Rightarrow$: Zeige: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ Partition P von $I(X) : M_P(\partial X) < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wähle Partition P von $I(X)$ mit $M_P(X) - m_P(X) < \varepsilon$. Unterteile ∂X in zwei Mengen:

$$M_1 := \big\{x \in \partial X : x \notin \bigcup_{\{I\in P: I\subseteq X\}} I\big\}, \quad M_2 := \partial X \setminus M_1.$$

M_2 ist Teilmenge der endlichen Vereinigung aller Ränder der $I \in P \stackrel{\text{Satz 14.17}}{\Rightarrow} \mu(M_2) = 0$.
Wegen

$$M_P(M_1) = M_P(X) - m_P(X) < \varepsilon$$

folgt $\mu(\partial X) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$: Zeige: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ Partition P von $I(X) : M_P(X) - m_P(X) < \varepsilon$.
Sei $\varepsilon > 0$ fest. $\mu(\partial X) = 0 \;\Rightarrow\; \exists$ Partition P von $I(X)$ mit $M_P(\partial X) < \varepsilon$
Für diese Partition von $I(X)$ gilt

$$\begin{aligned} M_P(X) - m_P(X) &= \sum_{\{I \in P : I \cap X \neq \emptyset\}} \mu_n(I) - \sum_{\{I \in P : I \subseteq X\}} \mu_n(I) \\ &\leq \sum_{\{I \in P : I \cap \partial X \neq \emptyset\}} \mu_n(I) \\ &= M_P(\partial X) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

14.5 Volumenberechnung

14.21 Satz: Sei $I' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ Intervall, $f \in \mathcal{R}(I')$, $f(x) \geq 0$ auf I'. Dann ist

$$X \;:=\; \big\{(x', y) \in \mathbb{R}^n : x' \in I' \;\wedge\; 0 \leq y \leq f(x')\big\}$$

Riemann-messbar mit

$$\mu(X) \;=\; \int_{I'} f(x')\,\mathrm{d}x'.$$

Beweis: Es gilt $I(X) = I' \times [0, b]$ mit geeignetem $b \geq 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest, $t \in \mathcal{T}(I')$ mit $\|t - f\|_\infty < \varepsilon$.
Wähle eine Partition $P' = \{I'_1, \ldots, I'_m\}$ von I', so dass $t = \sum_{j=1} c_j \, \chi_{I'_j}$, setze

$$d_j := \max\{c_j - \varepsilon, 0\}, \quad D_j := \min\{c_j + \varepsilon, b\}.$$

Dann ist

$$P \;:=\; \{I'_j \times [0, d_j], I'_j \times [d_j, D_j], I'_j \times [D_j, b] : j = 1, \ldots, m\}$$

eine Partition von $I(X)$ mit

$$\begin{aligned} m_P(X) &= \sum_{j=1}^{m} d_j \mu_{n-1}(I'_j) \;\geq\; \int_{I'} (t - \varepsilon) \;\geq\; \int_{I'} (f - 2\varepsilon) \;=\; \int_{I'} f - 2\varepsilon \mu_{n-1}(I'), \\ M_P(X) &= \sum_{j=1}^{m} D_j \mu_{n-1}(I'_j) \;\leq\; \int_{I'} (t + \varepsilon) \;\leq\; \int_{I'} (f + 2\varepsilon) \;=\; \int_{I'} f + 2\varepsilon \mu_{n-1}(I'). \end{aligned}$$

$\Rightarrow\;$ X messbar, $\mu(X) = \int_{I'} f$.

□

14.22 Definition: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Riemann-messbar. Dann heißt $f : X \mapsto \mathbb{R}$ **Regel-integrierbar** auf X, falls für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Partition $P = \{I_1, \ldots, I_m\}$ von $I(X)$ und Konstanten $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$M_P(X) \leq \mu(X) + \varepsilon \ \wedge \ m_P(X) \geq \mu(X) - \varepsilon$$

und für die Treppenfunktion $t_k := \sum_{j=1}^{m} c_j \, \chi_{I_j}$ gilt:

$$\sup_{x \in X} \big| f(x) - t_k(x) \big| < \frac{1}{k}.$$

Der Grenzwert

$$\int_X f \ := \ \lim_{k \to \infty} \int_X t_k \quad \text{mit} \ \int_X t_k \ := \sum_{\{j : I_j \cap X \neq 0\}} c_j \mu_n(I_j)$$

existiert, ist unabhängig von der Folge (t_n) und heißt **Integral** von f über X.

14.23 Satz: Die Integraleigenschaften aus Satz 14.8 gelten entsprechend. Außerdem ist jede Funktion $f \in C(\overline{X} \to \mathbb{R})$ auf X regelintegrierbar.

14.24 Satz: Sei $X' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ Riemann-messbar, $u, o : X' \to \mathbb{R}$ regelintegrierbar mit $u(x') \leq o(x')$ auf X'. Dann ist

$$X \ := \ \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in X' \ \wedge \ u(x') \leq x_n \leq o(x')\}$$

Riemann-messbar mit

$$\mu(X) \ = \ \int_{X'} (o - u).$$

Ist zusätzlich $f : X \to \mathbb{R}$ regelintegrierbar, so gilt

$$\int_X f \ = \ \int_{X'} \left(\int_{u(x')}^{o(x')} f(x', x_n) \, \mathsf{d}x_n \right) \mathsf{d}x'.$$

Beweis: Es gilt $I(X) = I(X') \times [a, b]$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ fest.

Wähle eine Partition $P' = \{I'_1, \ldots, I'_m\}$ von $I(X')$ mit

$$M_P(X) \leq \mu(X) + \varepsilon \ \wedge \ m_P(X) \geq \mu(X) - \varepsilon,$$

so dass Konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ und $\delta_1, \ldots, \delta_m$ existieren, so dass

$$\sup_{x \in X} \Big| u(x) - \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \, \chi_{I_j} \Big| < \varepsilon \ \wedge \ \sup_{x \in X} \Big| o(x) - \sum_{j=1}^{m} \delta_j \, \chi_{I_j} \Big| < \varepsilon.$$

Setze

$c_j := \max\{\gamma_j - \varepsilon, a\}, \ \ C_j := \min\{\gamma_j + \varepsilon, \delta_j - \varepsilon\}, \ \ d_j := \max\{\gamma_j + \varepsilon, \delta_j - \varepsilon\}, \ \ D_j := \min\{\delta_j + \varepsilon, b\}$

und

$$P \ := \ \big\{I'_j \times [a, c_j], I'_j \times [c_j, C_j], I'_j \times [C_j, d_j], I'_j \times [d_j, D_j], I'_j \times [D_j, b] : j = 1, \ldots, m\big\}.$$

Dann ist P Partition von $I(X)$ und

$$\begin{aligned} m_P(X) \ &\geq \ \int_{I'} (o - u - 4\varepsilon) - 2\max\{\|u\|_\infty + \varepsilon, \|o\|_\infty + \varepsilon\}\big(M_P(X') - m_P(X')\big), \\ M_P(X) \ &\leq \ \int_{I'} (o - u + 4\varepsilon). \end{aligned}$$

$\square$

14.25 Beispiel: Gegeben ist der Zylinder $\{x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ und der Keil $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 \geq 0 \ \wedge \ 0 \leq x_3 \leq x_2\}$. Gesucht ist das Volumen des Schnittkörpers.

$$X' := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq x_2 \leq \sqrt{1 - x_1^2}\}$$

ist Riemann-messbar nach Satz 14.24.

$$K \cap Z = \{(x', x_3) : x' \in X' \ \wedge \ 0 \leq x_3 \leq x_2\}$$

ist Riemann-messbar nach Satz 14.24.

$$\begin{aligned} \mu(K \cap Z) \ &\overset{14.24}{=} \ \int_{X'} (x_2 - 0) \, \mathsf{d}x' \\ &\overset{14.24}{=} \ \int_{[-1,1]} \left(\int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} x_2 \, \mathsf{d}x_2 \right) \mathsf{d}x_1 \\ &= \ \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Inhaltsverzeichnis