PD. Dr. P.H. Lesky

Universität Stuttgart

Sommersemester 2015

Analysis II

Warnung: Dies ist kein vollständiger Vorlesungsaufschrieb. Dieses Skript ist zur Erleichterung beim Mitschreiben gedacht, Ergänzungen sollen nachgetragen werden.

10 Integration

10.1 Treppen- und Regelfunktionen, Integral

Gegeben: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Gesucht: Fläche zwischen Graph von f und der x-Achse.

Einfachster Fall: f ist stückweise konstant.

10.1 Definition: **1)** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion** auf $[a,b]$, falls es eine **Zerlegung** $Z = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n : a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = b\}$ von $[a,b]$ gibt, so dass

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} : f\Big|_{]\xi_{k-1},\xi_k[} = \text{konstant.}$$

$\mathcal{T}([a,b]) :=$ Menge der Treppenfunktionen auf $[a,b]$.

2) Zwei Treppenfunktionen f, g heißen **gleich fast überall** ($f = g$ f.ü.), falls $\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ leer oder endlich ist.

3) Für $I \subseteq \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$ heißt

$$\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in I, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakteristische Funktion von I (χ sprich „chi“).

10.2 Satz: Die Relation $f \sim g :\Leftrightarrow f = g$ f.ü. ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

10.3 Beispiel: $[a,b] = [0,3]$:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 3, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 4, & 1 < x \le 2 \\ -2, & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f \;=\; 3 \cdot \chi_{]0,1[} + 4 \cdot \chi_{]1,2[} - 2 \cdot \chi_{]2,3[} \text{ f.ü.} \;=\; 3 \cdot \chi_{]0,3[} + 6 \cdot \chi_{]1,2[} - 2 \cdot \chi_{]1,3[} \text{ f.ü.}$$

10.4 Satz: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Treppenfunktion

$\Leftrightarrow\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\ \exists$offene Intervalle $I_1, \ldots, I_m \subseteq [a,b] : f = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\, \chi_{I_k}$ f.ü.

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $Z = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ Zerlegung mit $\forall k \in \{1, \ldots, n\} : f\big|_{]\xi_{k-1},\xi_k[} =$ konst. $=: c_k$.

$\Rightarrow\ f = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\, \chi_{]\xi_{k-1},\chi_k[}$ f.ü.

"$\Leftarrow$": Sei $f = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\, \chi_{]a_k,b_k[}$ f.ü. und $Z = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so dass $\{a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m\} \subseteq Z$. Für $1 \le k \le m$ und $1 \le j \le n$ folgt

$$\begin{array}{rlll} \text{entweder} &]a_k, b_k[\, \cap\,]\xi_{j-1}, \xi_j[\; = \emptyset & \text{falls } \xi_{j-1} \ge b_k \;\vee\; \xi_j \le a_k & \\ \text{oder} &]\xi_{j-1}, \xi_j[\; \subseteq\;]a_k, b_k[& \text{falls } \underbrace{\xi_{j-1} < b_k}_{\Rightarrow\ \xi_j \le b_k} \;\wedge\; \underbrace{\xi_j > a_k}_{\Rightarrow\ \xi_{j-1} \ge a_k} & . \end{array}$$

$\Rightarrow\ \chi_{]a_k,b_k[} =$ konstant auf $]\xi_{j-1}, \xi_j[$

$\Rightarrow\ f =$ konstant auf $]\xi_{j-1}, \xi_j[$ für $j = 1, \ldots, n$. $\square$

10.5 Definition: Ist f Treppenfunktion auf $[a,b]$ und $f = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\, \chi_{]a_k,b_k[}$ f.ü., so heißt

$$\int_a^b f \;:=\; \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \;:=\; \sum_{k=1}^{m} c_k (b_k - a_k)$$

das (bestimmte) **Integral** von f.

10.6 Satz: Für $f, g \in \mathcal{T}([a,b])$ gilt: $f = g$ f.ü. $\Rightarrow\ \int_a^b f = \int_a^b g$. Insbesondere ist $\int_a^b f$ wohldefiniert.

Beweis: $f = \sum_{k=1}^{m} c_k \, \chi_{]a_k,b_k[}$, $g = \sum_{k=1}^{m'} c'_k \, \chi_{]a'_k,b'_k[}$. Wähle eine Zerlegung $Z = \{\xi_0, \dots, \xi_n\}$ von $[a,b]$, so dass $\{a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\} \cup \{a'_1, b'_1, \dots, a'_{m'}, b'_{m'}\} \subseteq Z$. Dann folgt für $x \in \,]\xi_{j-1}, \xi_j[\,$:

$$f(x) = \text{konstant} = f\left(\frac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right) = g(x) = g\left(\frac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right).$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} f\left(\tfrac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right)(\xi_j - \xi_{j-1}) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_k \xi_{]a_k.b_k[}\left(\tfrac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right)(\xi_j - \xi_{j-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\xi_{]a_k.b_k[}\left(\tfrac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right)}_{=1 \text{ falls } a_k \le \xi_{j-1} < \xi_j \le b_k, \; =0 \text{ sonst}} (\xi_j - \xi_{j-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k \underbrace{\sum_{j=\min\{i:\xi_i \ge a_k\}}^{\max\{i:\xi_j \le b_k\}} (\xi_j - \xi_{j-1})}_{=b_k - a_k \text{ (Teleskopsumme)}} \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k (b_k - a_k) \\
&= \int_a^b f.
\end{aligned}$$

Genauso folgt $\sum_{j=1}^{n} \underbrace{g\left(\tfrac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right)}_{=f\left(\frac{\xi_{j-1}+\xi_j}{2}\right)}(\xi_j - \xi_{j-1}) = \int_a^b g.$

$\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$ $\square$

10.7 Definition: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, falls es eine Folge (t_n) in $\mathcal{T}([a,b])$ gibt, so dass $t_n \to f$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[a,b]$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon \; \forall x \in [a,b] : \big|f(x) - t_n(x)\big| < \varepsilon.$$

Die Menge der Regelfunktionen auf $[a,b]$ wird mit $\mathcal{R}([a,b])$ bezeichnet.

10.8 Satz und Definition: Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und (t_n) in $\mathcal{T}([a,b])$ mit $t_n \to f$ gleichmäßig. Dann existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f \; := \; \int_a^b f(x)\,\mathsf{d}x \; := \; \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n$$

und ist unabhängig von der gewählten Folge (t_n).

$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}x$ heißt das (bestimmte) **Regel-** oder **Cauchy-Integral** von f, f heißt auch (Regel-) **integrierbar**.

Beweis: Sei $I_n := \int_a^b t_n$.

Schritt 1: Beweise, dass (I_n) eine Cauchy-Folge ist. Dann konvergiert (I_n) in $\mathbb{R}$.
Sei $\varepsilon > 0$ fest.

$$\Rightarrow \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n > N_\varepsilon \ \forall x \in [a,b] : \big|f(x) - t_n(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Für $m, n > N_\varepsilon$ folgt

$$\big|t_n(x) - t_m(x)\big| \ \leq \ \big|t_n(x) - f(x)\big| + \big|f(x) - t_m(x)\big| \ < \ \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{für } x \in [a,b].$$

Wähle eine Zerlegung $Z = \{\xi_0, \ldots, \xi_K\}$ von $[a,b]$, so dass

$$t_n = \sum_{k=1}^{K} c_k \, \chi_{[\xi_{k-1},\xi_k]} \text{ f.ü.} \quad \text{und} \quad t_m = \sum_{k=1}^{K} d_k \, \chi_{[\xi_{k-1},\xi_k]} \text{ f.ü.}$$

$$\Rightarrow \ |c_k - d_k| \ < \ \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \ |I_n - I_m| \ \leq \ \sum_{k=1}^{K} |c_k - d_k|(\xi_k - \xi_{k-1}) \ < \ \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{K} (\xi_k - \xi_{k-1}) \ = \ \varepsilon.$$

$\Rightarrow \ (I_n)$ ist konvergent, $I_n \to I$.

Schritt 2: Der Grenzwert I ist unabhängig von der Folge (t_n):
Sei $(\widetilde{t}_n)$ eine weitere Folge in $\mathcal{T}([a,b])$ mit $\widetilde{t}_n \to f$ gleichmäßig und $\widetilde{I}_n := \int_a^b \widetilde{t}_n(x) \, \mathrm{d}x$.
$\Rightarrow$ Die Folge $t_1, \widetilde{t}_1, t_2, \widetilde{t}_2, \ldots$ konvergiert gleichmäßig gegen f.
$\Rightarrow$ Die Folge $I_1, \widetilde{I}_1, I_2, \widetilde{I}_2, \ldots$ konvergiert in $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \widetilde{I}_n$. $\square$

10.2 Eigenschaften von Regelfunktionen

10.9 Satz: $V := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ mit

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x),$$
$$cf : x \mapsto c \cdot f(x) \text{ für } c \in \mathbb{R}$$

ist ein (unendlichdimensionaler) $\mathbb{R}$-Vektorraum.

10.10 Satz: 1) $\mathcal{T}([a,b])$ ist Untervektorraum von V.

2) $f, g \in \mathcal{T}([a,b]) \ \Rightarrow \ |f|, f \cdot g \in \mathcal{T}([a,b])$.

Beweis: 1) Untervektorraumkriterium:

- $\mathcal{T}([a,b]) \neq \emptyset$, da $t(x) = 0 \;\Rightarrow\; t \in \mathcal{T}([a,b])$.
- $t, s \in \mathcal{T}([a,b]) \;\Rightarrow\; t = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k},\; s = \sum_{k=1}^{n'} c'_k \chi_{I'_k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t + s \in \mathcal{T}([a,b]) \\ c \cdot t \in \mathcal{T}([a,b]) \end{cases}$$

2) $t \cdot s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n'} c_k c'_k \underbrace{\chi_{I_k} \chi_{I'_k}}_{=\chi_{I_k \cap I'_k} \text{ oder } =\emptyset} \in \mathcal{T}([a,b])$.

Zu t sei Z Zerlegung von $[a,b]$, so dass $t\big|_{]\xi_{j-1},\xi_j[} =$ konstant.
$\Rightarrow\; |t|\,\big|_{]\xi_{j-1},\xi_j[} =$ konstant $\;\Rightarrow\; |t| \in \mathcal{T}([a,b])$. □

10.11 Satz: $f \in \mathcal{R}([a,b]) \;\Rightarrow\; f$ beschränkt.

Beweis: Sei $t_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Wähle $\varepsilon := 1$.
$\underset{\text{gleichm. Konv}}{\overset{\text{Def}}{\Rightarrow}}$ $\exists N \in \mathbb{N}\; \forall x \in [a,b] : \big|t_N(x) - f(x)\big| < 1$
t_N nimmt nur endlich viele Werte an $\;\Rightarrow\; \max_{[a,b]} \big\{\big|t_N(x)\big|\big\}$ existiert
$\Rightarrow\; \forall x \in [a,b] : \big|f(x)\big| \leq \big|f(x) - t_N(x)\big| + \big|t_N(x)\big|$
$\Rightarrow\; \sup_{[a,b]} \big|f(x)\big| \leq 1 + \max_{[a,b]} \big|t_N(x)\big| < \infty$. □

10.12 Satz: 1) $\mathcal{R}([a,b])$ ist Untervektorraum von V aus 10.9.

2) $f, g \in \mathcal{R}([a,b]) \;\Rightarrow\; |f|, f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$.

Beweis: 1) $\mathcal{T}([a,b]) \subseteq \mathcal{R}([a,b]) \;\Rightarrow\; \mathcal{R}([a,b]) \neq \emptyset$.
$f, g \in \mathcal{R}([a,b]) \;\Rightarrow\; \exists (t_n), (s_n)$ in $\mathcal{T}([a,b]) : t_n \to f,\; s_n \to g$ gleichmäßig auf $[a,b]$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_n + s_n \to f + g \text{ gleichmäßig auf } [a,b] & \Rightarrow\; f + g \in \mathcal{R}([a,b]) \\ c t_n \to c f \text{ gleichmäßig auf } [a,b] & \Rightarrow\; c f \in \mathcal{R}([a,b]) \end{cases}$$

denn

$$\big|(t_n + s_n)(x) - (f+g)(x)\big| \leq \underbrace{\big|t_n(x) - f(x)\big|}_{<\varepsilon/2, n > N_1} + \underbrace{\big|s_n(x) - g(x)\big|}_{<\varepsilon/2, n > N_2} < \varepsilon$$

für alle $x \in [a,b]$ und $n > \max\{N_1, N_2\}$.

2) $t_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow$ $|t_n| \to |f|$ gleichmäßig,
denn $\Big|\big|t_n(x)\big| - \big|f(x)\big|\Big| \underset{\text{nach unten}}{\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq}} \big|t_n(x) - f(x)\big|$
$\Rightarrow$ $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$
$t_n \to f,\ s_n \to g$ gleichmäßig $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\underbrace{t_n \cdot s_n}_{\text{Treppenfkt}} \to f \cdot g$ gleichmäßig $\Rightarrow$ $f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$
Zu $(*)$: $\big|t_n(x)s_n(x) - f(x)g(x)\big| \leq$

$$\leq \Big| \underbrace{\big(t_n(x) - f(x)\big)}_{|.|<\frac{\varepsilon}{3\sup|g(x)|},\ n>N_1} g(x)\Big| + \Big| \underbrace{\big(s_n(x) - g(x)\big)}_{|.|<\frac{\varepsilon}{3\sup|g(x)|},\ n>N_2} f(x)\Big|$$

$$+\Big| \underbrace{\big(t_n(x) - f(x)\big)}_{|.|<\frac{\varepsilon}{3},\ n>N_3} \underbrace{\big(s_n(x) - g(x)\big)}_{|.|<1,\ n>N_4}\Big| < \varepsilon\ \forall x \in [a,b], n > \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\} .$$

$\square$

10.13 Charakterisierung von Regelfunktionen: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Äquivalent sind

(i) $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

(ii) $\forall x_0 \in]a,b] : f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ existiert
$\wedge\ \forall x_0 \in [a,b[: f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ existiert.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei (x_n) in $[a,b]$, $x_n \to x_0,\ x_n < x_0$.
Zeige (α) $\big(f(x_n)\big)$ konvergiert
(β) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ ist unabhängig von der Folge (x_n).
Zu (α): $\big(f(x_n)\big)$ ist Cauchy-Folge, denn: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $t \in \mathcal{T}([a,b])$ mit

$$\forall x \in [a,b] : \big|t(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

t Treppenfunktion $\Rightarrow$ $\exists \xi_j : t\big|_{]\xi_j, x_0[} =$ konstant
$x_n \to x_0\ \wedge\ x_n < x_0\ \Rightarrow\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_n \in]\xi_j, x_0[$
Für $n, m > N$ gilt

$$\big|f(x_n) - f(x_m)\big| \leq \underbrace{\big|f(x_n) - t(x_n)\big|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\big|t(x_n) - t(x_m)\big|}_{=0} + \underbrace{\big|t(x_m) - f(x_m)\big|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Zu (β): Sei $(\widetilde{x}_n)$ weitere Folge mit $\widetilde{x}_n \to x_0,\ \widetilde{x}_n < x_0$.
$\Rightarrow$ $(y_n) := x_1, \widetilde{x}_1, x_2, \widetilde{x}_2, \ldots$ erfüllt $y_n \to x_0,\ y_n < x_0$
$\overset{(\alpha)}{\Rightarrow}$ $f(y_n) \to y$
$\Rightarrow$ $y = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Widerspruchsbeweis. Annahme: (ii) gilt und $f \notin \mathcal{R}([a,b])$, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall t \in \mathcal{T}([a,b])\ \exists x \in [a,b] : \big|t(x) - f(x)\big| \geq \varepsilon.$$

Dieses ε wird festgehalten. Konstruiere Intervalle $[a_n, b_n]$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\forall t \in \mathcal{T}([a,b]) \ \exists x \in [a_n, b_n] : \big|t(x) - f(x)\big| \geq \varepsilon. \tag{$*$}$$

Setze $[a_1, b_1] := [a, b] \ \Rightarrow \ (*)$ erfüllt für $n = 1$.
Sei $[a_n, b_n]$ bereits so konstruiert, dass $(*)$ gilt.
Dann ist $(*)$ auf mindestens einem der beiden Intervalle $\big[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\big]$, $\big[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\big]$ erfüllt, denn andernfalls

$$\begin{aligned} &\exists t_1 \in \mathcal{T}([a_n, \tfrac{a_n+b_n}{2}]) \ \forall x \in \big[a_n, \tfrac{a_n+b_n}{2}\big] : \big|t_1(x) - f(x)\big| < \varepsilon \\ &\exists t_2 \in \mathcal{T}([\tfrac{a_n+b_n}{2}, b_n]) \ \forall x \in \big[\tfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\big] : \big|t_1(x) - f(x)\big| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dann sei $t(x) := \begin{cases} t_1(x) & a_n \leq x \leq \frac{a_n+b_n}{2} \\ t_2(x) & \frac{a_n+b_n}{2} < x \leq b_n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lightning (*)$ in $[a_n, b_n]$.

Wähle als $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ eines dieser Teilintervalle, so dass $(*)$ in $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ erfüllt ist. Damit gilt $(*)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus der Konstruktion folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: \xi \in [a, b]$.
Fall $\xi \in \,]a, b[$:
(ii) $\ \Leftrightarrow \ f(\xi - 0), f(\xi + 0)$ existieren

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \delta_1 > 0 \ \forall x \in \ \xi - \delta_1, \xi[\, : \big|f(x) - f(\xi - 0)\big| < \varepsilon \\ \exists \delta_2 > 0 \ \forall x \in \ \xi, \xi + \delta_2[\, : \big|f(x) - f(\xi + 0)\big| < \varepsilon \end{array} \right.$$

Sei $\delta := \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2\}$ und $t(x) := \begin{cases} f(\xi - 0), & \xi - \delta \leq x < \xi \\ f(\xi), & x = \xi \\ f(\xi + 0), & \xi < x \leq \xi + \delta \end{cases}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t \in \mathcal{T}([\xi - \delta, \xi + \delta]) \\ \forall x \in [\xi - \delta, \xi + \delta] : \big|t(x) - f(x)\big| < \varepsilon \end{array} \right.$$

Für genügend großes n: $[a_n, b_n] \subseteq [\xi - \delta, \xi + \delta]$
$\Rightarrow \ t\big|_{[a_n . b_n]}$ widerspricht $(*)$.

Fall $\xi = a \ \vee \ \xi = b$: Betrachte entsprechend ein Intervall $[a, a + \delta]$ bzw. $[b - \delta, b]$. $\square$

10.14 Folgerung: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gelten:

1) f stetig $\ \Rightarrow \ f \in \mathcal{R}([a, b])$,

2) f monoton $\ \Rightarrow \ f \in \mathcal{R}([a, b])$,

3) f stückweise stetig oder monoton $\ \Rightarrow \ f \in \mathcal{R}([a, b])$ (siehe Übungen).

10.15 Definition: Sei V ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ heißt **Norm** auf V, wenn für $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\alpha \in \mathbb{C}$ gelten:

Positivität: $\|x\| \geq 0$,

Definitheit: $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ (= Nullelement des Vektorraums),

Homogenität: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(V, \|.\|)$ heißt **normierter Vektorraum**. Standardbeispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^3 + x_3^2}$.

10.16 Dreiecksungleichung nach unten: Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Für $x, y \in V$ gilt:

$$\|x - y\| \;\geq\; \big|\|x\| - \|y\|\big| \quad \text{(und auch } \|x + y\| \;\geq\; \big|\|x\| - \|y\|\big|\text{)}.$$

Beweis:
$$\|x\| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \|x - y\| + \|y\| \;\Rightarrow\; \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|,$$
$$\|y\| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \|y - x\| + \|x\| \;\Rightarrow\; \|x - y\| \geq \|y\| - \|x\|.$$
□

10.17 Satz: Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann definiert

$$d(x, y) \;:=\; \|x - y\| \text{ für } x, y \in V$$

eine Metrik auf V. Eine Folge (x_n) in V

- konvergiert gegen $x \in V$, falls $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$,
- ist eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n, m > N_\varepsilon : \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Beweis: **(M1)** Positivität und Definitheit: $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ und

$$d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \|x - y\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x - y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y.$$

(M2) Symmetrie: $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1) \cdot (x - y)\| = \big|(-1)\big| \cdot \|x - y\| = \|x - y\|$.

(M3) $\triangle$-Ungleichung: $d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$.
□

10.18 Satz: 1) $\|.\|_\infty : \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{R} : f \mapsto \sup\limits_{[a,b]} |f(x)|$ ist eine Norm auf $\mathcal{R}([a,b])$.

2) $t_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b] \;\Leftrightarrow\; \|t_n - f\|_\infty \to 0$.

3) $\mathcal{R}([a,b])$ ist vollständig. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt **Banachraum**.

Beweis: 1) a) Positivität: $\|f\|_\infty \geq 0$ ✓,

b) Definitiheit: $\|f\|_\infty = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in [a,b] : f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$,

c) Homogenität: $\|\alpha \cdot f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$ ✓,

d) $\triangle$-Ungleichung:

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{[a,b]} \underbrace{\big|f(x)+g(x)\big|}_{\leq |f(x)|+|g(x)|} \;\leq\; \sup_{[a,b]} \big|f(x)\big| + \sup_{[a,b]} \big|g(x)\big| \;=\; \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

2) Klar.

3) Sei (f_n) Cauchy-Folge in $\mathcal{R}([a,b])$. Zeige: $\exists f \in \mathcal{R}([a,b]) : \|f_n - f\|_\infty \to 0$.
Zu jedem f_n wähle $t_n \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\|t_n - f_n\|_\infty < \dfrac{1}{n}$.
Schritt 1: (t_n) ist Cauchy-Folge in $\mathcal{R}([a,b])$:

$$\|t_n - t_m\|_\infty \;\leq\; \underbrace{\|t_n - f_n\|_\infty}_{<1/n} + \underbrace{\|f_n - f_m\|_\infty}_{<\varepsilon/3 \text{ für } n,m>N_\varepsilon} + \underbrace{\|f_m - t_m\|_\infty}_{<1/m} \;<\; \varepsilon \text{ für } n,m > \max\{N_\varepsilon, \frac{3}{\varepsilon}\}.$$

Schritt 2: Konstruktion von f:
Für jedes feste $x \in [a,b]$ ist $\big(t_n(x)\big)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, da $\big|t_n(x) - t_m(x)\big| \leq \|t_n - t_m\|_\infty$.
Setze $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in [a,b]$.
Schritt 3: Es gilt $\|t_n - f\|_\infty \to 0$:
Für $x \in [a,b]$ gilt $\big|f(x) - t_n(x)\big| = \lim\limits_{m\to\infty} \underbrace{\big|t_m(x) - t_n(x)\big|}_{<\|t_n - t_m\|_\infty < \varepsilon/2 \text{ für } n,m>N_\varepsilon} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ für $n > N_\varepsilon,\; x \in [a,b]$.
$\Rightarrow\; \|f - t_n\|_\infty = \sup_{[a,b]} \big|f(x) - t_n(x)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$
$\Rightarrow\; f \in \mathcal{R}([a,b]),\; \|f - t_n\|_\infty \to 0$.
$\Rightarrow\; \|f - f_n\|_\infty \leq \|f - t_n\|_\infty + \underbrace{\|t_n - f_n\|_\infty}_{<1/n} < \varepsilon$ für n genügend groß
$\Rightarrow\; f_n \to f$ in $\mathcal{R}([a,b])$. □

10.3 Eigenschaften des Integrals

10.19 Hilfssatz: Seien $f, g \in \mathcal{T}([a,b])$. Dann gelten

1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \;\le\; (b-a)\cdot \|f\|_\infty.$

Beweis: Sei Z Zerlegung von $[a,b]$, so dass

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{]\xi_{j-1},\xi_j[} \text{ f.ü. und } g = \sum_{j=1}^n d_j \chi_{]\xi_{j-1},\xi_j[} \text{ f.ü.}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \alpha f + \beta g &= \sum_{j=1}^n (\alpha c_j + \beta d_j)\chi_{]\xi_{j-1},\xi_j[} \text{ f.ü.} \\
\Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g) &= \sum_{j=1}^n (\alpha c_j + \beta d_j)(\xi_j - \xi_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^n \alpha c_j(\xi_j - \xi_{j-1}) + \sum_{j=1}^n \beta d_j(\xi_j - \xi_{j-1}) \;=\; \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\sum_{j=1}^n c_j(\xi_j - \xi_{j-1})\right| \;\le\; \underbrace{\max\{|c_1|,\ldots,|c_n|\}}_{\le \|f\|_\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^n |\xi_j - \xi_{j-1}|}_{=b-a \text{ (Teleskopsumme)}} \;\le\; \|f\|_\infty (b-a).$$

□

10.20 Satz: Seien $a < b$ und $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Dann gilt

1) Linearität: $\displaystyle\int_a^b (\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) Monotonie: $\forall x \in [a,b] : g(x) \ge f(x) \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_a^b g \ge \int_a^b f.$

Insbesondere:

$$\left.\begin{aligned}
f(x) \le |f(x)| \;&\Rightarrow\; \int_a^b f \le \int_a^b |f| \\
-f(x) \le |f(x)| \;&\Rightarrow\; -\int_a^b f = \int_a^b (-f) \le \int_a^b |f|
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

3) Beschränktheit: $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \;\le\; (b-a)\cdot \|f\|_\infty.$

Insbesondere ist die Abbildung $\mathcal{R}([a,b]) \ni f \mapsto \displaystyle\int_a^b f \in \mathbb{R}$ stetig:

$$\begin{aligned}
f_n \to f \text{ in } \mathcal{R}([a,b]) \;&\Leftrightarrow\; \|f_n - f\|_\infty \to 0 \\
&\Rightarrow\; \left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \;=\; \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \;\le\; (b-a)\cdot\|f_n - f\|_\infty \to 0
\end{aligned}$$

4) $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Beweis: Seien im ganzen Beweis (t_n), (s_n) Folgen in $\mathcal{T}([a,b])$ mit $t_n \to f,\ s_n \to g$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

1) $\alpha t_n + \beta s_n \to \alpha f + \beta g$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g) &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha t_n + \beta s_n) \\ &\overset{\text{letzter Satz}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \int_a^b t_n + \beta \int_a^b s_n \right) \\ &\overset{\text{lim ist linear}}{=} \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g. \end{aligned}$$

2) Zeige: $g \geq 0$ auf $[a,b]$ $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g \geq 0$.

Dann:

$$g \geq f \ \Rightarrow \int_a^b g \overset{\text{Linearität}}{=} \int_a^b \underbrace{(g-f)}_{\geq 0} + \int_a^b f \ \geq \int_a^b f.$$

Sei $g \geq 0$. Setze $\widetilde{s}_n(x) := \max\{0, s_n(x)\}$ für $x \in [a,b]$. Dann gelten:

- $\widetilde{s}_n \in \mathcal{T}([a,b])$,
- $\widetilde{s}_n(x) \geq 0$ auf $[a,b]$ $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b \widetilde{s}_n \geq 0$,
- $\widetilde{s}_n \to g$ gleichmäßig, da $\left|g(x) - \widetilde{s}_n(x)\right| \leq \left|g(x) - s_n(x)\right|$

$$\Rightarrow \int_a^b g = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \widetilde{s}_n \ \geq \ 0.$$

3) Es gilt $\|t_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$ wegen $\big|\|t_n\|_\infty - \|f\|_\infty\big| \underset{\text{nach unten}}{\overset{\triangle\text{-Ungleichung}}{\leq}} \|t_n - f\|_\infty \to 0$.

Aus letztem Satz: $\displaystyle\int_a^b t_n \leq (b-a)\|t_n\|_\infty$

$$\Rightarrow \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n \leq (b-a) \lim_{n\to\infty} \|t_n\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

4) Setze $\widetilde{t}_n(x) := t_n(x) + \underbrace{g(x) - f(x)}_{\neq 0 \text{ nur an endlich vielen Stellen}}$.

$\Rightarrow \widetilde{t}_n \in \mathcal{T}([a,b])$, $\widetilde{t}_n = t_n$ f.ü., $\displaystyle\int_a^b \widetilde{t}_n = \int_a^b t_n$, $\left|\widetilde{t}_n - g(x)\right| = \left|t_n(x) - f(x)\right| \leq \|t_n - f\|_\infty \to 0$.

$$\Rightarrow \int_a^b g = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \widetilde{t}_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n = \int_a^b f.$$

$\square$

10.21 Additivität: Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Für $a \le c < d \le b$ setze

$$\int_c^d f := \int_a^b \chi_{[c,d]} \cdot f, \quad \int_d^c f := -\int_c^d f, \quad \int_c^c f := 0.$$

Für $a \le c \le b$ gilt dann

$$\int_a^c f + \int_c^b f \;=\; \int_a^b f.$$

Gilt $a < b < c$ und $f \in \mathcal{R}([a,c])$, so folgt

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f \;\Rightarrow\; \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Beweis: Sei (t_n) in $\mathcal{T}([a,b])$ mit $t_n \to f$. Verwende $t_n = \underbrace{\chi_{[a,c]} \cdot t_n}_{\to \chi_{[a,c]} f} + \underbrace{\chi_{[c,b]} \cdot t_n}_{\to \chi_{[c,b]} f}$ f.ü.

Durch Grenzwertbildung folgt die Behauptung. □

10.22 Satz: Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $\forall x \in [a,b] : f(x) \ge 0$ und $\int_a f = 0$. Dann gilt:

$$\forall x \in [a,b] : f \text{ stetig an der Stelle } x \;\Rightarrow\; f(x) = 0.$$

Insbesondere: Ist f zusätzlich stetig, so folgt $f = 0$.

Beweis: Widerspruchsbeweis. Annahme: f stetig in $x_0 \in [a,b]$ und $f(x_0) > 0$.
Mit $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$ folgt:

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, : f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

$$\Rightarrow \; f(x) \ge g(x) \text{ mit } g(x) := \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & \text{für } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; \int_a^b f \ge \int_a^b g = 2\delta \frac{f(x_0)}{2} > 0 \; ↯.$$

□

10.23 Beispiel: $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x = \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann $f \in \mathcal{R}([0,1])$, $f(x) \ge 0$ auf $[a,b]$, $\int_a^b f = 0$, aber $f \neq 0$.

10.4 Stammfunktionen

10.24 Wichtige Idee: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann heißen die Abbildungen

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad G : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Flächeninhaltsfunktionen oder **Integralfunktionen**.

10.25 Satz: $f \in \mathcal{R}([a, b]) \;\Rightarrow\; F, G$ stetig auf $[a, b]$.

Beweis:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f \right| \\ &\overset{\text{10.20, Teil 3}}{\leq} |x - x_0|\, \|f\|_\infty \\ &< \varepsilon \quad \text{falls } |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty} \end{aligned}$$

Also ist F stetig. Die Stetigkeit von G folgt aus $G(x) = \displaystyle\int_a^b f - F(x)$. □

10.26 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (1667): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Dann ist F differenzierbar auf $]a, b[$, und es gilt $F' = f$.

Also: $\underbrace{\text{Integration}}_{\text{Flächenproblem}}$ ist Umkehrung der $\underbrace{\text{Differentiation}}_{\text{Tangentenproblem}}$.

Beweis: Sei $x_0 \in\,]a, b[\,,\ \Delta(x) := \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ für $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$. Zeige $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta(x) = f(x_0)$.
Für $x \neq x_0$ gilt

$$\begin{aligned} |\Delta(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t \right) \right| \\ &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t \right| \\ &\overset{\text{10.20, Teil 3}}{\leq} \frac{1}{|x - x_0|}\, |x - x_0| \max_{t \in [x, x_0]} |f(t) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ fest. Da f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x_0)| &< \varepsilon \qquad \text{für } |t - x_0| < \delta \\ \Rightarrow\ |\Delta(x) - f(x_0)| &\leq \varepsilon \qquad \text{für } |x - x_0| < \delta \\ \overset{\varepsilon > 0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} \Delta(x) &= f(x_0). \end{aligned}$$

□

10.27 Definition: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, falls

1) F stetig auf $[a, b]$ und

2) F differenzierbar auf $]a, b[$ mit $F' = f$ auf $]a, b[$ ist.

Falls f stetig ist, besitzt f eine Stammfunktion (Hauptsatz 10.26).

Alle Stammfunktionen zu f:

1) F Stammfunktion $\Rightarrow$ $\forall c \in \mathbb{R} : F + c$ ist Stammfunktion von f.

2) F, G Stammfunktionen $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F - G \text{ ist stetig auf } [a, b], \\ (F - G)' = f - f = 0 \text{ in }]a, b[\end{array} \right\} \overset{7.25}{\Rightarrow} F - G = \text{const.}$

10.28 Integralberechnung: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f, so gilt für $a \leq c \leq d \leq b$:

$$\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(d) - F(c) \;=:\; F(x)\Big|_{x=c}^{d} \;=:\; \Big[F(x)\Big]_{x=c}^{d}.$$

Beweis: Sei $G(x) := \displaystyle\int_a^x f \overset{\text{Hauptsatz}}{\Rightarrow} G$ ist Stammfunktion

$\Rightarrow \quad \exists \gamma \in \mathbb{R} : F = G + \gamma$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_c^d f \overset{\text{Additivität}}{=} \int_a^d f - \int_a^c f = G(d) - G(c) = F(d) - \gamma - (F(c) - \gamma) = F(d) - F(c)$

$\square$

10.29 Beispiel: Sei $f(x) := \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow F(x) \;:=\; \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 3x - \dfrac{3}{2} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

10.30 Definition: 1) Die Menge aller Stammfunktionen auf $[a, b]$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \Big\{F : [a, b] \to \mathbb{R} \;\Big|\; F \text{ ist Stammfunktion von } f\Big\}$$

heißt das **unbestimmte Integral** von f.

2) Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$, und wir schreiben kurz

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(x) + c.$$

10.5 Wie findet man Stammfunktionen?

Wichtigste Methode: Raten. Z.B.

- Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, denn $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = x^\alpha$

(für $x \in \mathbb{R}$ falls $\alpha \geq 0$ bzw. für $x \in]-\infty, 0[$ oder $x \in]0, \infty[$ falls $\alpha < 0$).

- $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,\ x \in \mathbb{R}$, denn $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \ln x + c, & \text{für } x > 0, \\ \ln(-x) + c, & \text{für } x < 0, \end{cases}$, denn für $x < 0$: $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln(-x)\big) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Kurzschreibweise: $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + c$ für $x \neq 0$.

- $\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c,\ x \in \mathbb{R}$ denn $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\cos x) = \sin x$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x + c,\ x \in \mathbb{R}$, denn $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.

10.31 Ratehilfen: **1)** Seien $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in $]a, b[$, und $u \cdot v'$ besitze eine Stammfunktion (z.B. weil v' auf $[a, b]$ stetig fortsetzbar ist). Dann besitzt $u' \cdot v$ auch eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v' \qquad \text{(\textbf{Partielle Integration})}.$$

2) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, und sei $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig auf $[\alpha, \beta]$, differenzierbar in $]\alpha, \beta[$. Besitzt f eine Stammfunktion, dann auch $\varphi' \cdot (f \circ \varphi)$, und es gilt

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t = \left[\int f(x) \, \mathrm{d}x\right]_{x=\varphi(t)} \qquad \text{(\textbf{Integration durch Substitution})}.$$

Wichtig: Diese Formel kann von links nach rechts **und** von rechts nach links benützt werden: Ist zusätzlich φ invertierbar, so gilt

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \qquad \text{(\textbf{Integration durch Substitution})}.$$

Beweis: **1)** Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\Rightarrow\ u' \cdot v = \underbrace{(u \cdot v)'}_{\text{besitzt Stammfkt. } u\cdot v} - \underbrace{u \cdot v'}_{\text{bsitzt Stammfk. nach Voraussetzung}}$$

$$\Rightarrow \int u' \cdot v \overset{\text{Linearität}}{=} \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v' = u \cdot v + c - \int u \cdot v' = u \cdot v - \int u \cdot v'.$$

2) Sei F eine Stammfunktion von f. Die Funktion $G := F \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ist stetig. Mit Kettenregel folgt die Differenzierbarkeit von G auf $]\alpha, \beta[$ und

$$\begin{aligned} G'(t) &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \text{ für } t \in]\alpha, \beta[\\ \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \mathrm{d}t &= G(t) + c = (F \circ \varphi)(t) + c = F(x)\big|_{x=\varphi(t)} + c. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung wird auf beiden Seiten $t = \varphi^{-1}(x)$ eingesetzt. $\square$

10.32 Beispiele: 1) $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x \;=\; -x\cos x+\sin x+c$

2) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x \;=\; x\cdot\ln x - x + c$ für $x>0$.

3) $\displaystyle\int 2t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t \;=\; -\cos(t^2+1)+c$. Dies hätte man auch erraten können!

4) Für $x\in\,]-1,1[$: $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x + c\Big)$ (Substitution $x=\sin t$).

10.6 Integration rationaler Funktionen

Ziel: Darstellung einer rationalen Funktion $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (P,Q Polynome) als Summe „einfacher“ Brüche, die dann integriert werden können. Zunächst werden Polynome in $\mathbb{C}$ betrachtet.

10.33 Hilfssatz: Seien P,Q teilerfremde Polynome (d.h. P,Q haben keine gemeinsame Nullstelle) mit Grad$(P)<$ Grad(Q), und λ sei n-fache Nullstelle von Q:

$$Q(z) \;=\; (z-\lambda)^n\,Q_1(z) \quad \text{mit} \quad Q_1(\lambda)\neq 0.$$

Dann gibt es ein $a_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und ein Polynom P_1, so dass

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \;=\; \frac{P(z)}{(z-\lambda)^nQ_1(z)} \;=\; \frac{a_1}{(z-\lambda)^n}+\frac{P_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}Q_1(z)};$$

a_1 und P_1 sind eindeutig, und es gilt Grad$(P_1)<$ Grad$(Q)-1$.
Fortsetzung dieses Verfahrens liefert

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \;=\; \frac{a_1}{(z-\lambda)^n}+\frac{a_2}{(z-\lambda)^{n-1}}+\ldots+\frac{a_n}{(z-\lambda)^1}+\frac{P_n(z)}{Q_1(z)}$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten $a_j\in\mathbb{C}$ und Grad$(P_n)<$ Grad$(Q)-n=$ Grad(Q_1).

Beweis: 1) Existenz:

$$\begin{aligned}
\frac{P(z)}{(z-\lambda)^nQ_1(z)} \;&=\; \frac{P(z)-P(\lambda)}{(z-\lambda)^nQ_1(z)}+\frac{P(\lambda)}{(z-\lambda)^nQ_1(z)}\\
&=\; \frac{P(z)-P(\lambda)}{(z-\lambda)^nQ_1(z)}+\frac{P(\lambda)}{(z-\lambda)^n}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{Q_1(z)}-\frac{1}{Q_1(\lambda)}}_{=\frac{Q_1(\lambda)-Q_1(z)}{Q_1(\lambda)\cdot Q_1(z)}}+\frac{1}{Q_1(\lambda)}\Bigg)\\
&=\; \frac{\frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)}}{(z-\lambda)^n}+\frac{1}{(z-\lambda)^nQ_1(z)}\Bigg(\underbrace{P(z)-P(\lambda)+\frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)}\big(Q_1(\lambda)-Q_1(z)\big)}_{=:\widetilde{P}(z)}\Bigg)
\end{aligned}$$

$\widetilde{P}$ ist Polynom, Grad$(\widetilde{P})\le\max\{$Grad(P), Grad$(Q_1)\}<$ Grad(Q), $\widetilde{P}(\lambda)=0$.
$\Rightarrow\;\widetilde{P}(z)=(z-\lambda)P_1(z)$ mit Grad$(P_1)=$ Grad$(\widetilde{P})-1<$ Grad$(Q)-1$.

2) Eindeutigkeit durch Zuhaltemethode: Sei $N := \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$ und

$$\begin{aligned}
\frac{P(z)}{(z-\lambda)^n Q_1(z)} &= \frac{a_1}{(z-\lambda)^n} + \frac{P_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}Q_1(z)} \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus N \\
\Rightarrow \frac{P(z)}{Q_1(z)} &= a_1 + (z-\lambda)\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus N \\
\Rightarrow \lim_{z\to\lambda} \frac{P(z)}{Q_1(z)} &= a_1 + \lim_{z\to\lambda}(z-\lambda)\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} \\
\Rightarrow a_1 &= \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} \text{ ist eindeutig.}
\end{aligned}$$

Da a_1 eindeutig ist, ist auch P_1 eindeutig. □

10.34 Komplexe Partialbruchzerlegung: Seien P, Q teilerfremd mit Grad$(P) <$ Grad(Q),

$$Q(z) = a_n(z-\lambda_1)^{n_1} \cdots (z-\lambda_k)^{n_k},$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschieden (d.h $n_1, \dots, n_k$ sind die Vielfachheiten der Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$). Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $a_{j,i} \in \mathbb{C}$, so dass

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{a_{1,i}}{\lambda - \lambda_i} + \frac{a_{2,i}}{(\lambda-\lambda_i)^2} + \ldots + \frac{a_{n_i,i}}{(\lambda-\lambda_i)^{n_i}} \right).$$

Beweis: Folgt direkt aus 10.33. □

10.35 Bemerkungen: **1)** Falls Grad$(P) \geq$ Grad(Q): Erst abdividieren:

$$\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{R}{Q} \qquad \text{mit Grad}(R) < \text{Grad}(Q),\ P_1 \text{ Polynom,}$$

dann 10.34 auf $\frac{R}{Q}$ anwenden.

2) Falls P und Q gemeinsame Nullstellen haben: Durch größtes gemeinsames Teilerpolynom kürzen.

10.36 Beispiel: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} \overset{\text{Theorie}}{=} \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{(x+2)^2}.$

Zuhaltemethode: Multipliziere mit $(x-1)$:

$$\frac{4x^2+9x-4}{(x+2)^2} = a + (x-1)(\ldots) \overset{x\to 1}{\Rightarrow} a = \frac{9}{3^2} = 1.$$

Zuhaltemethode: Multipliziere mit $(x+2)^2$:

$$\frac{4x^2+9x-4}{x-1} \;=\; c+(x+2)(\ldots) \overset{x\to-2}{\Rightarrow} c=\frac{-6}{-3}=2.$$

b kann nicht durch die Zuhaltemethode bestimmt werden. Einen x-Wert einsetzen:

$$\frac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} \;=\; \frac{1}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2} \overset{x=0}{\Rightarrow} \frac{-4}{-4}=-1+\frac{b}{2}+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b=3.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int f(x)\,\mathsf{d}x &= \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}\right)\mathsf{d}x\\ &= \ln|x-1|+3\ln|x+2|-\frac{2}{x+2}+c \quad \text{für } x\notin\{-2,1\}.\end{aligned}$$

10.37 Reelle Polynome: Sei Q ein reelles Polynom, d.h. die Koeffizienten von Q sind reell. Dann gelten:

- $Q(\lambda)=0 \;\Rightarrow\; Q(\overline{\lambda})=0$ (vgl. 4.37)
- $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ Nullstelle $\;\Rightarrow\; Q(z)=(z-\lambda)(z-\overline{\lambda})Q_1(z)$.
  Da $T(z)=(z-\lambda)(z-\overline{\lambda})=z^2-2(\operatorname{Re}\lambda)z+|\lambda|^2$ relles Polynom, ist auch Q_1 relles Polynom.
- $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ Nullstelle der Vielfachheit n
  $\Rightarrow\; Q(z) \;=\; (z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z) \;=\; \left(z^2-2(\operatorname{Re}\lambda)z+|\lambda|^2\right)^n Q_1(z)$, Q_1 relles Polynom.
- Sind $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ die reellen und $\lambda_{k+1},\overline{\lambda}_{k+1},\ldots,\lambda_l,\overline{\lambda}_l$ die nichtrellen Nullstellen von Q mit Vielfachheiten $n_1,\ldots,n_l$, so besitzt Q die relle Faktorisierung
  $$Q(z) \;=\; a_n\prod_{j=1}^{k}(z-\lambda_j)^{n_j}\cdot\prod_{j=k+1}^{l}\left(z^2-2(\operatorname{Re}\lambda_j)z+|\lambda_j|^2\right)^{n_j}. \qquad (*)$$

10.38 Hilfssatz: Seien P,Q teilerfremde relle Polynome, Grad$(P)<$ Grad(Q), und $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ sei n-fache Nullstelle von Q:

$$Q(z) \;=\; (z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z),\;\; Q_1(\lambda)\neq 0,\;\; Q_1 \text{ reelles Polynom.}$$

Dann gibt es $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, und ein reelles Polynom P_1, so dass

$$\frac{P(z)}{(z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z)} \;=\; \frac{\alpha z+\beta}{(z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n}+\frac{P_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}\,(z-\overline{\lambda})^{n-1}\,Q_1(z)};$$

α,β und P_1 sind eindeutig, und es gilt Grad$(P_1)<$ Grad$(Q)-2$.

Beweis: Aus (10.34):

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \;=\; \frac{a}{(z-\lambda)^n}+\frac{b}{(z-\overline{\lambda})^n}+\frac{\widetilde{P}_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}(z-\overline{\lambda})^{n-1}Q_1(z)}$$

mit $\mathsf{Grad}(\widetilde{P}_1) < \mathsf{Grad}(Q) - 2$ und

$$a = \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)},\ b = \frac{P(\overline{\lambda})}{Q_1(\overline{\lambda})} \ \Rightarrow\ b = \overline{a}.$$

Betrachte

$$\frac{a}{(z-\lambda)^n} + \frac{\overline{a}}{(z-\overline{\lambda})^n} \quad =: \quad \frac{\widetilde{P}_2(z)}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n}$$

$$\Rightarrow\ \widetilde{P}_2(z) \ = \ a(z-\overline{\lambda})^n + \overline{a}(z-\lambda)^n \ \underset{\text{Satz}}{\overset{\text{binomischer}}{=}} \ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j \big(\underbrace{a(-\overline{\lambda})^{n-j} + \overline{a}(-\lambda)^{n-j}}_{\in\mathbb{R}}\big).$$

Also ist $\widetilde{P}_2$ ein reelles Polynom, und damit auch $\widetilde{P}_1$. Außerdem $\widetilde{P}_2(\lambda) \neq 0$.

Wähle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\widetilde{P}_3(z) := \widetilde{P}_2(z) - \alpha z - \beta$ die Nullstelle $z = \lambda$ besitzt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_3(\lambda) = 0 \ &\Leftrightarrow\ \alpha\lambda + \beta = \widetilde{P}_2(\lambda) \\
&\Leftrightarrow\ \alpha \underbrace{\mathrm{Im}\,\lambda}_{\neq 0} = \mathrm{Im}\,\widetilde{P}_2(\lambda) \ \wedge\ \alpha \mathrm{Re}\,\lambda + \beta = \mathrm{Re}\,\widetilde{P}_2(\lambda) \\
&\Leftrightarrow\ \alpha = \frac{\mathrm{Im}\,\widetilde{P}_2(\lambda)}{\mathrm{Im}\,\lambda} \ \wedge\ \beta = \mathrm{Re}\,\widetilde{P}_2(\lambda) - \alpha \mathrm{Re}\,\lambda.
\end{aligned}$$

$(\widetilde{P}_2(\lambda) \neq 0 \ \Rightarrow\ (\alpha,\beta) \neq (0,0))$.
$\widetilde{P}_3$ relles Polynom $\wedge\ \widetilde{P}_3(\lambda) = 0 \ \Rightarrow\ \widetilde{P}_3(z) = (z-\lambda)(z-\overline{\lambda})\widetilde{P}_4(z)$, $\widetilde{P}_4$ relles Polynom.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \frac{a}{(z-\lambda)^n} + \frac{\overline{a}}{(z-\overline{\lambda})^n} \ &= \ \frac{\alpha z + \beta}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n} + \frac{\widetilde{P}_3(z)}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n} \\
&= \ \frac{\alpha z + \beta}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n} + \frac{\widetilde{P}_4(z)}{(z-\lambda)^{n-1}(z-\overline{\lambda})^{n-1}}. \\
\Rightarrow\ \frac{P(z)}{(z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z)} \ &= \ \frac{\alpha z + \beta}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n} + \frac{\widetilde{P}_4(z)Q_1(z) + \widetilde{P}_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}\,(z-\overline{\lambda})^{n-1}\,Q_1(z)}
\end{aligned}$$

und $\mathsf{Grad}(\widetilde{P}_4 Q_1 + \widetilde{P}_1) \leq \max\{\underbrace{\mathsf{Grad}(\widetilde{P}_4)}_{\leq n-2} + \underbrace{\mathsf{Grad}(Q_1)}_{=\mathsf{Grad}(Q)-2n}, \mathsf{Grad}(\widetilde{P}_1)\} < \mathsf{Grad}(Q) - 2.$

□

10.39 Relle Partialbruchzerlegung: Sind P, Q teilerfremde reelle Polynome, $\mathsf{Grad}(P) < \mathsf{Grad}(Q)$, und hat Q die in (10.37) stehende relle Faktorisierung $(*)$, so gibt es eindeutig bestimmte Konstanten $a_{j,i}, b_{j,i} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} \ &= \ \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{a_1, j}{x - \lambda_j} + \ldots + \frac{a_{n_j,j}}{(x-\lambda_j)^{n_j}} \right) \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{l} \left(\frac{a_{1,j}x + b_{1,j}}{x^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda_j) + |\lambda_j|^2} + \ldots + \frac{a_{n_j,j}x + b_{n_j,j}}{(x^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda_j)x + |\lambda_j|^2)^{n_j}} \right).
\end{aligned}$$

Die Konstanten können durch Zuhaltemethode, Einsetzen verschiedener x-Werte, Hauptnenner und Koeffizientenvergleich im Zähler berechnet werden.

10.40 Beispiel:
$$\frac{x^4+x^3+x}{x^3+1} = x+1-\frac{\frac{1}{3}}{x+1}-\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$
$$= x+1-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^4+x^3+x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+c$$

10.7 Mittelwertsätze

10.41 Erster Mittelwertsatz (der Integralrechnung): Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g(x) \geq 0$ auf $[a,b]$. Dann

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Fall 1: $\int_a^b g = 0.$ $\overset{g \text{ stetig}}{\underset{10.22}{\Rightarrow}}$ $g = 0 \Rightarrow \int_a^b fg = 0 \Rightarrow (*)$ gilt für alle $\xi \in [a,b]$.

Fall 2: $\int_a^b g > 0$. Da f stetig und $[a,b]$ kompakt, existieren $m := \min\limits_{[a,b]} f(x),\ M := \max\limits_{[a,b]} f(x)$.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [a,b] : mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)\\
\overset{\text{Monotonie}}{\Rightarrow}\quad & \int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\quad & m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g} \leq M\\
\overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow}\quad & \exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g}.
\end{aligned}$$

□

10.42 Hilfssatz: Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, f monoton fallend und $f(x) \geq 0$ auf $[a,b]$. Dann

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Fall 1: $f = 0 \ \vee\ g = 0$ auf $[a,b]$. Dann gilt die Aussage für beliebiges $\xi \in [a,b]$.

Fall 2: $f \neq 0 \ \wedge\ g \neq 0 \ \Rightarrow\ f(a) > 0 \ \wedge\ \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x > 0$ (da $|g|$ stetig). Sei $G(t) := \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x$. G ist stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$, also existieren $m := \min\limits_{[a,b]} G(x),\ M := \max\limits_{[a,b]} G(x)$.

Zeige:

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq Mf(a). \tag{$*$}$$

Dann folgt $m \leq \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M$ und mit dem Zwischenwertsatz

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x = G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Schritt 1: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$Zerlegung $Z = \{\xi_0, \dots \xi_n\}$: $\left| \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} g(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$,

denn:

Sei $\varepsilon > 0$ fest. f ist stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ $\overset{\text{Satz 6.52}}{\Rightarrow}$ f ist gleichmäßig stetig. Wähle $\delta > 0$, so dass

$$\forall x, x' \in [a,b] : |x - x'| < \delta \Rightarrow \big| f(x) - f(x') \big| < \frac{\varepsilon}{2 \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x}.$$

Sei Z eine Zerlegung mit $\max\{\xi_j - \xi_{j-1} : j = 1, \dots, n\} < \delta$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} g(x)\,\mathrm{d}x \right| &\overset{\text{Additivität}}{=} \left| \sum_{j=1}^n \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \big(f(x) - f(\xi_j)\big) g(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \big| f(x) - f(\xi_j) \big| \cdot |g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2 \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} |g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Additivität}}{=} \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Schritt 2: Sei $\varepsilon > 0$ und Z eine Zerlegung aus Schritt 1. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n f(\xi_j) \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} g(x)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{Additivität}}{=} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \big(G(\xi_j) - G(\xi_{j-1}) \big) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} G(\xi_j) \big(\underbrace{f(\xi_j) - f(\xi_{j+1})}_{\geq 0} \big) - \underbrace{G(\xi_0)}_{=G(a)=0} f(\xi_0) + \underbrace{G(\xi_n) f(\xi_n)}_{=G(b)f(b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \leq \; M \sum_{j=0}^{n-1} \big(f(\xi_j) - f(\xi_{j+1}) \big) + Mf(b) \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} Mf(a) \\ \geq \; m \sum_{j=0}^{n-1} \big(f(\xi_j) - f(\xi_{j+1}) \big) + mf(b) = mf(a) \end{cases}$$

$$\overset{\text{Schritt 1}}{\Rightarrow} \; mf(a) - \varepsilon < \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq Mf(a) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $(*)$. $\square$

10.43 Zweiter Mittelwertsatz (der Integralrechnung): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und monoton, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,\mathsf{d}x \;=\; f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathsf{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathsf{d}x.$$

Beweis: Fall 1: f monoton fallend. Sei $\widetilde{f}(x) := f(x) - f(b)$. Aus (10.42):

$$\begin{aligned}
\exists \xi \in [a,b] : \quad & \int_a^b \widetilde{f}(x)g(x)\,\mathsf{d}x \;=\; \widetilde{f}(a)\int_a^b g(x)\,\mathsf{d}x \\
\Leftrightarrow \quad & \int_a^b f(x)g(x)\,\mathsf{d}x - f(b)\int_a^b g(x)\,\mathsf{d}x \;=\; \big(f(a)-f(b)\big)\int_a^\xi g(x)\,\mathsf{d}x \\
\Leftrightarrow \quad & \int_a^b f(x)g(x)\,\mathsf{d}x \;=\; f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathsf{d}x + f(b)\Bigg(\int_a^b g(x)\,\mathsf{d}x - \int_a^\xi g(x)\,\mathsf{d}x\Bigg)
\end{aligned}$$

Fall 2: f monoton wachsend: Dasselbe mit $\widetilde{f}(x) := f(b) - f(x)$. □

10.8 Das Restglied im Satz von Taylor

10.44 Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $(n+1)$-Mal stetig differenzierbar, $x_0 \in]a,b[$. Dann gilt

$$f(x) \;=\; \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_n(x_0,x) \text{ für } x \in]a,b[$$

mit

$$R_n(x_0,x) \;=\; \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathsf{d}t.$$

Beweis: Induktionsanfang $n = 0$:

$$R_0(x_0,x) = \int_{x_0}^x f'(t)\mathsf{d}t = f(x) - f(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) = f(x_0) + R(x_0,x).$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
f(x) \;\overset{\text{Induktions-}}{\underset{\text{vorrauss.}}{=}}\; & \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathsf{d}t \\
=\; & \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{1}{n!}\Big(-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\Big|_{t=x_0}^x \\
& + \int_{x_0}^x \frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\mathsf{d}t\Big) \\
=\; & \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\mathsf{d}t \\
=\; & \sum_{j=0}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_{n+1}(x_0,x).
\end{aligned}$$

□

10.45 Restgliedformel (Schlömilch): Voraussetzung wie Satz 10.44. Dann gilt für $1 \leq p \leq n+1$:

$$\exists \xi \in \,]x_0, x[\, \cup \,[x, x_0[\, : R_n(x_0, x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!}(x-\xi)^{n+1-p}(x-x_0)^p.$$

Für $p = n+1$ ist dies die Restgliedformel von Lagrange (siehe 7.31). Für $p = 1$ ergibt sich die **Restgliedformel von Cauchy**

$$R_n(x_0, x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

Beweis: Fall $x \geq x_0$:

$$\begin{aligned} R_n(x_0,x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1-p}f^{(n+1)}(t)\,\underbrace{(x-t)^{p-1}}_{=:g(t)\geq 0}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\substack{\text{Erster Mittelwertsatz} \\ \text{Integralrechnung}}}{=} \frac{1}{n!}(x-\xi)^{n+1-p}f^{(n+1)}(\xi)\underbrace{\int_{x_0}^{x}(x-t)^{p-1}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{p}(x-x_0)^p}. \end{aligned}$$

Fall $x < x_0$: $R_n(x_0,x) \;=\; \frac{1}{n!}\int_{x}^{x_0}(x-t)^{n+1-p}f^{(n+1)}(t)\,\underbrace{\big(-(x-t)^{p-1}\big)}_{=:g(t)\geq 0}\,\mathrm{d}t \;=\; \ldots$ (wie vorher)

$\square$

10.46 Beispiele: 1) Für $-1 < x \leq 1$ gilt

$$\ln(1+x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

2) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ sei

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \; \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha}{k}\binom{\alpha-1}{k-1} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0, \text{ also } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Für $-1 < x < 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k.$$

10.9 Uneigentliche Integrale

Ziel: Erweiterung des Integralbegriffs auf offene Intervalle und unbeschränkte Funktionen.

10.47 Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ beliebiges Intervall; $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls für jedes Intervall $[a,b] \subseteq I$ gilt: $f\big|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a,b])$.

10.48 Beispiele: 1) $f : I = \,]0,\infty[\, \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist lokal integrierbar.

2) $f : I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist auf I lokal integrierbar.

3) $f \in \mathcal{R}([a,b])$ $\Rightarrow$ f ist auf $[a,b]$ lokal integrierbar.

10.49 Definition: Sei $I = [a,b[\,$, $-\infty < a < b \leq \infty$, $f : I \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann heißt f **uneigentlich integrierbar** über I, falls

$$\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \;=:\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert. Wir sagen auch: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konvergiert**.

Falls der Grenzwert für $\beta \to b-0$ nicht existiert: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **divergiert**.

Genauso: • $I =]a,b]$, $-\infty \leq a < b < \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

• $I =]a,b[\,$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \to b-0} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad c \in]a,b[\text{ beliebig.}$$

Additivität des Integrals $\Rightarrow$ Wert der rechten Seite ist unabhängig von $c \in], a, b[\,$.

10.50 Beispiele: **1)** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; 1$, $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ divergiert, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ divergiert,

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \;=\; 2,$

3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; 1.$

4) Weitere wichtige Beispiele in den Übungen.

10.51 Bemerkung: Ist $f \in \mathcal{R}([a,b])$, dann ist f auf $]a,b[$ lokal integrierbar, und es gilt für beliebiges $c \in]a,b[\,$:

$$\int_a^b f \;=\; \lim_{\alpha \to a+0} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b \to \beta-0} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$

denn: 10.25 $\Rightarrow$ $F(t) := \displaystyle\int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x$, $c \leq t \leq b$ ist stetig

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) = \lim_{\beta \to b-0} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$

Genauso folgt $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x.$

Additivität $\Rightarrow$ Behauptung.

10.52 Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale: Seien $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Falls

$$\big(\forall x \in [a,b[: |f(x)| \leq g(x)\big) \ \wedge \ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergent,}$$

dann konvergieren auch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \ \leq \ \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \ \leq \ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Entsprechend für uneigentliche Integrale über $]a,b]$ oder $]a,b[$.

Beweis: Schritt 1: Zeige $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\beta\to b-0} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert:

Teil a): Sei (β_n) Folge in $[a,b[$, $\beta_n \to b$. Zeige, dass $y_n := \int_a^{\beta_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned}
|y_n - y_m| &\overset{\text{Additi-}}{\underset{\text{vität}}{=}} \left|\int_{\beta_m}^{\beta_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{\beta_m}^{\beta_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right| \quad \text{(äußerer Betrag nötig falls } \beta_n < \beta_m\text{)} \\
&\overset{|f(x)|\leq g(x)}{\underset{\text{Monotonie}}{\leq}} \left|\int_{\beta_m}^{\beta_n} g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{\beta_n} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{\beta_m} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&< \quad \varepsilon \quad \text{für } n,m > N_\varepsilon.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (y_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, also konvergent.

Teil b): $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ist unabhängig von der gewählten Folge (β_n): Ist $(\widetilde{\beta}_n)$ eine weitere Folge in $[a,b[$ mit $\widetilde{\beta}_n \to b$, so betrachte $\beta_1, \widetilde{\beta}_1, \beta_2, \widetilde{\beta}_2, \ldots$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^{\widetilde{\beta}_n} f(x)\,\mathrm{d}x \ = \ \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Schritt 2: Zeige $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ ist konvergent: Wende Schritt 1 auf $|f|$ anstelle von f an.

Schritt 3: Beweis der Integralungleichungen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left|\int_a^{\beta_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \ \leq \ \int_a^{\beta_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \ \leq \ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\overset{3.60}{\Rightarrow}$ Behauptung. $\square$

10.53 Beispiele: 1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ ist konvergent.

2) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ fest und $f(x) := x^\gamma \, \mathrm{e}^{-x}$. Wähle $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\gamma-2}}{\mathrm{e}^x} = 0 \Rightarrow \exists K > 0 \; \forall x > K : \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon := 1$$

$$\forall x > K : \big|f(x)\big| < \big|g(x)\big|$$

$$\overset{\text{Vergleichs-}}{\underset{\text{kriterium}}{\Rightarrow}} \int_1^\infty x^\gamma \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \int_1^K x^\gamma \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x + \int_K^\infty x^\gamma \, \mathrm{e}^{-x} x \, \mathrm{d}x \text{ konvergiert.}$$

10.54 Integralkriterium für Reihenkonvergenz: Sei $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$ monoton fallend (Damit ist f lokal integrierbar). Dann gilt:

$$\int_1^\infty f(x) \, \mathrm{d}x \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ konvergiert.}$$

Beweis: (i) "$\Rightarrow$": Definiere $g(x) := f(n+1)$ für $n \le x < n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \quad 0 \le g(x) \le f(x) \text{ für } x \in [1,\infty[\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \int_1^\infty g(x) \, \mathrm{d}x \text{ ist konvergent}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=2}^n f(k) = \int_1^n g(x) \, \mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\to} \int_1^\infty g(x) \, \mathrm{d}x.$$

(ii) "$\Leftarrow$": Definiere $g(x) := f(n)$ für $n \le x < n+1$.

$$\Rightarrow \quad g(x) \ge 0 \;\wedge\; \int_1^n g(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n f(k) \text{ konvergiert für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \int_n^m g(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=n+1}^m f(k) < \varepsilon \text{ für } n > m > N_\varepsilon.$$

Sei (b_n) Folge in $[1,\infty[$, $b_n \to \infty$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N' \in \mathbb{N} \; \forall n > N' : b_n > N_\varepsilon + 1$.
Für $n, m > N'$ gilt

$$\left|\int_1^{b_n} g(x) \, \mathrm{d}x - \int_1^{b_m} g(x) \, \mathrm{d}x\right| = \left|\int_{b_m}^{b_n} g(x) \, \mathrm{d}x\right| \underset{K\in\mathbb{N},\; K \ge \max\{b_n,b_m\}}{\overset{g(x) \text{ positiv}}{\le}} \int_{N_\varepsilon+1}^K g(x) \, \mathrm{d}x < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_1^{b_n} g(x) \, \mathrm{d}x \text{ konvergiert.}$$

Ist $(\widetilde{b}_n)$ eine andere Folge mit $\widetilde{b}_n \to \infty$, so folgt wie im letzten Beweis

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{b_n} g(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_1^{\widetilde{b}_n} g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Somit konvergiert $\displaystyle\int_1^\infty g(x) \, \mathrm{d}x \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \int_1^\infty f(x) \, \mathrm{d}x$ konvergiert. □

10.55 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln k}$ ist divergent.

10.10 Komplex- und vektorwertige Funktionen

10.56 Erinnerung: Sei $d \in \mathbb{N}$.

$$\|.\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \right\| = \left(\sum_{j=1}^{d} v_j^2 \right)^{1/2} \text{ ist Norm auf } \mathbb{R}^d,$$

$$\|.\| : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R} : \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \right\| = \left(\sum_{j=1}^{d} |v_j|^2 \right)^{1/2} \text{ ist Norm auf } \mathbb{C}^d,$$

und es gilt für $i = 1, \ldots, d$:

$$|v_i| \le \max_{1 \le j \le d} |v_j| \le \|v\| = \left(\sum_{j=1}^{d} |v_j|^2 \right)^{1/2} \le \sum_{j=1}^{d} |v_j| \le d \max_{1 \le j \le d} |v_j|. \qquad (*)$$

10.57 Konvergenz: Sei (v_n) Folge in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^d$, $v_n = \begin{pmatrix} (v_n)_1 \\ \vdots \\ (v_n)_d \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ (w_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d/\mathbb{C}^d$.

Es gilt

$$\begin{aligned} v_n \to w \quad &\Leftrightarrow \quad \|v_n - w\| \to 0 \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \forall j = 1, \ldots, d : (v_n)_j \to w_j \\ &\overset{\text{im Fall } \mathbb{C}^d}{\Leftrightarrow} \quad \forall j = 1, \ldots, d : \operatorname{Re}(v_n)_j \to \operatorname{Re} w_j \ \wedge \ \operatorname{Im}(v_n)_j \to \operatorname{Im} w_j. \end{aligned}$$

Das bedeutet: Konvergenz in $\mathbb{R}^d/\mathbb{C}^d$ ist nichts anderes als Konvergenz in $\mathbb{R}$ in jeder Koordinate.

10.58 Vollständigkeit: Entsprechend gelten

(v_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^d$ $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \ldots, d : \big((v_n)_j\big)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$,

(v_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{C}^d$ $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \ldots, d : \big(\operatorname{Re}(v_n)_j\big)_{n \in \mathbb{N}}, \big(\operatorname{Im}(v_n)_j\big)_{n \in \mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$.

Daraus folgt die Vollständigkeit von $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{C}^d$, denn z.B.

$$\begin{aligned} (v_n) \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{R}^d \quad &\Leftrightarrow \quad \forall j = 1, \ldots, d : \big((v_n)_j\big)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{R}, \\ &\overset{\mathbb{R} \text{ ist vollständig}}{\Rightarrow} \quad \forall j = 1, \ldots, d : (v_n)_j \to w_j \text{ in } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} (v_n)_1 \\ \vdots \\ (v_n)_d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10.59 Rechenregeln für konvergente Folgen: Seien $v_n \to \widetilde{v}$, $w_n \to \widetilde{w}$ in $\mathbb{R}^d/\mathbb{C}^d$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ und $x_n \to x$ in $\mathbb{R}/\mathbb{C}$. Dann gelten:

1) $\alpha v_n + \beta w_n \ \to \ \alpha \widetilde{v} + \beta \widetilde{w}$,

2) $\langle v_n, w_n \rangle \ \to \ \langle \widetilde{v}, \widetilde{w} \rangle := \sum_{j=1}^{d} \widetilde{v}_j \overline{\widetilde{w}_j}$ (Skalarprodukt),

3) $\|v_n\| \ \to \ \|\tilde{v}\|$,

4) $x_n \cdot v_n \ \to \ x \cdot \tilde{v}$.

10.60 Stetigkeit: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}^d/\mathbb{C}^d$, $t_0 \in D$. Dann heißt f stetig in t_0, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t \in D : |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$$

oder äquivalent, wenn für jede Folge (s_n) in D gilt:

$$s_n \to t_0 \ \Rightarrow \ f(s_n) \to f(t_0).$$

Nach $(*)$ gilt

$$f(s_n) \to f(t_0) \ \Leftrightarrow \ \forall j = 1, \ldots, d : \ f_j(s_n) \to f_j(t_0)$$

bzw. $\operatorname{Re} f_j(s_n) \to \operatorname{Re} f_j(t_0) \ \wedge \ \operatorname{Im} f_j(s_n) \to \operatorname{Im} f_j(t_0)$.

Also gilt

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \text{ ist stetig in } t_0 \ \Leftrightarrow \ \forall j = 1, \ldots, d : \ f_j \text{ ist stetig in } t_0$$

bzw. $\operatorname{Re} f_j$, $\operatorname{Im} f_j$ sind stetig in t_0.

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich: Sind f, g stetig in t_0 und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$, so sind die Funktionen $t \mapsto \alpha f(t) + \beta g(t)$, $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ und $t \mapsto \|f(t)\|$ stetig in t_0.

10.61 Ableitung: $f :]a, b[\to \mathbb{R}^d/\mathbb{C}^d$ heißt **differenzierbar** in $t_0 \in]a, b[$, falls

$$f'(t_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existiert; f heißt **differenzierbar**, falls $\forall t_0 \in]a, b[: f$ ist differenzierbar in t_0.

Nach $(*)$:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \text{ ist differenzierbar in } t_0 \ \Leftrightarrow \ \forall j = 1, \ldots, d : \ f_j \text{ ist differenzierbar in } t_0$$

bzw. $\operatorname{Re} f_j$, $\operatorname{Im} f_j$ sind differenzierbar in t_0.

Außerdem gilt

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_d' \end{pmatrix}.$$

10.62 Beispiele: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto t^2 + \mathrm{i}\mathrm{e}^{3t} \ \Rightarrow \ f'(t) = 2t + \mathrm{i}3\mathrm{e}^{3t}$.

2) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$ für $t \in]0, 2\pi[$.

10.63 Bemerkung: Ab jetzt nur noch Funktionen $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}^d$. Für $\mathbb{C}^d$ geht alles analog.

10.64 Ableitungsregeln: Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}^d$ differenzierbar in $t_0 \in]a, b[$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann

1) Linearität: $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar in t_0 mit $(\alpha f + \beta g)'(t_0) = \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0)$.

2) Produktregel für Skalarprodukt: $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R} : t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ ist differenzierbar in t_0, und es gilt für $t = t_0$:

$$\langle f(t), g(t) \rangle' = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle \,,$$

denn mit den Rechenregeln für reellwertige Funktionen folgt

$$\left(\sum_{j=1}^{d} f_j(t) \cdot g_j(t) \right)' = \sum_{j=1}^{d} f_j'(t) \cdot g(t) + \sum_{j=1}^{d} f_j(t) \cdot g'(t).$$

3) Produktregel für skalare Multiplikation: Ist zusätzlich $\alpha :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in t_0, so gilt

$$\big(\alpha \cdot f\big)'(t_0) = \alpha'(t_0) \cdot f(t_0) + \alpha(t_0) \cdot f'(t_0),$$

denn

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \cdot f_1(t) \\ \vdots \\ \alpha(t) \cdot f_d(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \cdot f_1(t) + \alpha(t) \cdot f_1'(t) \\ \vdots \\ \alpha'(t) \cdot f_d(t) + \alpha(t) \cdot f_d'(t) \end{pmatrix}.$$

4) Kettenregel: Ist zuätzlich $\varphi :]c, d[\to]a, b[$ differenzierbar in $s_0 \in]c, d[$ und $\varphi(s_0) = t_0$, so ist $f \circ \varphi$ differenzierbar in s_0, und es gilt

$$(f \circ \varphi)'(s_0) = \varphi'(s_0) \cdot f'\big(\varphi(s_0)\big).$$

Nachweis durch Anwendung der Kettenregel in jeder Koordinate von $f \circ \varphi$.

10.65 Bemerkung: Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt nicht für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$. Beispiel:

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(2\pi), \; f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \neq 0 \text{ für } t \in]0, 2\pi[$$

$\Rightarrow$ Es gibt kein $\xi \in]0, 2\pi[$, so dass $\dfrac{1}{2\pi - 0}\big(f(2\pi) - f(0)\big) = f'(\xi)$.

10.66 Lineare Algebra: Für $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2}, \\ \langle x, y\rangle &= \sum_{j=1}^{d} x_j\, y_j, \text{ und } \|x\|^2 = \langle x, x\rangle\,, \\ |\langle x, y\rangle| &\leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ (Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung).} \end{aligned}$$

10.67 Satz: Sei $d \in \mathbb{N}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ stetig, in $]a, b[$ differenzierbar. Dann

$$\big\|f(b) - f(a)\big\| \leq (b-a) \sup_{a\leq t\leq b} \|f'(t)\|.$$

Beweis: $\varphi(t) := \langle f(t), f(b) - f(a)\rangle$

$\Rightarrow$ $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig, in $]a, b[$ differenzierbar, $\varphi'(t) \overset{\text{Produktregel f.}}{\underset{\text{Skalarprodukt}}{=}} \langle f'(t), f(b) - f(a)\rangle + 0.$

Mittelwertsatz der Diffrechnung für reellwertige Funktionen: $\exists \xi \in]a, b[: \dfrac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b-a} = \varphi'(\xi)$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle f(b), f(b) - f(a)\rangle - \langle f(a), f(b) - f(a)\rangle}_{=\langle f(b)-f(a), f(b)-f(a)\rangle = \|f(b)-f(a)\|^2} = (b-a)\,\langle f'(\xi), f(b) - f(a)\rangle \overset{\text{Cauchy-Schwarz-}}{\underset{\text{Bunjakowski}}{\leq}} (b-a)\big\|f'(\xi)\big\| \cdot \big\|f(b) - f(a)\big\|$$

$$\overset{\text{auch im Fall } f(b)=f(a)}{\Rightarrow} \|f(b) - f(a)\| \leq (b-a)\|f'(\xi)\| \leq (b-a) \sup_{a\leq t\leq b} \|f'(t)\|.$$

□

10.68 Ableitung auf abgeschlossenen Intervallen: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$.

1) f heißt **linksseitig differenzierbar** in $t = b$ bzw. **rechtsseitig differenzierbar** in $t = a$, falls

$$f'(b) := \lim_{t\to b-0} \frac{1}{t-b}\big(f(t) - f(b)\big) \quad \textbf{bzw.} \quad f'(a) := \lim_{t\to a+0} \frac{1}{t-a}\big(f(t) - f(a)\big)$$

existiert.

2) f heißt **differenzierbar auf** $[a, b]$, falls f differenzierbar in $]a, b[$, linksseitig differenzierbar in b und rechtsseitig differenzierbar in a ist. Die Ableitungsfunktion f' ist dann auf ganz $[a, b]$ definiert.

3) f heißt **stetig differenzierbar** auf $[a, b]$, falls f differenzierbar auf $[a, b]$ und $f' : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ stetig ist.

4) Wir setzen

$$C^0\big([a, b] \to \mathbb{R}^d\big) := C\big([a, b] \to \mathbb{R}^d\big) := \big\{f : [a, b] \to \mathbb{R}^d \;\big|\; f \text{ ist stetig auf } [a, b]\big\},$$

und für $k \in \mathbb{N}$

$$C^k\big([a, b] \to \mathbb{R}^d\big) := \big\{f : [a, b] \to \mathbb{R}^d \;\big|\; f \text{ ist stetig differenzierbar auf } [a, b] \;\wedge\; f' \in C^{k-1}\big([a, b] \to \mathbb{R}^d\big)\big\}.$$

$C^k(\ldots)$ ist die Menge aller Funktionen, deren Ableitungen $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ stetig sind.

10.69 Beispiele: 1) Ist f differenzierbar in $]a,b[$ und $[c,d] \subseteq]a,b[$, so ist f differenzierbar auf $[c,d]$.

2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$ ist in $t = 0$ nicht rechtseitig differenzierbar.

10.70 Bemerkungen: 1) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ fest. Dann ist

$$\|f\|_{k,\infty} \;:=\; \sum_{j=0}^{k} \max\left\{\left\|f^{(j)}(t)\right\| : a \le t \le b\right\} \text{ für } f \in C^k\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$$

eine Norm, und $\big(C^k\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big), \|.\|_{k,\infty}\big)$ ist ein Banachraum.

2) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig, in $]a,b[$ differenzierbar, und existiert $\lim\limits_{t \to b-0} f'(t)$, so ist f in $x = b$ linksseitig differenzierbar, und es gilt

$$f'(b) \;=\; \lim_{t \to b-0} f'(t).$$

Entsprechend in $t = a$.

10.71 Integralrechnung:

1) $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix} : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ ist Treppenfunktion $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \dots d : g_j$ ist Treppenfunktion.

2) Das Integral über eine Treppenfunktion g ist definiert durch

$$\int_a^b g \;:=\; \begin{pmatrix} \int_a^b g_1 \\ \vdots \\ \int_a^b g_d \end{pmatrix}.$$

3) Für eine Folge (g_n), $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ gilt: $g_n \to f$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[a,b]$

$\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \dots d : (g_n)_j \to f_j$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[a,b]$,

denn

$$\big|(g_n)_j(t) - f_j(t)\big| \;\overset{(*)}{\le}\; \big\|g_n(t) - f(t)\big\| \;\overset{(*)}{\le}\; d \max_{1 \le j \le d} \big|(g_n)_j(t) - f_j(t)\big|.$$

4) $f[a,b] \to \mathbb{R}^d$ heißt **Regelfunktion**, falls eine Folge (g_n) von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ existiert, so dass $g_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Schreibe $f \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$. Dann

$$\int_a^b f \;:=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \int_a^b (g_n)_1 \\ \vdots \\ \int_a^b (g_n)_d \end{pmatrix} \overset{10.57}{=} \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b (g_n)_1 \\ \vdots \\ \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b (g_n)_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1 \\ \vdots \\ \int_a^b f_n \end{pmatrix}.$$

Insbesondere existiert der Grenzwert und ist unabhängig von der gewählten Folge (g_n), siehe 10.8.

5) Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung: Sei $f \in C([a,b] \to \mathbb{R}^d)$ und $F(t) := \int_a^t f(s)\,\mathsf{d}s$ für $a \le s \le b$. Dann ist F differenzierbar in $]a,b[$ mit $F'(t) = f(t)$ für $a < t < b$ denn $f \in C([a,b] \to \mathbb{R}^d) \;\Rightarrow\; \forall j = 1, \dots d : f_j$ ist stetig auf $[a,b]$, und

$$f(t) \overset{4)}{=} \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(s)\,\mathsf{d}s \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(s)\,\mathsf{d}s \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; f'(t) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\int_a^b f_1(s)\,\mathsf{d}s \\ \vdots \\ \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\int_a^b f_d(s)\,\mathsf{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_d(t) \end{pmatrix} \;=\; f(t).$$

6) Stammfunktion und Integralberechnung: Ist $f \in C\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$ und F eine Stammfunktion von f (d.h. F ist stetig auf $[a,b]$ und in $]a,b[$ differenzierbar mit $F' = f$), so gilt

$$\int_c^d f \;=\; F(d) - F(c) \quad \text{für } a \le c \le d \le b.$$

10.72 Beispiele: 1) $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathsf{d}t = \begin{pmatrix} \cos t\big|_0^{2\pi} \\ \sin t\big|_0^{2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $f(t) = t^2 + \mathrm{i}\frac{5}{t} \;\Rightarrow\; \int_1^2 f(t)\,\mathsf{d}t = \big[\frac{t^3}{3} + \mathrm{i}5\ln t\big]_1^2 = \frac{7}{3} + \mathrm{i}5\ln 2.$

10.73 Satz: Ist $f \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$, dann gilt auch $\|f(.)\| \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}\big)$ und

$$\left\| \int_a^b f \right\| \;\le\; \int_a^b \|f\|.$$

Beweis: 1) Zeige $\|f(.)\| \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}\big)$. Wähle Folge von Treppenfunktionen $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ mit $g_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \|g_n(.)\| \text{ ist Treppenfunktion auf } [a,b], \\ \|g_n(.)\| \to \|f(.)\| \text{ gleichmäßig auf } [a,b], \text{ denn} \\ \big|\|g_n(t)\| - \|f(t)\|\big| \le \|g_n(t) - f(t)\| \end{cases}$$
$$\Rightarrow \;\; \|f(.)\| \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}\big).$$

2) Beweis der Ungleichung. Vorüberlegung: Für $y \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\left\langle \int_a^b f(t)\,\mathsf{d}t, y \right\rangle \;=\; \sum_{j=1}^d \int_a^b f_j(t) y_j\,\mathsf{d}t \;=\; \int_a^b \left(\sum_{j=1}^d f_j(t) y_j \right) \mathsf{d}t \;=\; \int_a^b \langle f(t), y\rangle\,\mathsf{d}t.$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\int_a^b f\right\|^2 \;=\; \left\langle \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \underbrace{\int_a^b f}_{=:y} \right\rangle \;=\; \int_a^b \left\langle f(t), y\right\rangle \mathrm{d}t$$

$$\underset{\text{Monotonie}}{\overset{\text{CSB}}{\leq}} \int_a^b \|f(t)\| \cdot \|y\| \;\mathrm{d}t \overset{\text{Linearität}}{=} \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \cdot \|y\|\,.$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\int_a^b f\right\| \cdot \left\|\int_a^b f\right\| \;\leq\; \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \cdot \left\|\int_a^b f\right\|$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

$\square$

10.11 Kurven im $\mathbb{R}^d$

10.74 Definition: Seien $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $f \in C\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$.

1) Die Menge $K := \text{Bild}\,(f)$ heißt **Kurve** im $\mathbb{R}^d$, $\big(f, [a,b]\big)$ heißt **Parameterdarstellung** von K. Ist $f(a) = f(b)$, so heißt K **geschlossen**.

2) Ist $f\big|_{[a,b[}$ injektiv, so heißt K **Jordan-Kurve**.

10.75 Bemerkungen: 1) Die Parameterdarstellung einer Kurve induziert einen Durchlaufungssinn.

2) Kurven mit stetiger Parameterdarstellung können ziemlich verrückt sein. Z.B. füllen die Peano-Kurve oder die Hilbert-Kurve eine zweidimensionale Fläche komplett aus.

10.76 Geometrische Bedeutung der Ableitung: Sei $K = \mathrm{Bild}(f)$, f differ4enzierbar in $t_0 \in [a,b]$, d.h.

$$f'(t_0) \;=\; \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad \text{existiert.}$$

$\dfrac{1}{t-t_0}\big(f(t) - f(t_0)\big)$ ist Richtungsvektor der Sekanten durch $f(t)$ und $f(t_0)$, $f'(t_0)$ ist ein Richtungsvektor der Tangente an K im Punkt $f(t_0)$.

Oder genauer (vgl. 7.3)

$$f(t) \;=\; f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + o(1) \quad \text{für } t \to t_0,$$

d.h. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d : t \mapsto f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ ist Schmiegegerade an K.

$\|f'(t_0)\|$ gibt die „Momentangeschwindigkeit“ an, mit der K durchlaufen wird.

10.77 Beispiele: **1)** $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$.

2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t^2) \\ \sin(2\pi t^2) \end{pmatrix}$.

3) $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos(2\pi t) \\ t\sin(2\pi t) \end{pmatrix}$ (Archimedische Schneckenlinie).

4) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } -1 \le t < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} & \text{für } 0 \le t \le 1. \end{cases}$

(f ist stetig differenzierbar, aber K hat eine Ecke.)

10.78 Definition: Sei $\big(f,[a,b]\big)$ Parameterdarstellung von K, $t_0 \in [a,b]$. Existiert $f'(t_0)$ und gilt $f'(t_0) \neq 0$, so heißt

$$T_f(t_0) \ := \ \frac{1}{\|f'(t_0)\|}\, f'(t_0)$$

der **Tangenteneinheitsvektor** im Punkt $f(t_0)$.

10.79 Definition: Zwei Parameterdarstellungen $\big(f,[a,b]\big)$, $\big(g,[c,d]\big)$ einer Kurve K heißen **äquivalent**, falls eine Abbildung

$$\varphi \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}\big) \text{ mit } \varphi'(t) > 0 \text{ auf } [a,b],\ \varphi(a) = c \text{ und } \varphi(b) = d$$

existiert, so dass $f = g \circ \varphi$.

Insbesondere ist $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ bijektiv, und es gelten

$$\varphi^{-1} \in C^1\big([c,d] \to \mathbb{R}\big) \text{ mit } (\varphi^{-1})'(s) > 0 \text{ auf } [c,d],\ \varphi^{-1}(c) = a \text{ und } \varphi^{-1}(d) = b$$

und $g = f \circ \varphi^{-1}$.

10.80 Satz: Sind $\big(f,[a,b]\big)$, $\big(g,[c,d]\big)$ äquivalente Parameterdarstellungen einer Kurve K, $t_0 \in [a,b]$, g differenzierbar in $\varphi(t_0)$ mit $g'\big(\varphi(t_0)\big) \neq 0$, so ist f differenzierbar in t_0, und es gelten $f'(t_0) \neq 0$ und

$$\begin{aligned} T_f(t_0) &= \frac{1}{\|f'(t_0)\|}\, f'(t_0) \\ &\overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{\|g'\big(\varphi(t_0)\big)\cdot\varphi'(t_0)\|}\, g'\big(\varphi(t_0)\big)\cdot\varphi'(t_0) \\ &\overset{\varphi'(t_0)>0}{=} \frac{1}{\|g'\big(\varphi(t_0)\big)\|}\, g'\big(\varphi(t_0)\big) \\ &= T_g\big(\varphi(t_0)\big). \end{aligned}$$

D.h. der Tangenteneinheitsvektor im Punkt $f(t_0) = g\big(\varphi(t_0)\big)$ ist also unabhängig von der (äquivalenten) Parameterdarstellung.

10.81 Definition: Sei K eine Kurve im $\mathbb{R}^d$.

1) Existiert eine Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$ mit $f \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$ und $f'(t) \neq 0$ auf $[a,b]$, so heißt K **glatt**.
   Insbesondere: K glatt $\Rightarrow$ T_f stetig auf $[a,b]$, d.h. K hat keine Ecken.

2) K heißt **stückweise glatt**, falls es eine Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$ und eine Zerlegung $Z = \{t_0,\ldots,t_m\}$ von $[a,b]$ gibt, so dass

$$f\big|_{[t_{j-1},t_j]} \in C^1\big([t_{j-1},t_j] \to \mathbb{R}^d\big) \text{ und } \big(f\big|_{[t_{j-1},t_j]}\big)'(t) \neq 0 \text{ für } t_{j-1} \leq t \leq t_j \ (j = 1,\ldots,m).$$

10.82 Beispiel: $f : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 1$, $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix}$ für $1 < t \leq 2$ ist stückweise glatt und

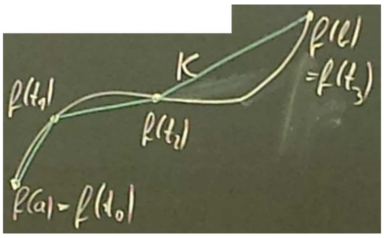
$$\big(f\big|_{[0,1]}\big)'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \big(f\big|_{[1,2]}\big)'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.83 Definition: Sei K Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$.

1) Falls

$$\exists M > 0 \ \forall \text{ Zerlegungen } Z = \{t_0,\ldots,t_n\} \text{ von } [a,b] : L_Z(K) := \sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \leq M,$$

   so heißt K **rektifizierbar**.



2) Ist K rektifizierbar, so heißt

$$L(K) \ := \ \sup\big\{L_Z(K) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\big\}$$

   die **Bogenlänge** von K.

10.84 Satz: Sei K eine glatte Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $f \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$. Dann ist K rektifizierbar, und es gilt

$$L(K) \ = \ \int_a^b \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

Beweis: 1) Zeige „$\leq$“: Sei $Z = \{t_0,\ldots,t_n\}$ Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L_Z(K) \quad &= \quad \sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \ = \ \sum_{j=1}^{n} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| \\ &\overset{10.73}{\leq} \quad \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \ \overset{\text{Additivität}}{=} \ \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \ L(K) \quad &\leq \quad \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2) Zeige „$\geq$“: Sei $\varepsilon > 0$ fest. f' stetig auf kompaktem Intervall $\overset{6.52}{\Rightarrow}$ f' ist gleichmäßig stetig:

$$\Rightarrow \ \exists \delta > 0 \ \forall s, t \in [a,b] : |s-t| < \delta \Rightarrow \|f'(s) - f'(t)\| < \varepsilon$$

Wähle eine Zerlegung $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ von $[a,b]$ mit $\max\limits_{1 \leq j \leq n} |t_j - t_{j-1}| < \delta$. Dann

$$\|f'(t)\| \ \leq \ \|f'(t_j)\| + \|f'(t) - f'(t_j)\| \ < \ \|f'(t_j)\| + \varepsilon \text{ für } t_{j-1} \leq t \leq t_j$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| \, \mathsf{d}t \ &\leq \ \|f'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
&= \ \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big(f'(t_j) - f'(t) + f'(t)\big) \, \mathsf{d}t \right\| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
&\leq \ \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{\|f'(t_j) - f'(t)\|}_{<\varepsilon} \, \mathsf{d}t + \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t) \, \mathsf{d}t \right\| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
&\leq \ \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| + 2\varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
\Rightarrow \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathsf{d}t \ &= \ \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| \, \mathsf{d}t \\
&\leq \ \underbrace{\sum_{j=1}^n \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|}_{=L_Z(K)} + 2\varepsilon(b-a) \\
&\leq \ L(K) + 2\varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. $\square$

10.85 Satz: Äquivalente Parameterdarstellungen einer Kurve K ergeben dieselbe Länge $L(K)$.

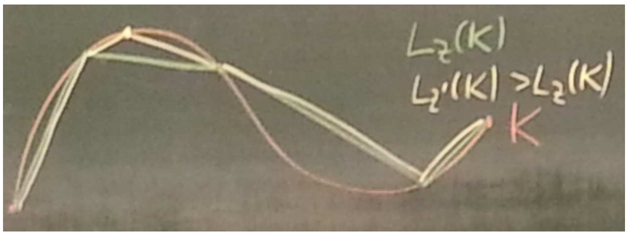
Beweis: Seien $\big(f, [a,b]\big)$ und $\big(g, [c,d]\big)$ zwei äquivalente Parameterdarstellungen von K und $L^{(f)}(K)$, $L^{(g)}(K)$ die durch f bzw. g definierte Länge von K. Ist $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so ist $Z' := \{\varphi(t_0), \ldots, \varphi(t_n)\}$ eine Zerlegung von $[c,d]$ und es gilt

$$L_Z^{(f)}(K) \ = \ \sum_{j=1}^n \big\|f(t_j) - f(t_{j-1})\big\| \ \overset{f(t) = g(\varphi(t))}{=} \ \sum_{j=1}^n \big\|g\big(\varphi(t_j)\big) - g\big(\varphi(t_{j-1})\big)\big\| \ \leq \ L^{(g)}(K).$$

$\Rightarrow \ L^{(f)}(K) = \sup\limits_Z L_Z^{(f)}(K) \leq L^{(g)}(K)$.
Genauso folgt $L^{(g)}(K) \leq L^{(f)}(K)$. $\square$

10.86 Hilfssatz: Ist $\big(f, [a,b]\big)$ Parameterdarstellung von K, und sind Z, Z' Zerlegungen von $[a,b]$ mit $Z \subseteq Z'$, so gilt $L_Z(K) \leq L_{Z'}(K)$.

Beweis: Klar nach Definition von $L_Z(K)$ und Dreiecksungleichung für die Norm.



$\square$

10.87 Satz: Sei K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(f,[a,b])$. Ist $a < c < b$ und $K_1 := f([a,c]),\ K_2 := f([c,b])$, so sind K_1, K_2 mit Parameterdarstellungen $(f,[a,c]),\ (f,[c,b])$ rektifizierbare Jordan-Kurven, und es gilt

$$L(K_1) + L(K_2) \;=\; L(K).$$

Beweis: **1)** $K_1,\ K_2$ sind Jordan-Kurven, da $f\big|_{[a,b[}$ injektiv ist.

2) Zeige $L(K_1) + L(K_2) \le L(K)$: Seien $Z_1 = \{a = t_0, \ldots, t_n = c\}$, $Z_2 = \{c = s_0, \ldots, s_m = b\}$ Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$. Dann ist $Z := Z_1 \cup Z_2$ Zerlegung von $[a,b]$, und es gilt

$$L_{Z_1}(K_1) + L_{Z_2}(K_2) \;=\; L_Z(K) \;\le\; L(K).$$

$\Rightarrow$ K_1, K_2 sind rektifizierbar, und es gilt

$$L(K_1) + L(K_2) \;=\; \sup_Z L_Z(K_1) + \sup_{Z'} L_{Z'}(K_2) \;=\; \sup_{Z,Z'} \big(L_Z(K_1) + L_{Z'}(K_2)\big) \;\le\; L(K).$$

3) Zeige $L(K_1) + L(K_2) \ge L(K)$: Sei $\varepsilon > 0$ fest.
Wähle eine Zerlegung $\{t_0, \ldots, t_n\}$ von $[a,b]$ mit $L_Z(K) > L(K) - \varepsilon$.
O.B.d.A. kann $c \in Z$ angenommen werden, denn andernfalls betrachte $Z' := Z \cup \{c\}$. Dann gilt nach letztem Hilfssatz

$$L_{Z'}(K) \;\ge\; L_Z(K) \;>\; L(K) - \varepsilon.$$

Zerlege Z in zwei Zerlegungen Z_1 von $[a,c]$ und Z_2 von $[c,b]$. Dann folgt

$$L_{Z_1}(K_1) + L_{Z_2}(K_2) \;=\; L_Z(K) \;>\; L(K) - \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ $L(K_1) + L(K_2) \ge L(K) - \varepsilon$.
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $L(K_1) + L(K_2) \ge L(K)$.

$\square$

10.88 Satz: Sei K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$ und sei $K_t := f([a,t])$ mit Parameterdarstellung $\big(f,[a,t]\big)$ für $a \le t \le b$ und

$$L(t) := L(K_t) \text{ für } a \le t \le b.$$

Dann gelten:

1) L ist streng monoton wachsend,

2) L ist stetig,

3) Bild $(L) = [0, L(K)]$.

4) Falls zusätzlich K glatt ist und $f \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}^n\big)$, dann ist L differenzierbar auf $[a,b]$ mit $L'(t) = \|f'(t)\|$ für $a \le t \le b$.

Beweis: 1) Für $t \in [a,b[\,,\ h > 0,\ t+h \le b$ gilt

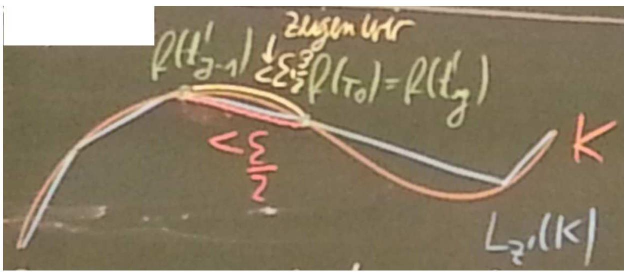
$$L(t+h) - L(t) \overset{\text{letzter}}{\underset{\text{Satz}}{=}} L(K'),\ K' = f\big([t,t+h]\big).$$

$$L(K') \ge \big\|f(t+h) - f(t+\tfrac{h}{2})\big\| + \underbrace{\big\|f(t+\tfrac{h}{2}) - f(t)\big\|}_{>0 \text{ da } K \text{ Jordan-Kurve}} > 0 \ \Rightarrow\ L(t+h) > L(t).$$

2) Schritt 1: Sei $\tau_0 \in \,]a,b]$. Zeige $\lim\limits_{t \to \tau_0 - 0} L(t) = L(\tau_0)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle Zerlegung Z mit $L_Z(K) > L(K) - \frac{\varepsilon}{2}$.
f gleichmäßig stetig (Satz 6.52) $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0\ \forall t, t' \in [a,b] : |t - t'| < \delta \Rightarrow \big\|f(t) - f(t')\big\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ergänze Z durch Zwischenstellen zu $Z' = \{t'_0, \dots, t'_m\}$, so dass

$$\max_{1 \le j \le m} |t'_j - t'_{j-1}| < \delta \text{ und } \tau_0 \in Z',\ \tau_0 = t'_J.$$

Nach letztem Hilfssatz: $L_{Z'}(K) \ge L_Z(K) > L(K) - \frac{\varepsilon}{2}$.



Setze $K_j := f\big([t'_{j-1}, t'_j]\big)$ für $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ 0 &\le L(K_J) - \underbrace{\big\|f(t'_J) - f(t'_{J-1})\big\|}_{<\varepsilon/2} \\
&\le \sum_{j=1}^{m} \Big(L(K_j) - \big\|f(t'_j) - f(t'_{j-1})\big\|\Big) \\
&= L(K) - L_{Z'}(K) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \\
\Rightarrow L(K_J) &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Für $t'_{J-1} \le t \le t'_J = \tau_0$ folgt

$$0 \overset{L \text{ monoton}}{\le} L(\tau_0) - L(t) \overset{L \text{ monoton}}{\le} L(t'_J) - L(t'_{J-1})) \;=\; L(K_J) \;<\; \varepsilon.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to \tau_0 - 0} L(t) = L(\tau_0)$.
Genauso folgt $\lim\limits_{t \to \tau_0 + 0} L(t) = L(\tau_0)$ für $\tau_0 \in [a, b[$.
Dies beweist die Stetigkeit von L auf $[a, b]$.

3) Klar

4) $L(t) \overset{\text{Satz 10.84}}{=} \int_0^t \|f'(s)\|\, \mathrm{d}s \;\wedge\; \|f'(.)\|$ stetig $\overset{\text{Hauptsatz}}{\Rightarrow}$ $L'(t) = \|f'(t)\|$ für $a < t < b$.
Mit 10.70, Teil 2) folgt $L'(t) = \|f'(t)\|$ für $a \le t \le b$. □

10.89 Definition: Sei K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f, [a, b]\big)$. Dann heißt

$$\big(g, [0, L(K)]\big) \text{ mit } g := f \circ L^{-1}$$

Bogenlängenparametrisierung von K.

10.90 Satz: **1)** Äquivalente Parameterdarstellung führen zur selben Bogenlängenparametrisierung.

2) Ist K glatt, so ist die Bogenlängenparametrisierung $g : [0, L(K)] \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar auf $[0, L(K)]$, und es gilt $\|g'(t)\| = 1$ für $0 \le t \le L(K)$. Insbesondere ist der Tangenteneinheitsvektor im Punkt $g(s)$ gegeben durch $T_g(s) = g'(s)$.

Beweis: **1)** Klar nach Satz 10.85.

2) Sei $\big(f, [a, b]\big)$ eine C^1-Parametrisierung von K mit $f'(t) \neq 0$ auf $[a, b]$.
Satz 10.88 $\Rightarrow$ $L : [a, b] \to [0, L(K)]$ ist bijektiv und differenzierbar.
Satz 6.69 $\Rightarrow$ L^{-1} ist stetig.
Satz 7.15 $\Rightarrow$ L^{-1} ist differenzierbar in $]0, L(K)[$ mit

$$(L^{-1})'(s) \;=\; \frac{1}{L'\big(L^{-1}(s)\big)} \overset{10.88}{=} \frac{1}{\big\|f'\big(L^{-1}(s)\big)\big\|}\,.$$

Da L^{-1} stetig auf $[0, L(K)]$ und $(L^{-1})'$ stetig fortsetzbar auf $[0, L(K)]$ ist, folgt mit Bemerkung 10.70, dass L^{-1} auf $[0, L(K)]$ differenzierbar ist. Dann ist auch $g = f \circ L^{-1}$ differenzierbar, und es folgt

$$\|g'(s)\| \overset{\text{Kettenregel}}{=} \left\|(L^{-1})'(s) \cdot f'\big(L^{-1}(s)\big)\right\| = \frac{1}{\left\|f'\big(L^{-1}(s)\big)\right\|} \cdot \left\|f'\big(L^{-1}(s)\big)\right\| = 1$$

für $0 \leq s \leq L(K)$. □

10.91 Beispiel: Sei $r > 0$ fest, $f(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$.

$\Rightarrow$ $K = f([0, 2\pi])$ ist Kreis um $(0,0)$ mit Radius r.

$L(t) = \displaystyle\int_0^t \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^t r\,\mathrm{d}t = rt \;\Rightarrow\; L^{-1}(s) = \frac{1}{r}s.$

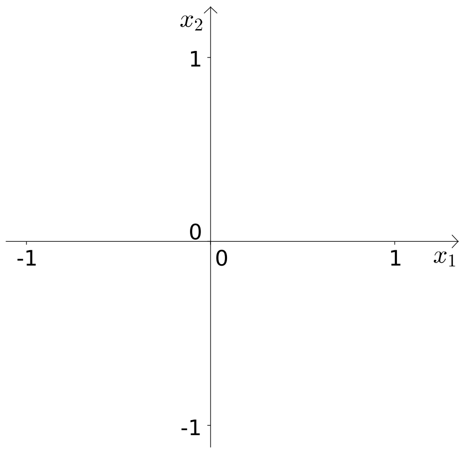
$\Rightarrow$ Bogenlängenparametrisierung von K:

$$g(s) = \begin{pmatrix} r\cos\frac{s}{r} \\ r\sin\frac{s}{r} \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq s \leq L(K) = 2\pi r.$$

10.12 Die trigonometrischen Funktionen

10.92 Satz: Der Umfang des Einheitskreises K ist

$$L(K) = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$



Beweis: $K' :=$ Viertelkreis im 1. Quadranten,

Parameterdarstellung $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$.

f ist als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen stetig.

Ist K' rektifizierbar?

Betrachte K_b mit Parametrisierung $\big(f, [0, b]\big)$ für festes $b \in \,]0, 1[$.

K_b ist glatt, also rektifizierbar, und

$$L(K_b) = \int_0^b \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}t = \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Für $0 \leq t < 1$ gilt $0 \leq t^2 < t < 1 \;\Rightarrow\; 0 < 1-t < 1-t^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ konvergiert $\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ konvergiert.

$\Rightarrow$ $L(K_b) \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ für $0 < b < 1$.

Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ Zerlegung von $[0,1]$. Dann ist $Z' = \{t_0, \ldots, t_{n-1}\}$ Zerlegung von $[0, t_{n-1}]$, und es folgt

$$\begin{aligned} L_Z(K) &= \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \left\| f(t_j) - f(t_{j-1}) \right\|}_{=L_{Z'}(K_{t_{n-1}})} + \Big\| \underbrace{f(t_n)}_{=f(1)=0} - f(t_{n-1}) \Big\| \\ &\leq L(K_{t_{n-1}}) + \underbrace{\left\| f(t_{n-1}) \right\|}_{\leq 2} \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t + 2 \end{aligned}$$

Also ist K' rektifizierbar. Aus Satz 10.88 folgt

$$L(K') = \lim_{b \to 1-0} L(K_b) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t.$$

Genauso folgt, dass die Länge des Viertelkreises K'' im linken Quadranten durch das uneigentliche Integral

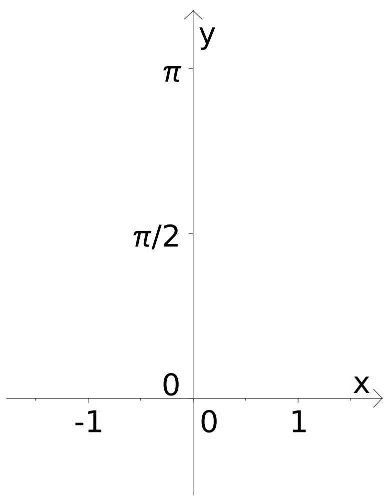
$$L(K'') = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t$$

gegeben ist. Mit der Additivität der Bogenlänge (Satz 10.87) folgt die Behauptung. □

10.93 Definition: $\pi := \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t.$

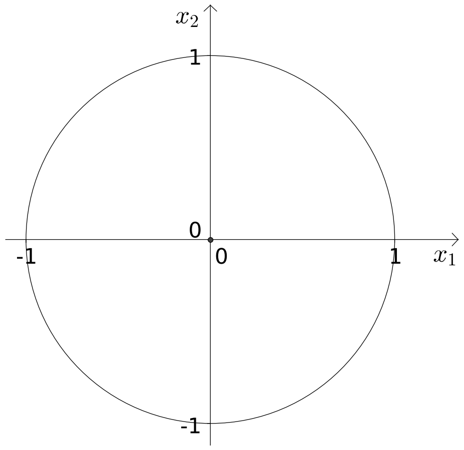
10.94 Definition: Für $-1 \leq x \leq 1$ sei

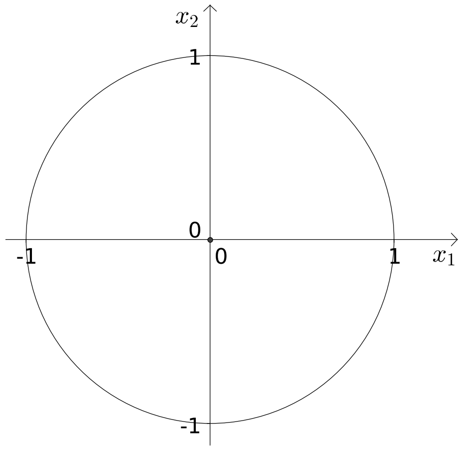
$$l(x) := \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t = \pi - \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t.$$



10.95 Satz:
- $l(-1) = \pi, \; l(1) = 0,$
- l ist stetig,
- l ist differenzierbar in $]-1,1[$ mit $l'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- l ist streng monoton fallend,
- $l : [-1,1] \to [0,\pi]$ ist bijektiv.

10.96 Definition: Für $t \in [0,\pi]$ ist $\cos(t) := l^{-1}(t)$, $\sin(t) := \sqrt{1-\cos^2(t)}$.





10.97 Satz: $\sin, \cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ sind stetig und differenzierbar auf $[0, \pi]$ mit

$$\sin'(t) = \cos(t),\ \cos'(t) = -\sin(t).$$

Beweis: Nach Satz 6.69 ist $\cos = l^{-1}$ stetig. Nach Satz 7.15 ist $\cos = l^{-1}$ differenzierbar in $]0, \pi[$ mit

$$\cos'(t) \;=\; (l^{-1})'(t) \;=\; \frac{1}{l'(x)}\bigg|_{x=l^{-1}(t)} \;=\; \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}\Bigg|_{x=\cos(t)} \;=\; -\sqrt{1-\cos^2(t)} \;=\; -\sin(t).$$

Aus der Kettenregel:

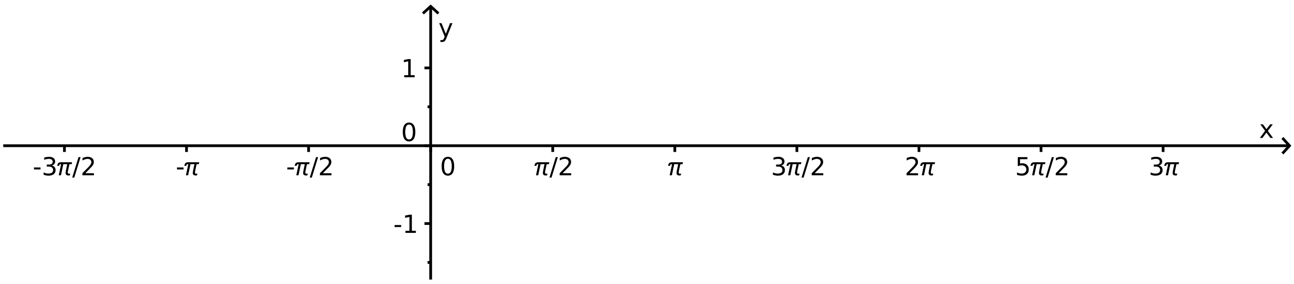
$$\sin'(t) \;=\; \sqrt{1-\cos^2(t)}\,' \;=\; \frac{1}{2\sqrt{1-\cos^2(t)}} \cdot (-2)\cos(t)\big(-\sin(t)\big) \;=\; \cos(t).$$

Da $\sin,\ \cos$ stetig und die Ableitungen stetig fortsetzbar auf $[0, \pi]$ sind, folgt mit Bemerkung 10.70, dass $\sin,\ \cos$ auf $[0, \pi]$ differenzierbar sind. $\square$

10.98 Fortsetzungen: **1)** Für $t \in [-\pi, 0[: \cos(t) := \cos(-t),\ \sin(-t) := -\sin(t).$

2) Für $t \in \mathbb{R}$: Wähle $k \in \mathbb{Z}$, so dass $t - 2k\pi \in [-\pi, \pi]$ und setze

$$\sin(t) := \sin(t - 2k\pi),\ \cos(t) := \cos(t - 2k\pi).$$



10.99 Satz: 1) $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig und differenzierbar mit

$$\sin'(t) = \cos(t),\ \cos'(t) = -\sin(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

2) $\forall t \in \mathbb{R} : \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$. Insbesondere $|\sin t|, |\cos t| \leq 1$ für $t \in \mathbb{R}$.

10.100 Satz: Es gilt $\sin, \cos \in C^k(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ (schreibe $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$) und

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \text{ für } x \in \mathbb{R}, \\ \sin(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Beweis: 1) Klar.

2) Berechne das Taylorpolynom: Es gilt

$$\begin{aligned} \cos^{(n)}(x) &= \begin{cases} (-1)^{n/2}\cos(t), & n \text{ gerade} \\ (-1)^{(n+1)/2}\sin(t), & n \text{ ungerade} \end{cases} \\ \Rightarrow \cos^{(n)}(0) &= \begin{cases} (-1)^{n/2}, & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \\ \Rightarrow T_{2n}(0,x) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \end{aligned}$$

Restglied (Lagrange):

$$\big|R_{2n}(0,x)\big| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\sin(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

$\Rightarrow \cos(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_{2n}(0,x)$.

3) Genauso für die Sinusfunktion. □

10.101 Additionstheoreme: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= (\sin x)\cos y + (\cos x)\sin y, \\ \cos(x+y) &= (\cos x)\cos y - (\sin x)\sin y. \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\sin(2x) = 2(\sin x)\cos x,\ quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Beweis: Für festes $z \in \mathbb{R}$ betrachte

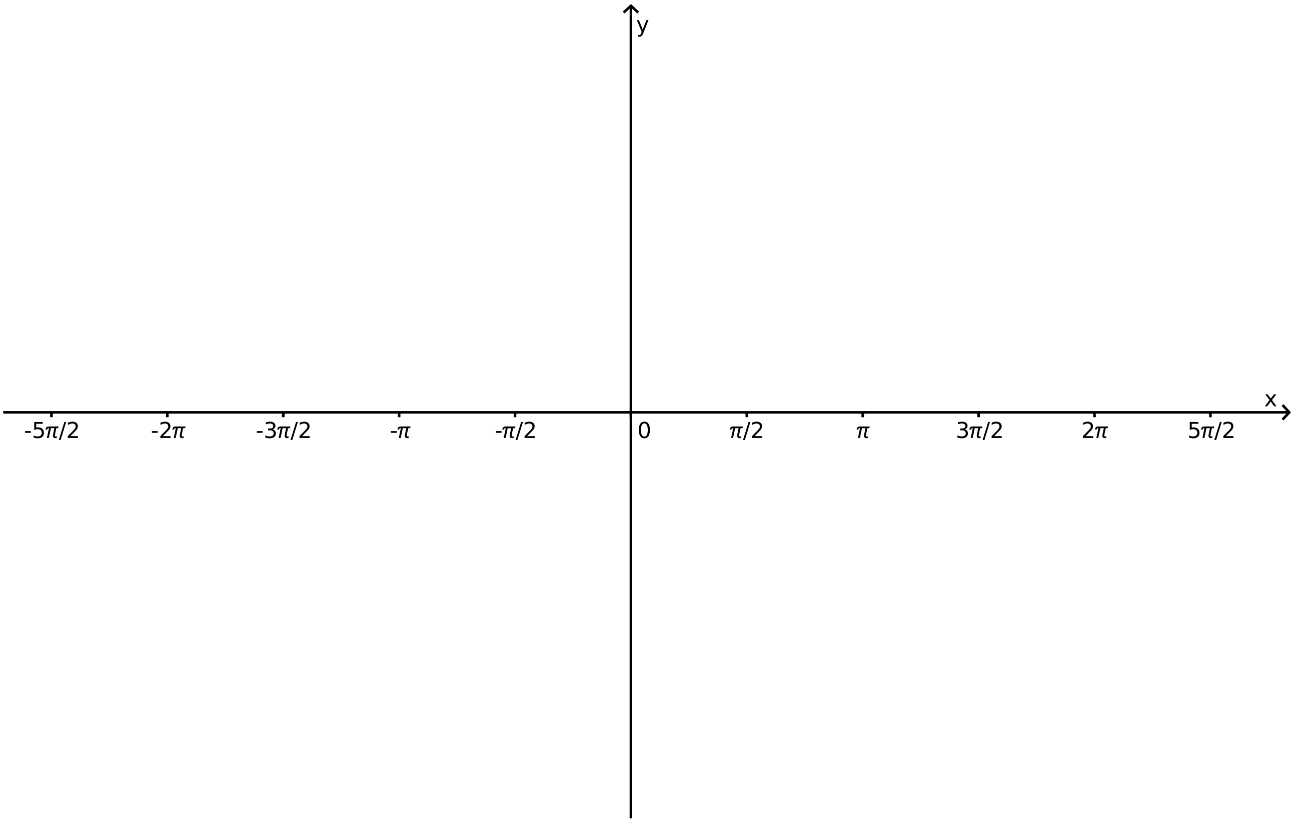
$$\begin{aligned} f(t) &:= (\sin t)\cos(z-t) + (\cos t)\sin(z-t) \\ \Rightarrow f'(t) &= (\cos t)\cos(z-t) + (\sin t)\sin(z-t) - (\sin t)\sin(z-t) - (\cos t)\cos(z-t) \;=\; 0 \\ \Rightarrow f(t) &= \text{konstant} \;=\; f(0) \;=\; \sin z. \end{aligned}$$

$z := x+y,\ t := x \ \Rightarrow\ \sin(x+y) \;=\; (\sin x)\cos(x+y-x) + (\cos x)\sin(x+y-x).$

Für den Kosinus: Dasselbe mit $f(t) := (\cos t)\cos(z-t) - (\sin t)\sin(z-t)$. $\square$

10.102 Definition: Tangensfunktion: $\tan(x) := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,
Kotangensfunktion: $\cot(x) := \dfrac{\cos x}{\sin x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

10.103 Satz: Die Tangensfunktion ist stetig, differenzierbar mit $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, streng monoton wachsend auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, und es gilt $\mathrm{Bild}(\tan) = \mathbb{R}$.
Die Cotangensfunktion ist stetig, differenzierbar mit $\cot'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2(x)} = -1 + \cot^2(x)$, streng monoton fallend auf $]0, \pi[$, und es gilt $\mathrm{Bild}(\cot) = \mathbb{R}$.



10.104 Definition: Arkussinusfunktion: $\arcsin := \left(\sin\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
Arkuskosinusfunktion: $\arccos := \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$,

Arkustangensfunktion: $\arctan := \left(\tan\big|_{]-\pi/2,\pi/2[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\,,$
Arkuskotangensfunktion: $\operatorname{arccot} := \left(\cot\big|_{]0,\pi[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to \,]0, \pi[\,.$

10.105 Bemerkungen: 1) Es gilt $\cos\big|_{[0,\pi]} = l^{-1} \;\Rightarrow\; \arccos = l.$

2) Es gelten $\arcsin = \dfrac{\pi}{2} - \arccos,\ \operatorname{arccot} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan.$

10.106 Satz: Die inversen trigonometrischen Funktionen sind stetig und im Inneren des jeweiligen Definitionsbereichs differenzierbar mit

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } x \in \,]-1,1[\,, \\
\arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } x \in \,]-1,1[\,, \\
\arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}, \\
\operatorname{arccot}'(x) &= \frac{-1}{1+x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Beweis: $\arccos'(x) = l'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$
$\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(y)}\Big|_{y=\arctan x} = \dfrac{1}{1+\tan^2(y)}\Big|_{y=\arctan x} = \dfrac{1}{1+x^2}.$
Rest klar.

$\square$

10.13 Lokales Verhalten von Kurven

10.107 Erinnerung: Satz von Taylor: $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}(]a,b[\to \mathbb{R})$, $x_0 \in \,]a,b[\,$. Dann

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O\left(|x-x_0|^{n+1}\right) \text{ für } x \to x_0,$$

denn wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \subseteq \,]a,b[$. Dann

$$\left|R_n(x_0,x)\right| \overset{\text{Lagrange}}{=} \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \underset{\Rightarrow \xi \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]}{\overset{x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]}{\leq}} \max_{[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \cdot |x-x_0|^n.$$

10.108 Taylorentwicklung vektorwertiger Funktionen: Sei $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}(]a,b[\to \mathbb{R}^d)$, $t_0 \in \,]a,b[\,$. Dann

$$\begin{aligned}
\forall j = 1, \ldots d : f_j(t) &= f_j(t_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f_j^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + O\left(|t-t_0|^{n+1}\right) \\
\Rightarrow\ f(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + O\left(|t-t_0|^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Speziell $n = 2$:

$$f(t) \;=\; \underbrace{\underbrace{f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0)}_{\text{Tangente, Schmieggerade}} + \frac{(t-t_0)^2}{2}f''(t_0)}_{\text{Schmiegparabel}} + O\left(|t-t_0|^3\right)$$

10.109 Satz: Sei K glatte Kurve mit Parameterdarstellung $f \in C^n([a,b] \to \mathbb{R}^d)$. Dann gilt für die Bogenlängenparametrisierung $g = f \circ L^{-1}$:

$$g \in C^n([0, L(K)] \to \mathbb{R}^d),\ \forall s \in [0, L(K)] : \|g'(s)\| = 1 \ \wedge\ g''(s) \perp g'(s).$$

Beweis: Beweis von 10.90: $\left(L^{-1}\right)'(s) = \dfrac{1}{\left\|f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\|}$ für $0 \le s \le L(K)$, L^{-1} ist stetig

$\overset{f' \neq 0}{\Rightarrow}\ \left(L^{-1}\right)'$ ist stetig.

$$\begin{aligned}
\overset{\text{falls } n\geq 2}{\Rightarrow} \quad & \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s} f'\left(L^{-1}(s)\right) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(L^{-1}\right)'(s) f''\left(L^{-1}(s)\right) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\left\|f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\|^2 \;=\; \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\left\langle f'\left(L^{-1}(s)\right), f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\rangle \\
& = \left\langle \left(L^{-1}\right)'(s) f''\left(L^{-1}(s)\right), f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\rangle + \left\langle f'\left(L^{-1}(s)\right), \left(L^{-1}\right)'(s) f''\left(L^{-1}(s)\right)\right\rangle \\
& = 2\left(L^{-1}\right)'(s)\left\langle f''\left(L^{-1}(s)\right), f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\rangle \\
\Rightarrow \quad & \left(L^{-1}\right)''(s) \;=\; \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\left(\left\|f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\|\right)^{-1/2} \\
& = -\frac{1}{2}\left(\left\|f'\left(L^{-1}(s)\right)\right\|\right)^{-3/2} \cdot 2\left(L^{-1}\right)'(s)\left\langle\left(f'' \circ L^{-1}\right)(s), f' \circ L^{-1}(s)\right\rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \left(L^{-1}\right)''$ ist stetig.

Induktion $\Rightarrow\ L^{-1} \in C^n([0, L(K)] \to \mathbb{R}) \ \Rightarrow\ g = f \circ L^{-1} \in C^n([0, L(K)] \to \mathbb{R}^d)$

10.90: $\forall s \in [0, L(K)] : \|g'(s)\| = 1 \ \overset{\text{Übungen}}{\Rightarrow}\ \forall s \in [0, L(K)] : \langle g''(s), g'(s)\rangle = 0.$ $\square$

10.110 Anwendung: Sei K glatte Kurve mit Parameterdarstellung $f \in C^3([a,b] \to \mathbb{R}^d)$, $g = f \circ L^{-1}$ die Bogenlängenparametrisierung.

$$\Rightarrow\ g(s) = g(s_0) + (s-s_0)g'(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2}g''(s_0) + O\left(|s-s_0|^3\right) \text{ für } s \to s_0.$$

Die Schmiegparabel im Punkt $g(s_0)$ ist durch

$$h(s) = g(s_0) + (s-s_0)g'(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2}g''(s_0) \text{ für } s \in \mathbb{R}$$

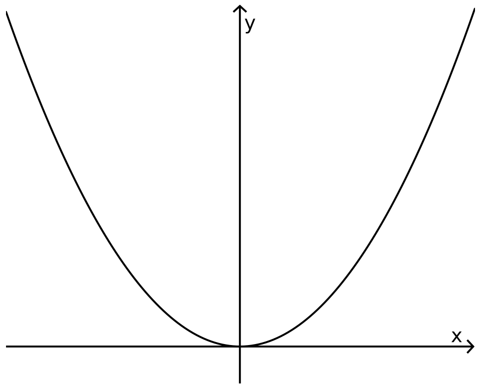
gegeben, falls $\{g'(x_0), g''(s_0)\}$ linear unabhängig. Diese Parabel liegt in der Ebene

$$E \;:=\; \left\{x = g(s_0) + \alpha g'(s_0) + \beta\frac{1}{\|g''(s_0)}\|g''(s_0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Bezüglich des Koordinatensystems mit Ursprung in $g(s_0)$ und den orthonormalen Koordinatenvektoren $e_1 := g'(s_0)$, $e_2 := \dfrac{1}{\|g''(s_0)\|} g''(s_0)$ hat $K' = \text{Bild}\,(h) = h(\mathbb{R})$ die Darstellung

$$K' \;=\; \big\{(x_1', x_2') : x_2' = \frac{1}{2}\|g''(s_0)\| x_1'^2\big\}.$$

10.111 Scheitelkrümmungskreis einer Parabel:



Sei $a > 0$ und $K := \{(x,y) : y = \frac{a}{2}x^2,\ x \in \mathbb{R}\}$.
Suche größten Kreis in der oberen Halbebene, der K in $(0,0)$ berührt.
Symmetrie $\Rightarrow$ Kreismittelpunkt $(0, y_0)$ mit $y_0 > 0$.
Ansatz für die Kreisgleichung:

$$x^2 + (y - y_0)^2 = r^2 = y_0^2$$
$$\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 - 2yy_0 = 0$$

Schnitt mit Parabel: Setze $x^2 = \frac{2}{a}y$ in Kreisgleichung ein:

$$\Rightarrow\; \frac{2}{a}y + y^2 - 2yy_0 = 0 \;\Leftrightarrow\; y\left(2\left(\frac{1}{a} - y_0\right) + y\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0 \;\vee\; y = -2\left(\frac{1}{a} - y_0\right).$$

Der Scheitelkrümmungskreis ist der Kreis im Grenzfall $y_0 = \dfrac{1}{a}$.
Der Krümmungsradius ist dann $r = \dfrac{1}{a}$.
Anwendung: Die Parabel $K = \text{Bild}\,(h)$ mit h aus 10.110 hat im Scheitel $g(s_0)$ den Krümmungsradius $r = \dfrac{1}{\|g''(s_0)\|}$.

10.112 Definition: Sei K glatte Kurve mit Bogenlängenparametrisierung $g \in C^2\big([0, L(K)] \to \mathbb{R}^d\big)$. Für $0 \le s \le L(K)$ heißt $\kappa(s) := g''(s)$ **Krümmungsvektor** von K im Punkt $g(s)$, $\|\kappa(s)\|$ heißt **Krümmung** von K in $g(s)$, $\dfrac{1}{\|\kappa(s)\|}$ heißt **Krümmungsradius** der Kurve K in $g(s)$.

10.113 Schraubenlinie: Seien $a, b > 0$ und $f(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 4\pi]$

$$\Rightarrow \ f'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix}, \ \|f'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad .$$

$$s = L(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t = t\sqrt{a^2+b^2} \ \Rightarrow \ t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Bogenlängenparametrisierung: $g(s) = \begin{pmatrix} a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$ für $s \in [0, 4\pi\sqrt{a^2+b^2}]$.

$$\Rightarrow \ g'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}, \ \kappa(s) = g''(s) = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Krümmungsradius $r = \dfrac{1}{\|\kappa(s)\|} = \dfrac{a^2+b^2}{a}$.

10.114 Formeln zur Berechnung: Sei $f \in C^2([a,b] \to \mathbb{R}^d)$ Parameterdarstellung der glatten Kurve K. Dann gelten für die Krümmung im Punkt $f(t) = g(L(t))$:

$$\begin{aligned} d = 3: \ \big\|\kappa\big(L(t)\big)\big\| &= \frac{\|f''(t) \times f'(t)\|}{\|f'(t)\|^3}, \\ d = 2: \ \big\|\kappa\big(L(t)\big)\big\| &= \frac{|f_1''(t)f_2'(t) - f_1'(t)f_2''(t)|}{(f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2)}. \end{aligned}$$

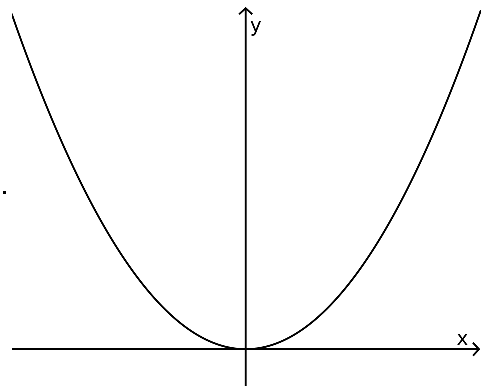
Im Fall $d = 2$ gilt für den Graph $K = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in D(f)\big\}$ einer Funktion f mit der speziellen Parametrisierung $x_1(t) = t, \ x_2(t) = f(t)$:

Krümmung im Punkt $(t, f(t))$: $\big\|\kappa\big(L(t)\big)\big\| = \dfrac{\big|f''(t)\big|}{\big(1 + f'(t)^2\big)^{3/2}}$.

10.115 Beispiel: Für die Parabel $y = \frac{a}{2}x^2$ mit $a > 0$ gilt

$$\big\|\kappa\big(L(t)\big)\big\| = \frac{a}{\big(1 + (ax)^2\big)^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ Krümmungsradius im Punkt $(x, \frac{a}{2}x^2) : r = \dfrac{\big(1+(ax)^2\big)^{3/2}}{a}$.



10.14 Einführung in die numerische Integration

Problem: $\displaystyle\int_a^b f$ nicht explizit berechenbar (z.B. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$).

1. Idee: Wähle **Stützstellen** $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, berechne Polynom P_n durch $(x_j, f(x_j))$ und hoffe $\displaystyle\int_a^b f \approx \int_a^b P_n$.

10.116 Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Das Polynom P_n n-ten Grades mit

$$P(x_j) \;=\; f(x_j), \qquad \text{für } j = 0, \ldots, n$$

heißt **Interpolationspolynom** zu f und $\{x_0, \ldots, x_n\}$.

10.117 Existenz: Sei $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Bestimme die Koeffizienten a_j als Lösung von

$$P(x_j) = f(x_j) \;\Leftrightarrow\; a_0 + a_1 x_j + \ldots + a_n x_j^n = f(x_j) \qquad (j = 0, \ldots, n).$$

Dies ist ein LGS mit $n+1$ Gleichungen für $n+1$ Unbekannte.

Aus dem Identitätssatz 4.34 wissen wir: Es gibt höchstens eine Lösung. Für unser LGS bedeutet das: Die Koeffizientenmatrix hat Höchstrang. Oder anders

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} \;\neq\; 0.$$

$\overset{\text{Lineare Algebra}}{\Rightarrow}$ Die Koeffizientenmatrix ist invertierbar

$\Rightarrow$ Es existiert eine eindeutige Lösung

10.118 Satz: Sei $f \in C^{n+1}([a,b] \to \mathbb{R})$, P_n das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ und $R_n := f - P_n$. Dann gibt es ein $\xi \in]a,b[$, so dass

$$R_n(x) \;=\; \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Insbesondere kann der Fehler R_n abgeschätzt werden durch

$$|R_n(x)| \;\leq\; \frac{1}{(n+1)!} \max_{t \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|.$$

Beweis: Sei $\omega(x) := \displaystyle\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = x^{n+1} + c_n x^n + \ldots + c_0 \;\Rightarrow\; \omega^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

Für festes $x \in [a,b],\; x \neq x_0, \ldots, x_n$ betrachte

$$\varphi(t) \;:=\; R_n(t) - \frac{R_n(x)}{\omega(x)}\, \omega(t).$$

Wegen $R_n(x_j) = 0,\ \omega(x_j) = 0$ für $j = 0, \ldots, n$ gilt

$$\varphi(x_0) = 0,\ \ldots,\ \varphi(x_n) = 0,\ \varphi(x) = 0.$$

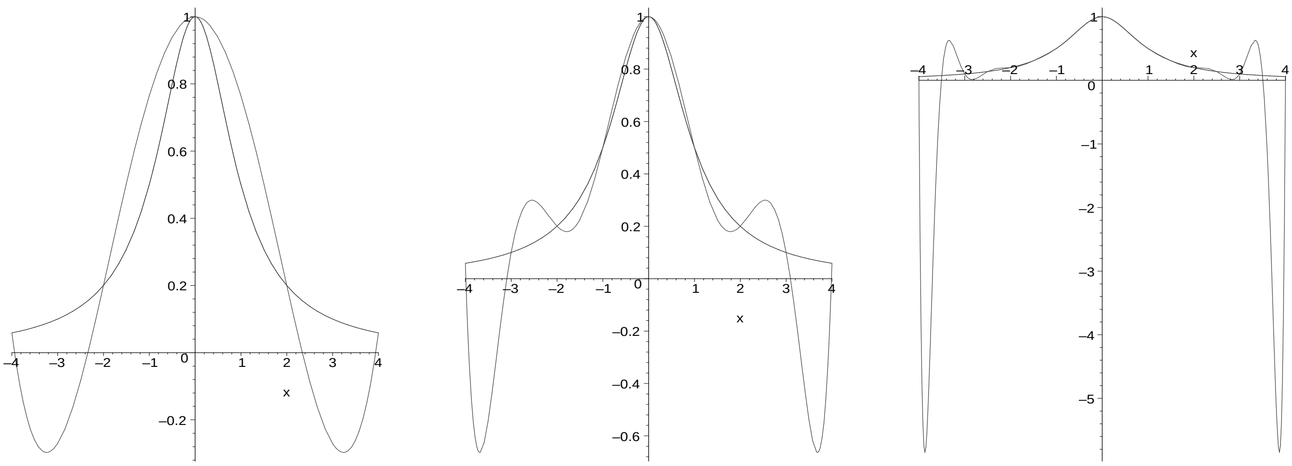
Also hat φ mindestens $n+2$ verschiedene Nullstellen in $[a, b]$.

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Satz von Rolle}}{\Rightarrow} && \varphi' \text{ hat mindestens } n+1 \text{ verschiedene Nullstellen in }]a,b[\\
&\Rightarrow && \varphi'' \text{ hat mindestens } n \text{ verschiedene Nullstellen in }]a,b[\\
& && \quad\vdots \\
&\Rightarrow && \varphi^{(n+1)} \text{ hat mindestens eine Nullstelle in }]a,b[\\
& && \text{d.h. } \exists \xi \in]a,b[: 0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = \underbrace{R_n^{(n+1)}(\xi)}_{=(f-P_n)^{(n+1)}=f^{(n+1)}} - \frac{R_n(x)}{\omega(x)}\,(n+1)! \\
&\Rightarrow && f^{(n+1)}(\xi) = \frac{R_n(x)}{\omega(x)}\,(n+1)!
\end{aligned}$$

□

10.119 Die große Enttäuschung: $f : [-4, 4] \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$:

5 Stützstellen | 9 Stützstellen | 17 Stützstellen



Mit wachsender Anzahl der Stützstellen wird die Approximation schlechter.

Man beschränkt sich deshalb auf Polynome kleiner Ordnung.

Zunächst der Fall $n = 1$, d.h. f wird durch ein Polynom 1. Grades („Gerade") approximiert:

10.120 Satz: Sei $f \in C^2([a, b] \to \mathbb{R})$. Dann gilt die **Trapezregel**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + R \quad \text{mit } |R| \;\le\; \frac{(b-a)^3}{12}\,\|f''\|_\infty\,.$$

Beweis: $P = f(a) + \dfrac{x-a}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big)$

$$\begin{aligned}
\int_a^b P &= f(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2(b-a)}\big(f(b) - f(a)\big) \\
&= \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big) \\
|R| &\overset{10.118}{\leq} \frac{1}{2!} \max|f''(t)| \underbrace{\int_a^b |x-a|\,|x-b| \, \mathsf{d}x}_{=\frac{(b-a)^3}{6}}.
\end{aligned}$$

□

Der Fall $n = 2$, dh. f wird durch ein Polynom 2. Grades („Parabel“) approximiert:

10.121 Satz: Es sei $f \in C^4([a,b] \to \mathbb{R})$. Dann gilt die **Keplersche Fassregel** (auch Simpson-Formel):

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}x = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + R \text{ mit } |R| \leq \frac{(b-a)^5}{90}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty.$$

Beweis: Siehe Übungen □

2. Idee (Summation): Unterteile $[a,b]$ in Teilintervalle $[a, a+h], [a+h, a+2h], \ldots, [b-h, b]$, wende in jedem Teil die Trapezregel an.

10.122 Satz: Sei $f \in C^2([a,b])$, $h := \dfrac{b-a}{k}$ mit einem $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &= T(h) + R := \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 2f(b-h) + f(b)\right) + R, \\
|R| &\leq (b-a)\frac{h^2}{12}\|f''\|_\infty
\end{aligned}$$

(**summierte Trapezregel**).

Beweis: $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} f = \sum_{j=1}^k \frac{x_j - x_{j-1}}{2}\big(f(x_j) + f(x_{j-1})\big) + R = \frac{h}{2}\sum_{j=1}^k \big(f(x_j) + f(x_{j-1})\big) + R$

$$|R| \leq \sum_{j=1}^k \frac{(x_j - x_{j-1})^3}{12}\|f''\|_\infty = k\frac{h^3}{12}\|f''\|_\infty = (b-a)\frac{h^2}{12}\|f''\|_\infty.$$

□

3. Idee Romberg-Extrapolation (genial!): Beweise eine genauere Fehlerabschätzung

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}x \;=\; T(h) + c_1\,h^2 + c_2\,h^4 + \ldots + h^{2k}\cdot\rho(h)$$

mit beschränkten $\rho(h)$ für $h \downarrow 0$ (Taylorentwicklung).

$$\Rightarrow\;\int_a^b f \;=\; T\left(\frac{h}{2}\right) + c_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{h}{2}\right)^{2k}\cdot\rho\left(\frac{h}{2}\right).$$

Subtraktion der ersten Abschätzung von 4-mal der zweiten eliminiert den 1. Fehlerterm:

$$3\int_a^b f \;=\; 4\,T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) + c_2\left(\frac{4}{16}-1\right)h^4 + \ldots.$$

Also Verfahren:

$$\begin{array}{lllllllll}
T_0 & := & T(b-a) & & & & & & \\
T_1 & := & T\left(\dfrac{b-a}{2}\right) & T_1^{(1)} & := & \dfrac{4\,T_1 - T_0}{3} & & & \\
T_2 & := & T\left(\dfrac{b-a}{4}\right) & T_2^{(1)} & := & \dfrac{4\,T_2 - T_1}{3} & T_2^{(2)} & := & \dfrac{4^2\,T_2^{(1)} - T_1^{(1)}}{4^2-1} \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

Dieses Verfahren liefert gute Ergebnisse, wenn f genügend oft differenzierbar ist.

11 Differentialrechnung II

11.1 Normierte Räume

11.1 Erinnerung: Sei V ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ heißt **Norm** auf V, wenn für $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\alpha \in \mathbb{C}$ gelten:

Positivität: $\|x\| \geq 0$,

Definitheit: $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ (= Nullelement des Vektorraums),

Homogenität: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(V, \|.\|)$ heißt **normierter Vektorraum**.

11.2 Beispiele: **1)** $V = \mathbb{R}^d$, $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2 \right)^{1/2}$.

2) $V = C\big([a,b] \to \mathbb{R}\big)$, $\|f\|_\infty = \max\limits_{x \in [0,1]} \big|f(x)\big|$.

3) $V = C\big([a,b] \to \mathbb{R}\big)$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x) \mathsf{d}x \right)^{1/2}$.

Zur $\triangle$-Ungleichung:

$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) \, \mathsf{d}x$ definiert ein Skalarprodukt auf V mit $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

$$\Rightarrow \;\|f + g\|^2 \;=\; \langle f + g . f + g \rangle \;=\; \underbrace{\langle f, f \rangle}_{=\|f\|^2} + \underbrace{2 \langle f, g \rangle}_{\leq 2\|f\|\cdot\|g\| \text{ (CSB)}} + \underbrace{\langle g, g \rangle}_{=\|g\|^2} \;\leq\; \big(\|f\| + \|g\|\big)^2.$$

11.2 Stetigkeit

11.3 Erinnerung: Seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume, $f : M_1 \supseteq D \to M_2$ und $x_0 \in D$. f heißt stetig in x_0, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta_\varepsilon > 0 \;\forall x \in D : d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

oder äquivalent

$$\forall (x_n) \text{ Folge in } D : x_n \to x_0 \text{ bezüglich } d_1 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \text{ bezüglich } d_2.$$

Speziell: $(V, \|.\|_v)$, $(W, \|.\|_W)$ normierte Räume, $f : V \supseteq D \to W$ ist stetig in $x_0 \in D$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta_\varepsilon > 0 \;\forall x \in D : \|x - x_0\|_V < \delta_\varepsilon \Rightarrow \big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W < \varepsilon$$

$$\text{bzw. } \forall (x_n) \text{ Folge in } D : \|x_n - x_0\|_V \to 0 \Rightarrow \|f(x_n) - f(x_0)\|_W \to 0.$$

11.4 Satz: Sei $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ linear, d.h.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

Dann ist L stetig.

Beweis: LAAG I: $\exists$Matrix $A \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d : L(x) = Ax$, d.h.

$$L_k(x) \ = \ \sum_{j=1}^{d} a_{kj} x_j \text{ für } k = 1, \dots, m.$$

Ist nun (x_n) Folge in $\mathbb{R}^d$, $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}^d \ \Rightarrow \ \forall j = 1, \dots, d : (x_n)_j \to (x_0)_j$

$\Rightarrow \ \forall k = 1 \dots m : L_k(x_n) \ = \ \sum_{j=1}^{d} a_{kj}(x_n)_j \ \to \ \sum_{j=1}^{d} a_{kj}(x_0)_j \ = \ L_k(x_0)$

$\Rightarrow \ L(x_n) \to L(x_0)$, d.h. L ist stetig in x_0.

$\overset{x_0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \ L$ ist stetig.

□

11.5 Beispiel: $V = C\big([0,1] \to \mathbb{R}\big), \ \|f\|_v = \|f\|_2,$

$W = C\big([0,1] \to \mathbb{R}\big), \ \|f\|_v = \|f\|_\infty,$

$\mathrm{Id} : V \to W : f \mapsto f$ ist linear und nicht stetig in 0

($0 = N : x \to 0$ ist das Nullelement von V)

Betrachte $f_n(x) := x^n$ für $0 \leq x \leq 1$.

$$0 \ \leq \ \|f_n - N\|_V^2 \ = \ \int_0^1 \underbrace{\big(f_n(x) - N(x)\big)^2}_{=x^{2n}} \,\mathrm{d}x \ = \ \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\Big|_{x=0}^{1} \ = \ \frac{1}{2n+1} \ \to \ 0$$

$\Rightarrow \ f_n \to N$ in V.

Aber $\neg\big(L(f_n) \to L(N)$ in $W\big)$:

$$\big\|L(f_n) - L(N)\big\|_W \ = \ \max_{[0.1]} \underbrace{\big|f_n(x) - N(x)\big|}_{=|x^n|} \ = \ 1.$$

11.6 Satz: Sei $L : V \to W$ linear. Dann gilt

$$\forall x_0 \in V : L \text{ ist stetig in } x_0 \ \Leftrightarrow \ L \text{ ist stetig in } x_0 = 0$$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Trivial (Spezialisierung)

„$\Leftarrow$“: Seien $x_0 \in V$ und (x_n) Folge in V mit $x_n \to x_0$. Dann gilt $\|x_n - x_0\|_V \to 0$ und

$$L(x_n) \ = \ L(x_n - x_0 + x_0) \ = \ L(\underbrace{x_n - x_0}_{\to 0}) + L(x_0) \ \overset{L \text{ stetig in } 0}{\to} \ \underbrace{L(0)}_{=0} + L(x_0) \ = \ L(x_0).$$

□

11.7 Definition: Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ heißt **beschränkt**, falls

$$\exists c > 0 \ \forall x \in V : \|L(x)\|_W \leq c\|x\|_V.$$

11.8 Stetig = Beschränkt: Für eine lineare Abbildung $L : V \to W$ sind äquivalent

(i) L ist stetig.

(ii) L ist beschränkt.

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Kontraposition, zeige $\neg$(ii) $\Rightarrow$ $\neg$(i):
Sei L nicht beschränkt, d.h.

$$\begin{aligned} & \forall c > 0 \ \exists x \in V : \|L(x)\|_W > c\|x\|_V \\ \Rightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in V : \|L(x_n)\|_W > n\|x_n\|_V \end{aligned}$$

Setze $y_n := \dfrac{1}{n\|x_n\|_V} x_n$. Dann

$$\begin{aligned} \|y_n\|_V &= \frac{1}{n\|x_n\|_V}\|x_n\|_V = \frac{1}{n} \to 0 \\ \|L(y_n)\| &= \left\| \frac{1}{n\|x_n\|} L(x_n) \right\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \, \|L(x_n)\| > \frac{1}{n\|x_n\|} n\|x_n\| = 1. \end{aligned}$$

Das bedeutet: $y_n \to 0$, aber $\neg\big(L(y_n) \to 0\big)$. D.h. L ist in $x_0 = 0$ unstetig, also überall unstetig.
$\Rightarrow$ $\neg$(i).

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Zeige: L ist stetig in $x_0 = 0$. Sei (x_n) Folge in V mit $x_n \to 0$. Dann

$$0 \ \leq \ \|L(x_n)\| \ \leq \ c\|x_n\| \ \to \ 0.$$

Also konvergiert $L(x_n)$ gegen 0. L ist somit stetig in $x_0 = 0$.
$\overset{11.6}{\Rightarrow}$ (i). $\square$

11.9 Satz: Seien u, V, W normierte Räume.

1) Sind $f, g : V \to W$ linear und beschränkt und $\alpha \in \mathbb{R}$ (oder $\alpha \in \mathbb{C}$), dann sind $f + g, \alpha f : V \to W$ linear und beschränkt.

2) Sind $f : V \to W$ und $g : W \to U$ linear und beschränkt, dann ist auch $g \circ f : V \to U$ linear und beschränkt.

Beweis: **1)** Selber

2)
$$\begin{aligned} (f \circ g)(\alpha x + \beta y) &= f\big(g(\alpha x + \beta y)\big) \overset{g \text{ linear}}{=} f\big(\alpha g(x) + \beta g(y)\big) \overset{f \text{ linear}}{=} \alpha f\big(g(x)\big) + \beta f\big(g(y)\big) \\ &= \alpha (f \circ g)(x) + \beta (f \circ g)(y). \end{aligned}$$

$$\big\|(f \circ g)(x)\big\| = \big\|f\big(g(x)\big)\big\| \overset{f \text{ beschränkt}}{\leq} c_f\big\|g(x)\big\| \overset{g \text{ beschränkt}}{\leq} c_f c_g \|x\|.$$ $\square$

11.3 Veranschaulichung im $\mathbb{R}^d$

11.10 Der Graph von Funktionen mehrerer Veränderlicher: Ist $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$ und D offen, so ist der Graph von f

$$G = \big\{\big(x_1, x_2, f(x_1, x_2)\big) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in D\big\}$$

eine (gekrümmte) Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Allgemeiner: Ist $f : \mathbb{R}^d \supseteq D \to \mathbb{R}$ und D offen, so ist der Graph von f

$$G = \big\{\big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in D\big\}$$

eine „Hyperfläche“ im $\mathbb{R}^{d+1}$ (später genauer).

11.11 Wichtige Idee: Zur Untersuchung oder Veranschaulichung des Graphen in der Umgebung eines Punktes $\big(x_0, f(x_0)\big)$ kann man das Verhalten von f längs der Geraden $\{x_0 + t \cdot v : t \in \mathbb{R}\}$ mit festem Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^d$ betrachten.
Anders ausgedrückt: Man schneidet G mit geeigneten Ebenen:

$$\begin{aligned} E &:= \big\{(x_0 + t \cdot v, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : t, s \in \mathbb{R}\big\} \\ \Rightarrow\ E \cap G &= \big\{\big(x_0 + t \cdot v, f(x_0 + t \cdot v)\big) : t \in D'\big\} \qquad (D' \subseteq \mathbb{R} \text{ geeignet}). \end{aligned}$$

Diese Schnittkurve $E \cap G$ kann man sich als Kurve im $\mathbb{R}^2$ veranschaulichen:

$$K := \big\{\big(t, f(x_0 + t \cdot v)\big) : t \in D'\big\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Vorteil: Man untersucht die Funktion $t \mapsto f(x_0 + t \cdot v)$, die nur von einer reellen Variablen abhängt und reellwertig ist.

11.12 Beispiele: 1) $f : D = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$:
Graph von f: $G = \Big\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 1 \ \wedge\ x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\Big\}$ (Halbkugelfläche).

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ (Der Graph ist eine Sattelfläche).

11.4 Richtungsableitungen

11.13 Definition: 1) Seien V, W normierte Räume, $D \subseteq V$ offen und $f : D \to W$, $x_0 \in D$, $v \in V$. (D offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \{x_0 + tv : |t| < \delta\} \subseteq D$.) Existiert der Grenzwert

$$Df(x_0)(v) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + tv)\Big|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(f(x_0 + hv) - f(x_0)\big),$$

so heißt $Df(x_0)(v)$ **Richtungsableitung** oder **Gateaux**-Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v. Beachte: $Df(x_0)(v) \in W$, $v \mapsto Df(x_0)(v)$ ist Abbildung einer Teilmenge von V nach W.

2) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$, $1 \le j \le d$, e_j der Einheitsvektor in x_j-Richtung. Existiert der Grenzwert

$$\partial_{x_j} f(x_0) \;:=\; \partial_j f(x_0) \;:=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+he_j) - f(x_0)}{h} \;=\; Df(x_0)(e_j),$$

so heißt $\partial_j f(x_0) \in \mathbb{R}^m$ **partielle Ableitung** von f nach x_j in x_0.

3) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existieren alle partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x_0), \ldots,$ $\partial_d f(x_0)$, so heißt der Vektor

$$\mathrm{grad} f(x_0) \;:=\; \nabla f(x_0) \;:=\; \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_d f(x_0) \end{pmatrix}$$

der **Gradient** von f in x_0 (∇ = Nabla-Operator).

11.14 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}$.

$\partial_1 f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\partial_2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

Für $v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+tv) &= \begin{pmatrix} x_1 + tv_1 \\ x_2 + tv_2 \\ x_1 + tv_1 + (x_2+tv_2)^2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} f(x+tv) &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 + 2(x_2+tv_2)v_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow Df(x)(v) &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 + 2x_2 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere: $Df(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist eine lineare Abbildung.

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x_1^2 \mathrm{e}^{x_1 x_2}$:

$$\nabla f(x) \;=\; \begin{pmatrix} 2x_1 \mathrm{e}^{x_1x_2} + x_1^2 x_2 \mathrm{e}^{x_1x_2} \\ x_1^3 \mathrm{e}^{x_1x_2} \end{pmatrix}.$$

Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f(x+tv) \;=\; (x_1+tv_1)^2 \mathrm{e}^{(x_1+tv_1)(x_2+tv_2)}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}f(x+tv) &= 2(x_1+tv_1)v_1\mathrm{e}^{\cdots} + (x_1+tv_1)^2\mathrm{e}^{\cdots}\big(v_1(x_2+tv_2)+(x_1+tv_1)v_2\big) \\
&\overset{t=0}{=} 2x_1v_1\mathrm{e}^{x_1x_2} + x_1^2\mathrm{e}^{x_1x_2}(v_1x_2+x_1v_2) \\
&= v_1(2x_1+x_1^2x_2)\mathrm{e}^{x_1x_2} + v_2x_1^3\mathrm{e}^{x_1x_2} \\
&= v_1\partial_1 f(x) + v_2\partial_2 f(x) \\
\Rightarrow\ Df(x)(v) &= \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 f(x) & \partial_2 f(x) \end{pmatrix}}_{\text{Matrix mit 1 Zeile}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Insbesondere: $Df(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

11.15 Definition: Seien V, W normierte Räume, $D \subseteq V$ offen, $f : D \to W$, $x_0 \in D$, und es existiere $Df(x_0)(v)$ für alle $v \in V$. Ist $Df(x_0) : V \to W$ linear und stetig, so heißt f in x_0 **schwach differenzierbar**, $f_s'(x_0) := Df(x_0)$ heißt **schwache Ableitung** von f in x_0.

11.16 Satz: Ist $V = \mathbb{R}^d$, $W = \mathbb{R}^m$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^m$ in x_0 schwach differenzierbar, so ist jede Koordinatenfunktion $f_j : D \to \mathbb{R}$ in x_0 schwach differenzierbar ($j = 1, \dots m$), und es gilt $f'(x_0)(v) = J_f(x_0)v$ für $v \in \mathbb{R}^d$ mit der **Jacobi-Matrix**

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \dots & \partial_d f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \dots & \partial_d f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \partial_2 f_m(x_0) & \dots & \partial_d f_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Setze $v := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$f'(x_0)e_1 = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(x_0+he_1)-f(x_0)\big) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f_1(x_0+he_1)-f_1(x_0)\big) \\ \vdots \\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f_m(x_0+he_1)-f_m(x_0)\big) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_1 f_j(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f_j(x_0+he_1)-f_j(x_0)\big) \text{ existiert für } j = 1, \dots, m, \\ f'(x_0)e_1 = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) \\ \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

$f'(x_0) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ ist linear $\overset{\text{LAAG 1}}{\Rightarrow}$ $\exists m \times d$-Matrix J $\forall v \in \mathbb{R}^d : f'(x_0)v = Jv$.

$$\overset{v=e_1}{\Rightarrow} J\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) \\ \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) \end{pmatrix} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & {*}{*}{*}{*}{*}{*} \\ \vdots & \\ \partial_1 f_m(x_0) & {*}{*}{*}{*}{*}{*} \end{pmatrix}.$$

Genauso für die anderen Spalten von J.

Wie oben folgt: $Df_k(x_0)v = \big(Jv\big)_k$ für $v \in \mathbb{R}^d$. Daraus folgt die Linearität und Stetigkeit von $Df_k(x_0) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, also die schwache Differenzierbarkeit von f_k in x_0 für jedes $k = 1, \ldots, m$. $\square$

11.17 Beispiele: 1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}$.

$\overset{\text{letztes Beispiel}}{\Rightarrow}$ f ist in jedem $x \in \mathbb{R}^2$ schwach differenzierbar mit $f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2x_2 \end{pmatrix}$.

2) Aus schwacher Differenzierbarkeit folgt nicht einmal Stetigkeit:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 = x_2^2 \ \wedge \ x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann existiert die schwache Ableitung in $x_0 = 0$: $f_s'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$,
aber f ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

3) Für die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto \big(x_1^3 + x_2^3\big)^{1/3}$ ist $Df(0)v$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ definiert, aber keine lineare Abbildung (vgl. Übungen).

11.5 Die Ableitung

11.18 Definition: Sei $f : V \supseteq D \to W$, D offen, $x_0 \in D$. Dann heißt f **Fréchet-differenzierbar** in x_0, falls eine lineare stetige Abbildung $L : V \to W$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + L(x - x_0) + o\big(\|x - x_0\|\big) && \text{für } x \to x_0 \\ \text{bzw. } f(x_0 + v) &= f(x_0) + L(v) + o\big(\|v\|\big) && \text{für } v \to 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Die lineare Abbildung $f'(x_0) := L$ heißt **Fréchet-Ableitung** von f in x_0.
Erinnerung: Die Aussage $(*)$ bedeutet:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + v) - f(x_0) - L(v) \ = \ o\big(\|v\|\big) \text{ für } v \to 0 \\ \text{bzw. } \ & \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall v \in V : \|v\| < \delta \Rightarrow \big\|f(x_0 + v) - f(x_0) - L(v)\big\| \ < \ \varepsilon\|v\| \\ \text{bzw. } \ & \lim_{v \to 0} \frac{\big\|f(x_0 + v) - f(x_0) - L(v)\big\|}{\|v\|} \ = \ 0. \end{aligned}$$

11.19 Satz: Die Fréchet-Ableitung ist eindeutig.

Beweis: $$\left.\begin{aligned} \text{Sei } \ f(x_0 + v) &= f(x_0) + L(v) + o\big(\|v\|\big) \\ \text{und } \ f(x_0 + v) &= f(x_0) + \widetilde{L}(v) + o\big(\|v\|\big) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ L(v) - \widetilde{L}(v) = o\big(\|v\|\big) \quad \text{für } v \to 0.$$

Beweise $\forall w \in V \ \forall \varepsilon > 0 : \big\|L(w) - \widetilde{L}(w)\big\| < \varepsilon$. Dann folgt $\widetilde{L} = L$.

Seien $w \in V$, $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest, $w \neq 0$.
Wähle $\delta > 0$, so dass $\big\|L(v) - \widetilde{L}(v)\big\| < \dfrac{\varepsilon}{\|w\|}\|v\|$ für $\|v\| < \delta$.
$\alpha := \dfrac{\delta}{2\|w\|} > 0 \;\Rightarrow\; \|\alpha w\| = d\frac{\delta}{2} < \delta$. Mit $v := \alpha w$ folgt

$$\big\|L(w) - \widetilde{L}(w)\big\| \;=\; \Big\|\frac{1}{\alpha}L(\alpha w) - \frac{1}{\alpha}\widetilde{L}(\alpha w)\Big\| \;=\; \frac{1}{\alpha}\big\|L(\alpha w) - \widetilde{L}(\alpha w)\big\| \;<\; \frac{1}{\alpha}\frac{\varepsilon}{\|w\|}\,\|\alpha w\| \;=\; \varepsilon.$$

□

11.20 Satz: Seien V, W lineare Räume, $D \subseteq V$ offen, $f : D \to W$, $x_0 \in D$. Ist f in x_0 Fréchet-differenzierbar, dann ist f in x_0 schwach differenzierbar und es gilt $f_s'(x_0) = f'(x_0)$.

Beweis: Sei $v \in V$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x_0 + hv) - f(x_0) &= L(hv) + o\big(\|hv\|\big) \quad (h \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}) \\ \overset{L \text{ linear}}{\Rightarrow} \frac{1}{h}\big(f(x_0 + hv) - f(x_0)\big) &= L(v) + \underbrace{\frac{1}{h}\,o(h\|v\|)}_{=o(1)\to 0 \text{ für } h \to 0} \\ \Rightarrow\; Df(x_0)(v) &= L(v). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $Df(x_0)(v)$ für alle $v \in V$ existiert, dass diese Abbildung linear und stetig bezüglich v ist, und dass $f_s'(x_0) = Df(x_0) = L = f'(x_0)$.

□

11.21 Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \mathrm{e}^{x_1} \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ f ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ Fréchet-differenzierbar und $f'(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ \mathrm{e}^{x_1} & 0 \end{pmatrix}$.

11.22 Satz: Ist f in x_0 Fréchet-differenzierbar, dann ist f in x_0 stetig.

Beweis:
$$\begin{array}{cccccccc} f(x) & = & f(x_0) & + & L(x - x_0) & + & o\big(\|x - x_0\|\big) \\ \text{für } x \to x_0 & & \downarrow & & \downarrow\ (L \text{ stetig}) & & \downarrow \\ & & f(x_0) & + & \underbrace{L(0)}_{=0} & + & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$
$\Rightarrow$ f ist stetig in x_0.

□

11.23 Satz: Seien U, V, W normierte Räume, $D_f \subseteq V$ offen, $f, f_1, f_2 : D_f \to W$, $\varphi : D_f \to \mathbb{R}$ (oder $\varphi : D_f \to \mathbb{C}$), $D_g \subseteq W$ offen, $g : D_g \to U$. Dann:

1) **Linearität der Ableitung:** Sind f_1, f_2 in $x_0 \in D_f$ Fréchet-differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), dann ist $\alpha f_1 + \beta f_2 : D_f \to W$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)'(x_0) \;=\; \alpha f_1'(x_0) + \beta f_2'(x_0).$$

2) **Produktregel:** Sind f und φ in $x_0 \in D_f$ Fréchet-differenzierbar, dann ist $\varphi f : D_f \to W : x \mapsto \varphi(x) \cdot f(x)$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit

$$(\varphi \cdot f)'(x_0)(v) \;=\; \varphi(x_0) \cdot f'(x_0)(v) + \varphi'(x_0)(v) \cdot f(x_0) \quad \text{für } v \in V$$

bzw. kurz

$$(\varphi \cdot f)'(x_0) \;=\; \varphi(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

3) **Kettenregel:** Gilt $f(x_0) \in D_g$, und sind f in x_0 und g in $f(x_0)$ Fréchet-differenzierbar, so ist $g \circ f$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; g'\big(f(x_0)\big) \circ f'(x_0).$$

Beweis: 1) Übungen

2) Übungen

3) Da f stetig in x_0 ist, gilt $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$.
g differenzierbar in $f(x_0)$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} g\big(f(x)\big) &= g\big(f(x_0)\big) + g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0)\big) + o\big(\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W\big) \quad \text{für } x \to x_0 \\ &= g\big(f(x_0)\big) + g'\big(f(x_0)\big)\big(f'(x_0)(x - x_0)\big) \\ &\quad + \underbrace{g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big)}_{=o(\|x-x_0\|_V) \text{ siehe a)}} + \underbrace{o\big(\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W\big)}_{=o(\|x-x_0\|_V) \text{ siehe b)}} \quad \text{für } x \to x_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ ist in x_0 differenzierbar, $(g \circ f)'(x_0)(v) = g'\big(f(x_0)\big)\big(f'(x_0)(v)\big)$ für $v \in V$.

a) $$\left.\begin{array}{l} g'\big(f(x_0)\big) \text{ stetig} \overset{11.8}{\Rightarrow} \forall y \in W : \big\|g'\big(f(x_0)\big)(y)\big\|_U \le c\|y\|_W \\ f \text{ in } x_0 \text{ Fréchet-differenzierbar} \;\Rightarrow\; f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o\big(\|x - x_0\|_V\big) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\; g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big) = o\big(\|x - x_0\|_V\big)$$

b) $$\begin{aligned} \big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W &= \big\|f'(x_0)(x - x_0) + o\big(\|x - x_0\|_V\big)\big\|_W \\ &\le \big\|f'(x_0)(x - x_0)\big\|_W + o\big(\|x - x_0\|_V\big) \\ &\le c\|x - x_0\|_v + o\big(\|x - x_0\|_V\big) \\ &\le (c + 1)\|x - x_0\|_v \text{ für } \|x - x_0\|_V < \delta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; o\big(\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W\big) \;=\; o(\|x - x_0\|_V) \quad \text{für } x \to x_0$$

$\square$

11.6 Funktionen zwischen endlichdimensionalen Räumen

11.24 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar** in $x_0 \in D$, falls f in x_0 Fréchet-differenzierbar ist, $f'(x_0)$ heißt **Ableitung** von f in x_0.

11.25 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$, so dass alle partiellen Ableitungen $\partial_j f(x)$ ($j = 1, \ldots d$) in $B_\varepsilon(x_0)$ existieren und beschränkt sind, dann ist f stetig in x_0.

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\|v\| < \varepsilon$. Setze

$$v^0 := 0,\ v^j := \sum_{k=1}^{j} v_k e_k = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\|v^j\| \leq \|v\| < \varepsilon$ für $j = 0, \ldots d$, also $x_0 + v^j \in B_\varepsilon(x_0)$ und

$$f(x_0 + v) - f(x_0) \ = \ \sum_{j=1}^{d} \big(f(x_0 + v^j) - f(x_0 + v^{j-1})\big).$$

Setze $g : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x_0 + v^{j-1} + tv_j e_j)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ g'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + v^{j-1} + tv_j e_j + hv_j e_j) - f(x_0 + v^{j-1} + tv_j e_j)}{v_j h} v_j \\
&= v_j (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + tv_j e_j). \quad \text{(Gilt auch falls } v_j = 0.\text{)}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist g in $]0,1[$ differenzierbar (Beachte: $\|v^{j-1} + tv_j e_j\| \leq \|v\| < \varepsilon$ für $0 \leq t \leq 1$).
Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\forall j = 1, \ldots, d\ \exists \xi_j \in]0,1[: \underbrace{f(x_0 + v^j) - f(x_0 + v^{j-1})}_{=g(1)-g(0)} = \underbrace{v_j (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j)}_{=g'(\xi_j)(1-0)}.$$

Nun gilt $\big|(\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j)\big| \leq M$, da $x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j \in B_\varepsilon(x_0)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\big|f(x_0 + v) - f(x_0)\big| &\leq \sum_{j=1}^{d} \big|f(x_0 + v^j) - f(x_0 + v^{j-1})\big| \\
&= \sum_{j=1}^{d} \big|v_j (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j)\big| \\
&\leq M \sum_{j=1}^{d} |v_j| \\
&\leq M\, d\, \|v\|.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von f in x_0. $\square$

11.26 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existieren alle partiellen Ableitung $\partial_j f(x_0)$ $(j = 1, \ldots d)$ in einer Umgebung $B_\varepsilon(x_0)$ und sind stetig in x_0, dann ist f differenzierbar in x_0, und es gilt $f'(x_0) = \big(\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_d f(x_0)\big)$.

Beweis: Seien $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\|v\| < \varepsilon$ und v^j wie im vorigen Beweis. Anwendung des Mittelwertsatzes wie dort ergibt mit geeigneten $\xi_j \in]0,1[$

$$\begin{aligned}
f(x_0 + v) &= f(x_0) + \sum_{j=1}^{d} \big(f(x_0 + v^j) - f(x_0 + v^{j-1})\big) \\
&= f(x_0) + \sum_{j=1}^{d} v_j (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j) \\
&= f(x_0) + \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \partial_j f(x_0) v_j}_{=\left(\partial_1 f(x_0),\ldots,\partial_d f(x_0)\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \big((\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j) - \partial_j f(x_0)\big) v_j}_{=o(\|v\|) \text{ für } v \to 0 \text{ (siehe unten)}}
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

$$\partial_j f \text{ stetig in } x_0 \;\Rightarrow\; \exists \delta_j > 0 \;\forall w \in \mathbb{R}^d : \|w\| < \delta \Rightarrow \big|\partial_j f(x_0 + w) - \partial_j f(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{d}.$$

Setze $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_d\}$. Für $\|v\| < \delta$ folgt

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{j=1}^{d} \big((\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j) - \partial_j f(x_0)\big) v_j \Big\| &\leq \sum_{j=1}^{d} \|\ldots\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{d} \frac{\varepsilon}{d} \underbrace{|v_j|}_{\leq \|v\|} \\
&\leq \varepsilon \|v\| \text{ für } \|v\| < \delta.
\end{aligned}$$

$\square$

11.27 Bemerkung: Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes gilt

$$f'(x_0) = \big(\nabla f(x_0)\big)^T.$$

Man kann die Ableitung $f'(x_0)$ mit dem Skalarprodukt auch folgendermaßen schreiben:

$$f'(x_0)(v) \;=\; \langle \nabla f(x_0), v \rangle \text{ für } v \in \mathbb{R}^d.$$

11.28 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$, und es existiere ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$, so dass die partiellen Ableitungen $\partial_j f_k(x)$ $(j = 1, \ldots d,\; k = 1, \ldots, m)$ in $B_\varepsilon(x_0)$ existieren. Sind alle partiellen Ableitungen $\partial_j f_k(x)$ aller Koordinatenfunktionen ...

1) ... in $B_\varepsilon(x_0)$ beschränkt, so ist f stetig in x_0.

2) ... stetig in x_0, so ist f in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = J_f(x_0)$ (Jacobi-Matrix, siehe 11.16)

Beweis: **1)** Aus Satz 11.25 folgt für jedes $k = 1, \dots, m$: f_k ist stetig in x_0.
$\Leftrightarrow$ f ist stetig in x_0.

2) Aus Satz 11.26 folgt für jedes $k = 1, \dots, m$: f_k ist differenzierbar in x_0:

$$\forall k = 1, \dots m : f_k(x_0 + v) \;=\; f_k(x_0) + \big(\partial_1 f_k(x_0), \dots, \partial_d f_k(x_0)\big)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} + o\big(\|v\|\big)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; f(x_0+v) &= \begin{pmatrix} f_1(x_0+v) \\ \vdots \\ f_m(x_0+v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 f_1'(x_0) & \dots & \partial_d f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m'(x_0) & \dots & \partial_d f_m(x_0) \end{pmatrix}}_{=J_f(x_0)} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} o\big(\|v\|\big) \\ \vdots \\ o\big(\|v\|\big) \end{pmatrix}}_{=o\left(\|v\|\right)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f ist differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = J_f(x_0)$. $\square$

11.29 Anwendungen: **1)** Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^1(]a,b[\to \mathbb{R})$, $\Phi :]a,b[\to \mathbb{R}^m : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_m(t) \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ $\Phi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_m'(t) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

Fréchet-Ableitung: $$\begin{aligned} \Phi(t+v) &= \Phi(t) + \Phi'(t)(v) + o\big(|v|\big) \qquad \text{für } v \in \mathbb{R},\ v \to 0 \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_1(t) + \varphi_1'(t)v + o\big(|v|\big) \\ \vdots \\ \varphi_m(t) + \varphi_m'(t)v + o\big(|v|\big) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d.h. $\Phi'(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m : v \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1'(t)v \\ \vdots \\ \varphi_m'(t)v \end{pmatrix}$, Fréchet-Ableitung und „alte" Ableitung stimmen überein.

Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 = \Phi(t_0)$ $\Rightarrow$ $f'(x_0) = \big(\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_m f(x_0)\big)$.

Kettenregel: $f \circ \Phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in t_0 und

$$\begin{aligned}
(f\circ\Phi)'(t_0) &= f'\big(\Phi(t_0)\big) \circ \Phi'(t_0) = \big(\partial_1 f(\Phi(t_0)), \dots, \partial_m f(\Phi(t_0))\big) \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_m'(t_0) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^m \partial_j f\big(\Phi(t_0)\big)\varphi_j'(t_0),
\end{aligned}$$

denn die Hintereinanderausführung $f'\big(\Phi(t_0)\big) \circ \Phi'(t_0)$ wird durch Matrizenmultiplikation berechnet.

2) Seien $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar in x_0,
$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar in $f(x_0)$.
Kettenregel: $g \circ f$ ist differenzierbar in x_0 und

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x_0) &= g'\big(f(x_0)\big) \circ f'(x_0) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_1 g_1\big(g(x_0)\big) & \partial_2 g_1\big(g(x_0)\big) \\ \partial_1 g_2\big(g(x_0)\big) & \partial_2 g_2\big(g(x_0)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \partial_3 f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \partial_3 f_2(x_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_1 g_1\, \partial_1 f_1 + \partial_2 g_1\, \partial_1 f_2 & \partial_1 g_1\, \partial_2 f_1 + \partial_2 g_1\, \partial_2 f_2 & \partial_1 g_1\, \partial_3 f_1 + \partial_2 g_1\, \partial_3 f_2 \\ \partial_1 g_2\, \partial_1 f_1 + \partial_2 g_2\, \partial_1 f_2 & \partial_1 g_2\, \partial_2 f_1 + \partial_2 g_2\, \partial_2 f_2 & \partial_1 g_2\, \partial_3 f_1 + \partial_2 g_2\, \partial_3 f_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3) Seien $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0.
Produktregel: $\varphi \cdot f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist differenzierbar in x_0 und

$$\begin{aligned}
(\varphi \cdot f)'(x_0)(v) &= \varphi(x_0) f'(x_0)(v) + \varphi'(x_0)(v) f(x_0) \text{ für } v \in \mathbb{R}^2 \\
&= \varphi(x_0) \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \underbrace{(\partial_1\varphi, \partial_2\varphi) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\text{Skalar}} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\
&= \ldots + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \left((\partial_1\varphi, \partial_2\varphi) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \\
&\overset{\text{AG für}}{\underset{\text{Matrizen}}{=}} \ldots + \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\varphi(x_0) f'(x_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \end{pmatrix} \big(\partial_1\varphi(x_0), \partial_2\varphi(x_0)\big)}_{= \begin{pmatrix} f_1\partial_1\varphi & f_1\partial_1\varphi \\ f_1\partial_1\varphi & f_1\partial_1\varphi \end{pmatrix}} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

11.30 Geometrische Veranschaulichung: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Den Graphen von f

$$G(f) \;:=\; \big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in \mathbb{R}^2 \big\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

kann man sich als gekrümmte Fläche im $\mathbb{R}^3$ vorstellen, $\big(x_0, f(x_0)\big)$ als Punkt auf $G(f)$.
Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fest. Schnitt von $G(f)$ mit der Ebene $E = \big\{ (x_0 + tv, s) : s, t \in \mathbb{R} \big\}$ ergibt die Schnittkurve

$$G(f) \cap E \;=\; K \;=\; \big\{ g_v(t) = (x_0 + tv, f(x_0 + tv)) : t \in \mathbb{R} \big\}.$$

f differenzierbar in $x_0 \;\Rightarrow\; K$ hat einen Tangentenvektor im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$:

$$g_v'(0) \;=\; \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} f(x_0 + tv)\big|_{t=0} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \partial_1 f(x_0) v_1 + \partial_2 f(x_0) v_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \langle \nabla f(x_0), v \rangle \end{pmatrix}.$$

Die Steigung der Tangente (gegenüber der (x_1, x_2)-Ebene) ist durch

$$m_v = \frac{\langle \nabla f(x_0), v\rangle}{\|v\|} = \|\nabla f(x_0)\| \cos\big(\angle\big(\nabla f(x_0), v\big)\big)$$

gegeben. Die Steigung nimmt den maximalen Wert $\|\nabla f(x_0)\|$ an, wenn der Richtungsvektor v parallel zum Vektor $\nabla f(x_0)$ ist.

1. Folgerung: $\nabla f(x_0)$ zeigt in Richtung der größten Zunahme von f, und $\|\nabla f(x_0)\|$ ist die größte Steigung einer Schnittkurve wie oben.

Der Tangentenvektor kann als Linearkombinaton geschrieben werden:

$$g_v'(0) = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f(x_0) \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f(x_0) \end{pmatrix}.$$

Alle $g_v'(0)$ liegen in einer Ebene.

2. Folgerung: Die Tangentialebene an $G(f)$ in $(x_0, f(x_0)$ ist durch

$$E = \Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix} (x_0)_1 \\ (x_0)_2 \\ f(x_0) \end{pmatrix}}_{\in G(f)} + v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f(x_0) \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f(x_0) \end{pmatrix} : v_1, v_2 \in \mathbb{R} \Bigg\}$$

gegeben. Gleichungsdarstellung von E:

$$\begin{aligned} E &= \Bigg\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 = f(x_0) + \partial_1 f(x_0) \underbrace{\big(x_1 - (x_0)_1\big)}_{=v_1} + \partial_2 f(x_0) \underbrace{\big(x_2 - (x_0)_2\big)}_{=v_2} \Bigg\} \\ &= \Bigg\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),\ x = (x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Bigg\}. \end{aligned}$$

11.31 Notwendiges Kriterium für Extremum: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$. Hat f in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum, und ist f in x_0 differenzierbar, so folgt $f'(x_0) = 0$ bzw. $\nabla f(x_0) = 0$.

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $g_v(t) := f(x_0 + tv)$ für $t \in]-\delta, \delta[$ ($\delta > 0$ so gewählt, dass $x_0 + tv \in D$).

f differenzierbar in $x_0 \;\Rightarrow\; g_v$ differenzierbar in $t = 0$, $g_v'(0) = f'(x_0)v = \langle \nabla f(x_0), v\rangle$
f hat in x_0 ein lokales Extremum $\;\Rightarrow\; g_v$ hat in $t = 0$ ein lokales Extremum
$\Rightarrow\; g_v'(0) = 0 = \langle \nabla f(x_0), v\rangle \;\Rightarrow\; \nabla f(x_0) \perp v$
v beliebig $\;\Rightarrow\; \forall v \in \mathbb{R}^d : \nabla f(x_0) \perp v$
$\Rightarrow\; \nabla f(x_0) = 0$ bzw. $f'(x_0) = 0$. $\square$

11.7 Der Mittelwertsatz

Erinnerung: Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar, so folgt

$$\exists \xi \in]a,b[: f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

11.32 Mittelwertsatz für mehrere Variablen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in D$, so dass die Verbindungsstrecke in D enthalten ist:

$$S := \{x_1 + t(x_2 - x_1) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq D.$$

Ist f in jedem Punkt $x_0 \in S$ differenzierbar, dann:

$$\exists \xi \in]0,1[: f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{\big\langle \nabla f\big(x_1 + \xi(x_2 - x_1)\big), x_2 - x_1 \big\rangle}_{=f'(x_1+\xi(x_2-x_1))(x_2-x_1)}.$$

Beweis: $g(t) := f\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big)$ für $t \in [0,1]$

$\Rightarrow$ g ist stetig und g ist in $]0,1[$ differenzierbar,

$g'(t) = f'\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big)(x_2 - x_1) = \big\langle \nabla f\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big), x_2 - x_1 \big\rangle$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $\exists \xi \in]0,1[$:

$$f(x_1) - f(x_2) = g(1) - g(0) = g'(\xi)(1-0) = \big\langle \nabla f\big((x_1 + \xi(x_2 - x_1)\big), x_2 - x_1 \big\rangle.$$

$\square$

11.33 Bemerkung: Für den Beweis ist es wichtig, dass f reellwertig ist. Bei vektorwertigen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m$ kann der Satz zwar in jeder Koordinate separat angewandt werden, aber mit verschiedenen Werten von ξ. Man kann jedoch beweisen:

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \underbrace{\big\|f'\big(x_1 + t(x_2 - x_1)\big)\big\|}_{\text{Abbildungsnorm}} \cdot \|x_2 - x_1\|.$$

11.34 Definition: $D \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **konvex**, wenn gilt

$$\forall x_1, x_2 \in D : S := \{x_1 + t(x_2 - x_1) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq D.$$

11.35 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $f : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in jedem Punkt $x \in D$. Dann gilt

$$f = \text{konstant} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in D : f'(x) = 0.$$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Für $x_0 \in D,\; v \in \mathbb{R}^d,\; \|v\|$ genügend klein:

$$f(x_0 + v) = f(x_0) = f(x_0) + 0v = f(x_0) + \underbrace{0v}_{=f'(x_0)(v)} + o\big(\|v\|\big) \text{ für } v \to 0$$

$$\Rightarrow\; f'(x_0) = 0.$$

„$\Leftarrow$“: Sei $x_0 \in D$ fest. zeige: $\forall x_1 \in D : f(x_1) = f(x_0)$.

D konvex $\;\Rightarrow\; S = \{x_0 + t(x_1 - x_0) : 0 \le t \le 1\} \subseteq D$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ und $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \forall j \in \{1, \ldots, m\} : 0 = f_j'(x)^T = \nabla f_j(x)$.

Nach Mittelwertsatz

$$\exists \xi_j \in]0,1[: f_j(x_1) - f_j(x_0) \;=\; \big\langle \nabla f_j\big(x_0 + \xi_j(x_1 - x_0)\big), x_1 - x_0 \big\rangle \;=\; 0.$$

$$\Rightarrow\; \forall j \in \{1, \ldots, m\} : f_j(x_1) = f_j(x_0).$$

□

11.36 Definition: $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen heißt **zusammenhängend**, falls

$$\forall x_1, x_2 \in D\; \exists n \in \mathbb{N}\; \exists \xi_0 = x_1, \xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_n = x_2\; \forall j = 1, \ldots n :$$
$$S_j = \big\{\big(\xi_{j-1} + t(\xi_j - \xi_{j-1})\big) : 0 \le t \le 1\big\} \subseteq D$$

$D \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **Gebiet**, falls D offen und zusammenhängend ist.

11.37 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in jedem Punkt $x \in D$. Dann gilt

$$f = \text{konstant} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in D : f'(x) = 0.$$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Klar

„$\Leftarrow$“: Sei $x_0 \in D$ fest. Zeige: $\forall x_1 \in D : f(x_1) = f(x_0)$.
D zusammenhängend:

$$\exists \xi_0 = x_0, \xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_n = x_1 \ \forall j = 1, \ldots n :$$
$$S_j = \big\{ \big(\xi_{j-1} + t(\xi_j - \xi_{j-1})\big) : 0 \leq t \leq 1 \big\} \subseteq D.$$

Wie im vorigen Beweis folgt

$$f(x_0) = f(\xi_0) = f(\xi_1) = \ldots = f(\xi_n) = f(x_1)$$

also $f(x_1) = f(x_0)$. □

11.8 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

11.38 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existiert $\partial_{x_j} f(x)$ in $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$, und ist $\partial_{x_j} f(x)$ in x_0 partiell nach x_k differenzierbar, so heißt

$$\partial_{x_k}\big(\partial_{x_j} f\big)(x_0) \ =: \ \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_k} \partial_{x_j}}(x_0) \ =: \ \partial_{x_k}\partial_{x_j} f(x_0) \ := \ \partial_k \partial_j f(x_0)$$

partielle Ableitung zweiter Ordnung von f in x_0. Entsprechend partielle Ableitungen dritter und höherer Ordnung, z.B.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}}(x_0) \ := \ \partial_{x_{j_1}}\big(\partial_{x_{j_2}}(\partial_{x_{j_3}} f)\big)(x_0)$$

Falls mehrmals nach einer Variablen abgeleitet wird:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k} \ = \ \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_j \partial x_k} \ = \ \partial^2_{x_j} \partial_{x_k} f \ = \ \partial^2_j \partial_k f.$$

11.39 Beispiele: **1)** $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} + x\sin(y)$

2) $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$

Es gelten

$$\partial_x f(0, 0) = 0, \quad \partial_y f(0, 0) = 0,$$
für $(x, y) \neq (0, 0)$: $\partial_x f(x, y) = y\dfrac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_y f(x, y) = x\dfrac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2},$
$$\partial_x \partial_y f(0, 0) = 1 \neq \partial_y \partial_x f(0, 0) = -1.$$

3) Ableitung des Gradienten Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D. Dann gilt $\nabla f : D \to \mathbb{R}^n$. Ist ∇f in $x_0 \in D$ differenzierbar, so heißt die Jacobi-Matrix von ∇f:

$$H_f(x_0) \;:=\; (\nabla f)'(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_0) & \partial_2\partial_1 f(x_0) & \dots & \partial_n\partial_1 f(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(x_0) & \partial_2\partial_n f(x_0) & \dots & \partial_n^2 f(x_0) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f.

Anmerkung: $H_f(x_0)$ ist nicht die zweite Ableitung von f in x_0. Aber $f''(x_0)$ kann mit $H_f(x_0)$ angegeben werden:

$f'(x_0)$ ist lineare Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$

$f''(x_0)$ ordnet jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung $L_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu:

$$f''(x_0) : v \mapsto L_v,\; L_v(w) \;=\; \langle J_f(x_0)v, w\rangle\,.$$

11.40 Satz von Schwarz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $j, k \in \{1, \dots, d\}$, und es gebe ein $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$, so dass $\partial_{x_j} f, \partial_{x_k} f, \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x)$ in $B_\varepsilon(x_0)$ existieren.
Ist $\partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x)$ stetig in x_0, so ist $\partial_{x_j} f(x)$ in x_0 nach x_k differenzierbar, und es gilt

$$\partial_{x_k}\partial_{x_j} f(x_0) = \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0).$$

Beweis: Zeige: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\big(\partial_{x_j} f(x_0 + he_k) - \partial_{x_j} f(x_0)\big) = \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0)$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\big(\partial_{x_j} f(x_0 + he_k) - \partial_{x_j} f(x_0)\big)\\
&\overset{\text{Def } \partial_{x_j}}{=} \quad \frac{1}{h}\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x_0 + he_k + te_j) - f(x_0 + he_k)\big) - \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x_0 + te_j) - f(x_0)\big)\right)\\
&= \quad \lim_{t\to 0}\frac{1}{ht}\big(f(x_0 + he_k + te_j) - f(x_0 + he_k)\big) - \big(f(x_0 + te_j) - f(x_0)\big)\big)\\
&\underset{\text{Differentialrechnung}}{\overset{\text{Mittelwertsatz}}{=}} \quad \lim_{t\to 0}\frac{1}{ht} h\big(\partial_{x_k} f(x_0 + \xi_h e_k + te_j) - f(x_0 + \xi_h e_k)\big), \qquad |\xi_h| < |h|\\
&\underset{\text{Differentialrechnung}}{\overset{\text{Mittelwertsatz}}{=}} \quad \lim_{t\to 0}\frac{1}{t} t\partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0 + \xi_h e_k + \tau_{ht} e_k), \qquad |\tau_{hk}| < |t|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \left|\frac{1}{h}\big(\partial_{x_j} f(x_0 + he_k) - \partial_{x_j} f(x_0)\big) - \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0)\right|\\
= \quad & \left|\lim_{t\to 0}\underbrace{\partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0 + \xi_h e_k + \tau_{ht} e_k) - \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0)}_{|.|<\varepsilon \text{ für } \|\xi_h e_k + \tau_{ht} e_k\| < \delta}\right|\\
\leq \quad & \varepsilon \text{ für } \underbrace{|h| < \frac{\delta}{2}}_{\Rightarrow |\xi_h| < \delta/2}
\end{aligned}$$

□

11.41 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$C^k(D \to \mathbb{R}^m) \;:=\; \Big\{ f : D \to \mathbb{R}^m \;\Big|\; \text{alle partiellen Ableitungen von } f \text{ bis zur } k\text{-ten Ordnung existieren und sind stetig in } D \Big\}$$

der **Raum der k-Mal stetig differenzierbaren Funktionen** auf D.

11.42 Folgerungen: 1) $f \in C^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}) \;\Rightarrow\;$ die Hesse Matrix von f ist symmetrisch.

Z.B. Für $d = 3$: $H_f(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_0) & \partial_2\partial_1 f(x_0) & \partial_3\partial_1 f(x_0) \\ \partial_1\partial_2 f(x_0) & \partial_2^2 f(x_0) & \partial_3\partial_2 f(x_0) \\ \partial_1\partial_3 f(x_0) & \partial_2\partial_3 f(x_0) & \partial_3^2 f(x_0) \end{pmatrix}$.

2) Für $f \in C^k(D \to \mathbb{R})$ ist es bei partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k egal, in welcher Reihenfolge abgeleitet wird:

$$k_1 + k_2 + k_3 \le k \;\Rightarrow\; \partial_1^{k_1}\partial_2^{k_2}\partial_3^{k_3} f \;=\; \partial_3^{k_3}\partial_2^{k_2}\partial_1^{k_1} f \;=\; \ldots$$

11.43 Multiindizes: Für partielle Ableitungen höherer Ordnung ist folgende Notation geschickt:

$$\nabla^\alpha f \;:=\; \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f \qquad \text{für } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

(∇ sprich „Nabla“). Zum Rechnen mit sogenannten **Multiindizes** $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ vereinbart man:

$$\begin{aligned} |\alpha| \;&:=\; \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \\ \alpha \le \beta \;&\Leftrightarrow\; \alpha_1 \le \beta_1 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; \alpha_n \le \beta_n \\ \alpha! \;&:=\; (\alpha_1!) \cdots (\alpha_n!) \\ \binom{\alpha}{\beta} \;&:=\; \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} \;=\; \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \end{aligned}$$

11.44 Leibniz-Formel: Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g \in C^m(D \to \mathbb{R})$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le m$ gilt:

$$\nabla^\alpha (g \cdot f) \;=\; \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n,\ \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \big(\nabla^\beta f\big) \cdot \big(\nabla^{\alpha-\beta} g\big) \qquad \text{in } D.$$

Beweis: Im Fall $d = 2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$:

$$\begin{aligned} \partial_1^{\alpha_1}(g \cdot f) \;&=\; \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \big(\partial_1^{\beta_1} f\big) \cdot \big(\partial_1^{\alpha_1-\beta_1} g\big) \\ \Rightarrow\; \partial_2^{\alpha_2}\partial_1^{\alpha_1}(g \cdot f) \;&=\; \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \partial_2^{\alpha_2} \big((\partial_1^{\beta_1} f) \cdot (\partial_1^{\alpha_1-\beta_1} g) \big) \\ &=\; \underbrace{\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2}}_{\widehat{=}\beta = (\beta_1,\beta_2) \le \alpha = (\alpha_1,\alpha_2)} \underbrace{\binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}}_{=\binom{\alpha}{\beta}} \underbrace{\big(\partial_2^{\beta_2}\partial_1^{\beta_1} f\big)}_{=\nabla^\beta f} \cdot \underbrace{\big(\partial_2^{\alpha_2-\beta_2}\partial_1^{\alpha_1-\beta_1} g\big)\big)}_{=\nabla^{\alpha-\beta} g} \end{aligned}$$

$\square$

11.45 Ableitungen längs einer Geraden: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\{x_0 + t \cdot v : -\delta < t < \delta\} \subseteq D$, und sei $g(t) := f(x_0 + t \cdot v)$. Falls $f \in C^k(D \to \mathbb{R})$, so ist g k-Mal differenzierbar mit

$$g^{(k)}(t) \;=\; \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(\nabla^\alpha f\right)(x_0 + t \cdot v) \cdot v^\alpha \text{ für } |t| < \delta,$$

wobei $v^\alpha := v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{j_1=1}^{d} \partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1} \qquad \left(= \sum_{|\alpha|=1} \nabla^\alpha f(x_0 + t \cdot v)\, v^\alpha \right) \\ g''(t) &= \sum_{j_2=1}^{d} \sum_{j_1=1}^{d} \partial_{j_2} \partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1}\, v_{j_2} \\ &\;\vdots \\ g^{(k)}(t) &= \sum_{j_k=1}^{d} \sum_{j_{k-1}=1}^{d} \cdots \sum_{j_1=1}^{d} \partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1}\, v_{j_2} \cdots v_{j_k}. \end{aligned}$$

In dieser k-fachen Summe kommen genau alle $\nabla^\alpha f$ mit $|\alpha| = k$ vor, manche mehrfach.

Wie oft kommt ein fest gewähltes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| = k$ vor? Kombinatorik: Verteile $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$ Einträge auf die k Plätze $j_1, \ldots, j_k$: Das sind $k!$ Möglichkeiten. Davon sind aber $\alpha_1!$ Möglichkeiten gleich, entsprechend sind $\alpha_2!$, ..., $\alpha_d!$ Möglichkeiten gleich.

$$\Rightarrow\; g^{(k)}(t) \;=\; \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_d!}\, \nabla^\alpha f(x_0 + t \cdot v).$$

□

11.46 Satz von Taylor für mehrere Variablen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^{k+1}(D \to \mathbb{R})$, $x, x_0 \in D$ so dass die Verbindungsstrecke ganz in D liegt: $\{x_0 + t \cdot (x - x_0) : 0 \le t \le 1\} \subset D$. Dann existiert ein $\tau \in]0,1[$, so dass

$$f(x) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)\big(x_0 + \tau \cdot (x - x_0)\big) \cdot (x - x_0)^\alpha.$$

Beweis: Wende den Satz von Taylor 7.31 auf die Funktion $g(t) := f\big(x_0 + t \cdot (x - x_0)\big)$ an:

$$f(x_0) \;=\; g(1) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0)(1-0)^j + \frac{g^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}(1-0)^{k+1}.$$

Verwende den letzten Satz für $g^{(j)}(t)$ $(1 \le j \le k+1)$.

□

11.47 Beispiel: $f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + y^2 - 2x + 6y$ bei $(x_0, y_0) = (1, -3)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -\frac{31}{3} + 2(x-1)^2 + (y+3)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 \\ &= -\frac{31}{3} + (x-1)^2 \underbrace{\left(2 + \frac{2}{3}(x-1)\right)}_{\geq 0 \text{ für } x > -2} + (y+3)^2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f hat in $(1, -3)$ ein lokales Minimum.

11.48 Diskussion: Der Summand für

$$j = 0\text{:} \quad \sum_{|\alpha|=0} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha = f(x_0),$$

$$j = 1\text{:} \quad \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha = \sum_{l=1}^{d} \partial_l f(x_0)(x - x_0)_l = f'(x_0)(x - x_0).$$

$$\begin{aligned} j = 2\text{:} \quad \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha &= \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^{d} \partial_i \partial_l f(x_0)(x - x_0)_i (x - x_0)_l \\ &= \frac{1}{2} \left\langle H_f(x_0)(x - x_0), (x - x_0) \right\rangle. \end{aligned}$$

Der Satz von Taylor mit $k = 1$ besagt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} \Big\langle H_f\big(x_0 + \tau(x - x_0)\big)(x - x_0), (x - x_0) \Big\rangle.$$

bzw. mit $v = x - x_0$

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + f'(x_0)(v) + \frac{1}{2} \left\langle H_f(x_0 + \tau v)v, v \right\rangle.$$

11.9 Extrema

11.49 Lineare Algebra: Es sei $A = \big(a_{jk}\big)_{j,k=1,\dots d}$ eine relle symmetrische $d \times d$-Matrix.

1) Die Abbildung $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : v \mapsto \langle Av, v \rangle = \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk} v_k v_j$ heißt **quadratische Form**.

2) A (und auch q) heißt **positiv semidefinit**, falls

$$\forall v \in \mathbb{R}^d : \langle Av, v \rangle \geq 0$$

bzw. **positiv definit**, falls

$$\forall v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \langle Av, v \rangle > 0.$$

3) A heißt **negativ (semi-)definit**, falls $-A$ positiv (semi-)definit ist.

4) Da A diagonalisierbar ist, gelten:

$$\begin{aligned} A \text{ ist positiv definit (semidefinit)} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte sind } > 0 \ (\geq 0) \\ A \text{ ist negativ definit (semidefinit)} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte sind } < 0 \ (\leq 0) \end{aligned}$$

Insbesondere: Ist A positiv definit und $\lambda_0 > 0$ der kleinste Eigenwert, so gilt:

$$\|v\| = 1 \ \Rightarrow \ \langle Av, v \rangle \ \geq \ \lambda_0.$$

5) $\det(A)$ ist das Produkt der Eigenwerte. Positivitätstest von Jacobi:

$d = 2$**:** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist positiv definit $\Leftrightarrow$ $a_{11} > 0 \ \wedge \ \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$

$d = 3$**:** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist positiv definit $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ a_{11} > 0 \ \wedge \ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \ \wedge \ \det(A) > 0.$$

Gilt entsprechend auch für $d \geq 4$, siehe z.B. Meyberg-Vachenauer: *Höhere Mathematik*.

11.50 Erinnerung: $f'(x_0) = 0$ ist notwendige Bedingung für ein Extremum (siehe 11.31).

11.51 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$.

1) Hat f in x_0 ein lokales Minimum (Maximum), so ist $H_f(x_0)$ positiv (negativ) semidefinit.

2) Ist $H_f(x_0)$ positiv (negativ) definit, so hat f in x_0 ein lokales Minimum (Maximum).

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ fest. Wähle $t_0 > 0$, so dass $x_0 + tv \in D$ für $0 \leq t \leq t_0$. Aus Taylor: $\exists \tau \in \,]0, 1[\,$:

$$f(x_0 + tv) \ = \ f(x_0) + 0 + \langle H_f(x_0 + \tau \cdot tv)tv, tv \rangle \, .$$

1) Hat f in x_0 ein lokales Minimum, so folgt

$$\langle H_f(x_0 + \tau \cdot tv)v, v \rangle \ = \ \frac{1}{t^2} \langle H_f(x_0 + \tau \cdot tv)(tv), tv \rangle \ = \ \frac{1}{t^2}\big(f(x_0 + tv) - f(x_0)\big) \ \geq \ 0.$$

für $0 < t < t_1$, $t_1 > 0$ geeignet gewählt. Da alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung stetig sind, folgt (v ist fest!)

$$\langle H_f(x_0)v, v \rangle \ = \ \lim_{t \to 0} \langle H_f(x_0 + \tau \cdot tv)v, v \rangle \ \geq \ 0.$$

Da $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ beliebig war, folgt die positive Semidefinitheit von $H_f(x_0)$.

2) Sei $H_f(x_0)$ positiv definit. Zeige:

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in B_\delta(x_0) : H_f(x) \text{ ist positiv definit.} \qquad (*)$$

Dann folgt für $x \in B_\delta(x_0)$ aus dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{11.48}{=} f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\big\langle H_f\big(x_0+\tau(x-x_0)\big)(x-x_0), x-x_0\big\rangle}_{>0 \text{ da } H_f(x) \text{ positiv definit}} \\ &> f(x_0), \end{aligned}$$

und f hat in x_0 ein lokales Minimum.

Beweis von $(*)$: Sei λ_0 der kleinste Eigenwert von $H_f(x_0)$. Dann gilt

$$\forall v \in \mathbb{R}^d : \|v\| = 1 \Rightarrow \langle H_f(x_0)v, v\rangle \geq \lambda_0.$$

Da $\partial_j\partial_k f(x)$ stetig in x_0:

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in B_\delta(x_0) \; \forall j,k \in \{1,\ldots,d\} : \big|\partial_j\partial_k f(x) - \partial_j\partial_k f(x_0)\big| < \frac{\lambda_0}{2d^2}.$$

Für $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\|v\| = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \big|\langle H_f(x)v,v\rangle - \langle H_f(x_0)v,v\rangle\big| &= \big|\big\langle \big(H_f(x) - H_f(x_0)\big)v, v\big\rangle\big| \\ &= \left|\sum_{j,k=1}^{d} \big(\partial_j\partial_k f(x) - \partial_j\partial_k f(x_0)\big)v_j v_k\right| \\ &\leq \sum_{j,k=1}^{d} \big|\partial_j\partial_k f(x) - \partial_j\partial_k f(x_0)\big| \cdot \underbrace{|v_j v_k|}_{\leq \|v\|\cdot\|v\| = 1} \\ &< d^2 \frac{\lambda_0}{2d^2} \\ &= \frac{\lambda_0}{2} \end{aligned}$$

und daraus

$$\langle H_f(x)v,v\rangle = \langle H_f(x_0)v,v\rangle + \langle H_f(x)v,v\rangle - \langle H_f(x_0)v,v\rangle \geq \lambda_0 - \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2}.$$

Für beliebiges $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt dann

$$\langle H_f(x)v,v\rangle = \|v\|^2 \left\langle H_f(x)\frac{1}{\|v\|}v, \frac{1}{\|v\|}v\right\rangle \geq \|v\|^2\frac{\lambda_0}{2} > 0.$$

Dies beweist die positive Definitheit von $H_f(x)$ für $x \in B_\delta(x_0)$.

$\square$

11.52 Beispiele: **1)** $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x^2 - y^2)\ln x$ in $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$:
Kritische Punkte $P_1(\mathrm{e}^{-1/2}, 0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(1,-1)$.
f hat in P_1 ein Minimum, in P_2 und P_3 kein Extremum.

2) $f(x,y) = (x^2+y^2)(x^2+y^2-3x)+2x^2$:
Längs jeder Geraden durch $(0,0)$ hat f ein Minimum. Aber es gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \frac{3}{2}\cos\varphi \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } \varphi \to \frac{\pi}{2}$$

und $f(x,y) = -\dfrac{9}{16}\cos^4\varphi < 0$. Also hat f in $(0,0)$ kein Minimum.

11.10 Zusammenhänge

11.53 Verschiedene Ableitungsbegriffe: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$:

(i) f ist in x_0 Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $f'(x_0)$.

$\Downarrow$

(ii) f ist in x_0 schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung $Df(x_0)$.

$\Downarrow$

(iii) f ist in x_0 in jede Richtung $v \in \mathbb{R}^d$ differenzierbar mit Richtungsableitung $Df(x_0)(v)$.

$\Downarrow$

(iv) f ist in x_0 partiell differenzierbar nach $x_1, \ldots, x_d$.

11.54 Weitere Beziehungen: 1) (ii) $\Rightarrow$ $Df(x_0)(v) = J_f(x_0)v$ für $v \in \mathbb{R}^d$ mit

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \ldots & \partial_d f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \ldots & \partial_d f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \partial_2 f_m(x_0) & \ldots & \partial_d f_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

2) (i) $\Rightarrow$ $f'(x_0)(v) = Df(x_0)(v) = J_f(x_0)v$. Wir schreiben $f'(x_0) = J_f(x_0)$.

3) (iv) extended:

f in $B_\delta(x_0)$ partiell differenzierbar nach $x_1, \ldots, x_d$ und $\partial_j f$ stetig in x_0 $(j = 1, \ldots, d)$

$\Rightarrow$ (i).

11.55 Beispiele: $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m : x \mapsto \text{konst} \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d$ ($0 = m \times d$-Matrix),
$\mathrm{Id} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d : x \mapsto x \;\Rightarrow\; f'(x) = E$ für $x \in \mathbb{R}^d$ ($E = d \times d$-Einheitsmatix),
$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle x, x\rangle \;\Rightarrow\; f'(x) = 2(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ für $x \in \mathbb{R}^d$.

12 Implizit definierte Funktionen

12.1 Banachscher Fixpunktsatz: Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum, $f : M \to M$ eine **Kontraktion**, d.h.

$$\exists c \in [0,1[\;\; \forall x,y \in M : d\big(f(x),f(y)\big) \le c\, d(x,y).$$

Dann besitzt f genau einen **Fixpunkt** x_0, d.h.

$$\exists! x_0 \in M : f(x_0) = x_0.$$

Beweis: Existenz: Wähle irgendein $x_1 \in M$, definiere rekursiv $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Schritt 1: Die Folge (x_n) ist Cauchy-Folge, konvergiert also in M.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n-1}) = d\big(f(x_{n-1}),f(x_{n-2})\big) &\le c\, d(x_{n-1},x_{n-2}) \\ &\le c^2\, d(x_{n-2},x_{n-3}) \\ &\;\vdots \\ &\le c^{n-2}\, d(x_2,x_1). \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N_\varepsilon : \dfrac{c^{n-1}}{1-c} d(x_2,x_1) < \varepsilon$.

Für $m > n > N_\varepsilon$ folgt

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\le} d(x_m,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_n) \\ &\underset{\text{mehrfach}}{\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\le}} \sum_{j=n+1}^{m} d(x_j,x_{j-1}) \\ &\le \sum_{j=n+1}^{m} c^{j-2} d(x_2,x_1) \\ &\underset{j=k+n+1}{\overset{k=j-n-1}{\le}} d(x_2,x_1) \sum_{k=0}^{\infty} c^{n-1+k} \\ &= d(x_2,x_1) \frac{c^{n-1}}{1-c} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Schritt 2: Sei $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt $f(x_0) = x_0$.

Da f eine Kontraktion ist, ist f stetig: $d(x,y) < \varepsilon \;\Rightarrow\; d\big(f(x),f(y)\big) \le c\, d(x,y) < \varepsilon$.

$x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; d\big(f(x_0),x_0\big) = \lim\limits_{n\to\infty} d\big(f(x_n),x_n\big) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1},x_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} c^{n-1} d(x_2,x_1) = 0.$
$\Rightarrow\; f(x_0) = x_0$.

Eindeutigkeit: Seien $x_0, x_1 \in M$ mit $f(x_j) = x_j$.
$\Rightarrow\; d(x_0,x_1) = d\big(f(x_0),f(x_1)\big) \le c\, d(x_0,x_1) \overset{0\le c<1}{\Rightarrow} d(x_0,x_1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_0.$ □

12.2 Beispiel (wichtig!): Sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$. Für $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt nach dem Mittelwertsatz 11.32

$$\begin{aligned} |f_j(x) - f_j(y)| &= \left| \sum_{k=1}^{d} \partial_k f_j\big(x + \xi(y-x)\big)(x_k - y_k) \right| \\ &\le d \max_{k \in \{1,\dots,d\}} \sup_{\xi \in [0,1]} \big|\partial_k f_j\big(x + \xi(y-x)\big)\big| \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

für jede Koordinatenfunktion f_j. Es folgt

$$\begin{aligned} \big\|f(x) - f(y)\big\| &= \left(\sum_{j=1}^{d} \big(f_j(x) - f_j(y)\big)^2 \right)^{1/2} \\ &\le d^{3/2} \max_{j,k \in \{1,\dots,d\}} \sup_{\xi \in [0,1]} \big|\partial_k f_j\big(x + \xi(y-x)\big)\big| \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$$c := d^{3/2} \max_{j,k \in \{1,\dots,d\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \big|\partial_k f_j(x)\big| < 1$$

ist f eine Kontraktion:

$$d\big(f(x), f(y)\big) = \big\|f(x) - f(y)\big\| \le c\|x - y\| = c\, d(x,y).$$

12.3 Implizit definierte Funktionen: 1) Flächen im $\mathbb{R}^3$ werden oft durch Gleichungen definiert. Z.B. besteht die Einheitssphäre aus allen Punkten (x, y, z), die folgende Gleichung erfüllen:

$$F(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Oft wird eine explizite Darstellung $z = \varphi(x, y)$ benötigt. Bei der Kugel ist diese nur **lokal** möglich, z.B. Halbkugelfläche

$$z = \varphi(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \text{für } x^2 + y^2 < 1.$$

Es gilt dann

$$F\big(x, y, \varphi(x,y)\big) = 0 \qquad \text{für } x^2 + y^2 < 1.$$

Man nennt $z = \varphi(x, y)$ eine **lokale Auflösung** der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ nach z.

2) Gegeben ist ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_1\big(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_m\big) &= 0 \\ F_2\big(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_m\big) &= 0 \\ \vdots \qquad & \;\vdots\;\; \vdots \\ F_m\big(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_m\big) &= 0 \end{aligned} \tag{$*$}$$

mit m Gleichungen für die m Unbekannten $y_1, \dots, y_m$. Die Gleichungen hängen von den Parametern $x_1, \dots, x_d$ ab. Eine lokale Auflösung ist eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \supseteq B_\delta(x_0) \mapsto \mathbb{R}^m$, so dass

$$\begin{array}{rcl} F_1\big(x, \varphi(x)\big) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_m\big(x, \varphi(x)\big) & = & 0 \end{array} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in B_\delta(x_0).$$

Falls $\varphi(x)$ eindeutig ist: Die Funktion φ ist durch $(*)$ **implizit** definiert.

12.4 Satz über implizite Funktionen: Seien $D_x \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $D_y \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $F : D_x \times D_y \to \mathbb{R}^m$, $(x_0, y_0) \in D_x \times D_y$. Gelten

1) $F(x_0, y_0) = 0$,

2) $F \in C^1(D_x \times D_y \to \mathbb{R}^m)$,

3) die $m \times m$-Matrix $\partial_y F(x_0, y_0) := \begin{pmatrix} \partial_{y_1} F_1(x_0, y_0) & \dots & \partial_{y_m} F_1(x_0, y_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{y_1} F_m(x_0, y_0) & \dots & \partial_{y_m} F_m(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ ist invertierbar,

dann existieren $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass

$$\forall x \in B_{\delta_1}(x_0) \subseteq \mathbb{R}^d \ \exists! \varphi(x) \in B_{\delta_2}(y_0) \subseteq \mathbb{R}^m : F\big(x, \varphi(x)\big) = 0.$$

Außerdem gilt $\varphi \in C^1\big(B_{\delta_1}(x_0) \to \mathbb{R}^m\big)$.

Beweis: Setze $G(x, y) := y - \big(\partial_y F(x_0, y_0)\big)^{-1} F(x, y)$ für $(x, y) \in D_x \times D_y$.

1) Gesucht: Fixpunkt von $G(x, .)$:

$$G(x, y) = y \ \Leftrightarrow \ \big(\partial_y F(x_0, y_0)\big)^{-1} F(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ F(x, y) = 0.$$

2) Wahl des metrischen Raumes M:

$$\begin{array}{rcl} \partial_y G(x, y) & = & E_{d\times d} - \big(\partial_y F(x_0, y_0)\big)^{-1} \partial_y F(x, y) \\ & = & \big(\partial_y F(x_0, y_0)\big)^{-1} \big(\partial_y F(x_0, y_0) - \partial_y F(x, y)\big) \\ & \to & 0 \qquad \text{für } (x, y) \to (x_0, y_0), \end{array}$$

da $\partial_y F$ stetig in (x_0, y_0). Wähle $\delta_0 > 0$, so dass

$$\sup_{x \in B_{\delta_0}(x_0)} \sup_{y \in B_{\delta_0}(y_0)} \max_{1 \le j,k \le m} \big|\partial_{y_j} G_k(x, y)\big| \ \le \ \frac{1}{2d^{3/2}}.$$

Setze $M := \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - y_0\| \le \delta_0\}$. Mit $d(y, \tilde{y}) = \|y - \tilde{y}\|$ ist (M, d) ein vollständiger metrischer Raum.

F ist stetig in (x_0, y_0) $\Rightarrow$

$$\exists \delta_1 \in \,]0, \delta_0[\;\; \forall x \in B_{\delta_1}(x_0) : \left\| \big(\partial_y F(x_0, y_0)\big)^{-1} \underbrace{\big(F(x, y_0) - F(x_0, y_0)\big)}_{\to 0 \text{ für } x \to x_0} \right\| \;<\; \frac{\delta_0}{2}$$

Sei nun $x_1 \in B_{\delta_1}(x_0)$ beliebig, aber fest gewählt.

3) Es gilt $\mathrm{Bild}\big(G(x_1, .)\big) \subseteq M$: Sei $y \in M$, also $\|y - y_0\| \leq \delta_0$. Zeige $\|G(x_1, y) - y_0\| \leq \delta_0$.

$$\begin{aligned} \big\|G(x_1, y) - y_0\big\| &= \big\|G(x_1, y) - G(x_0, y_0)\big\| \\ &\leq \underbrace{\big\|G(x_1, y) - G(x_1, y_0)\big\|}_{(1)} + \underbrace{\big\|G(x_1, y_0) - G(x_0, y_0)\big\|}_{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &\overset{\text{wie in 12.2}}{\leq} d^{3/2} \sup_{y \in B_{\delta_0}(y_0)} \max_{1 \leq j,k \leq m} \big|\partial_{y_j} G_k(x_1, y)\big| \cdot \|y - y_0\| \\ &\leq d^{3/2} \frac{1}{2d^{3/2}} \|y - y_0\| \\ &\leq \frac{\delta_0}{2}, \\ (2) &= \Big\|y_0 - \big(\partial_y F(x_0, y_0)\big)^{-1} F(x_1, y_0) - \big(y_0 - \big(\partial_y F(x_0, y_0)\big)^{-1} F(x_0, y_0)\big)\Big\| \\ &= \Big\|\big(\partial_y F(x_0, y_0)\big)^{-1} \big(F(x_1, y_0) - F(x_0, y_0)\big)\Big\| \\ &< \frac{\delta_0}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\|G(x_1, y) - y_0\| \;<\; \delta_0$

4) $G(x_1, .)$ ist eine Kontraktion: Seien $y, \tilde{y} \in M$:

$$\begin{aligned} \big\|G(x_1, y) - G(x_1, \tilde{y})\big\| &\overset{\text{wie in 12.2}}{\leq} d^{3/2} \sup_{y \in B_{\delta_0}(y_0)} \max_{1 \leq j,k \leq m} \big|\partial_{y_j} G_k(x_1, y)\big| \cdot \|y - \tilde{y}\| \\ &\leq d^{3/2} \frac{1}{2d^{3/2}} \|y - \tilde{y}\| \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}}_{=:c} \|y - \tilde{y}\|. \end{aligned}$$

Mit dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun: $\exists! y(x_1) \in M : G(x_1, y(x_1)) = y(x_1)$.

Definiere $\varphi(x) := y(x)$ für $x \in B_{\delta_1}(x_0)$. Dann gilt

$F\big(x, \varphi(x)\big) = 0$ für $x \in B_{\delta_1}(x_0)$ und
$y = \varphi(x)$ ist die einzige Lösung von $F(x, y) = 0$ mit $\|y - y_0\| \leq \delta_0$.

5) Zeige: φ ist stetig in x_0. Beachte: $F(x_0, y_0) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(x_0) = y_0$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $\tilde{\delta}_0 := \min\{\varepsilon, \delta_0\} > 0$ und $\tilde{M} := \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - y_0\| < \tilde{\delta}_0\}$. Führe Schritt 3 und 4 für $x_1 \in B_{\tilde{\delta}_1}(x_0)$ mit geeignetem $\tilde{\delta}_1 \in \,]0, \tilde{\delta}_0[$ durch.

$$\Rightarrow \;\exists! \tilde{y} \in \tilde{M} : G(x_1, \tilde{y}) = \tilde{y} \text{ bzw. } F(x, \tilde{y}) = 0.$$

Da $\tilde{M} \subseteq M$ und die Lösung von $F(x,y) = 0$ eindeutig in M ist, folgt $\tilde{y} = \varphi(x)$.
$\Rightarrow\ \forall x_1 \in B_{\tilde{\delta}_1}(x_0) : \big\|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)\big\| \ = \ \|\tilde{y} - y_0\| \leq \tilde{\delta}_0 \leq \varepsilon.$
Oder anders: $\|x_1 - x_0\| < \tilde{\delta}_1 \ \Rightarrow\ \big\|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)\big\| \leq \varepsilon.$
Dies beweist die Stetigkeit von φ in x_0.

6) Zeige, dass φ stetig ist: Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_y F(x_0,y_0) \text{ invertierbar } &\Leftrightarrow\ \det\big(\partial_y F(x_0,y_0)\big) \neq 0 \\
\overset{\text{partielle Ableitungen}}{\underset{\text{von } F \text{ sind stetig}}{\Rightarrow}} &\quad \exists \delta_3 \in \,]0,\delta_1[\ \ \forall x \in B_{\delta_3}(x_0)\ \forall y \in B_{\delta_3}(y_0) : \det\big(\partial_y F(x,y)\big) \neq 0. \\
\Rightarrow &\quad \exists \delta_3 \in \,]0,\delta_1[\ \ \forall x \in B_{\delta_3}(x_0)\ \forall y \in B_{\delta_3}(y_0) : \partial_y F(x,y) \text{ ist invertierbar.}
\end{aligned}$$

Wende 1) – 5) im Punkt $\big(x,\varphi(x)\big)$ anstelle von (x_0,y_0) an
$\Rightarrow$ neue Lösung = alte Lösung wegen Eindeutigkeit
$\Rightarrow$ φ ist stetig in x für alle $x \in B_{\delta_3}(x_0)$ falls $\delta_3 < \delta_0$, sonst für alle $x \in B_{\delta_0}(x_0)$.

7) Differenzierbarkeit wird nach dem folgenden Satz bewiesen.

□

12.5 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $A : D \to \mathbb{R}^{m^2}$ eine matrixwertige Funktion, $A(x) = \big(a_{jk}(x)\big)_{j,k=1,\ldots,m}$, $x_0 \in D$, $\forall j,k = 1,\ldots m : a_{jk}$ stetig in x_0, $\det\big(A(x_0)\big) \neq 0$. Dann gelten

1) $\exists \delta > 0\ \forall x \in B_\delta(x_0) : \det\big(A(x)\big) \neq 0.$

2) $\big(A(x)\big)^{-1} \to \big(A(x_0)\big)^{-1}$ für $x \to x_0$ (Konvergenz der Einträge in der Matrix).

Beweis: **1)** Z.B. $m = 2$: $\det\big(A(x)\big) = \det\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x)\end{pmatrix} \ = \ a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{12}(x)a_{21}(x)$
$\Rightarrow$ $\det\big(A(x)\big)$ ist stetig in x_0
$\Rightarrow$ Behauptung.
Allgemeines m: Leibniz-Formel: $\det\big(A(x)\big)$ = Summe von Produkten aus $a_{jk}(x)$
$\Rightarrow$ $\det\big(A(x)\big)$ ist stetig in x_0.

2) Z.B. $n = 2$: Cramersche Regel:

$$\big(A(x)\big)^{-1} \ = \ \frac{1}{\det\big(A(x)\big)}\begin{pmatrix} a_{22}(x) & -a_{12}(x) \\ -a_{21}(x) & a_{11}(x)\end{pmatrix} \ \to\ \big(A(x_0)\big)^{-1} \quad \text{für } x \to x_0.$$

Im allgemeinen Fall genauso mit Cramerscher Regel

$$\big(A(x)\big)^{-1} \ = \ \frac{1}{\det\big(A(x)\big)}\operatorname{adj}\big(A(x)\big) \ \to\ \big(A(x_0)\big)^{-1} \quad \text{für } x \to x_0.$$

□

Beweis des Satzes über implizite Funkionen, Fortsetzung: Bisher bewiesen: $\exists \delta_0, \delta_3 > 0$:

$$\forall x \in B_{\delta_3}(x_0)\ \exists! \varphi(x) \in \mathbb{R}^d : \|\varphi(x) - y_0\| \le \delta_0 \ \wedge\ F\big(x, \varphi(x)\big) = 0$$

und φ ist stetig. Daher ist $\delta_4 \in \,]0, \delta_3]$ wählbar, so dass $\|x - x_0\| < \delta_4 \Rightarrow \|\varphi(x) - y_0\| < \delta_0$.

Nun muss noch die Differenzierbarkeit von φ nachgewiesen werden. Zeige

$$\partial_{x_l} \varphi(x) \;=\; -\big(\partial_y F\big(x, \varphi(x)\big)\big)^{-1} (\partial_{x_l} F)\big(x, \varphi(x)\big) \quad \text{für } x \in B_{\delta_3}(x_0) \qquad (*)$$

für $l = 1, \ldots, d$. Mit 12.5 folgt dann aus der Stetigkeit von φ auch die Stetigkeit von $\partial_{x_l}\varphi$
$\Rightarrow\ \varphi \in C^1(B_{\delta_3}(x_0) \to \mathbb{R}^d)$.
Sei $h \neq 0$. Für $j = 1, \ldots, m$ gilt mit zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \frac{1}{h}\Big(\underbrace{F_j\big(x + h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big)}_{=0} - F_j\big(x, \varphi(x + h\, e_l)\big)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{h}\Big(F_j\big(x, \varphi(x + h\, e_l)\big) - \underbrace{F_j\big(x, \varphi(x)\big)}_{=0}\Big) \\
&=\; \frac{1}{h}(\partial_x F_j)\big(x + \xi_j h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big)\,(x + h\, e_l - x) \\
&\quad + \frac{1}{h}(\partial_y F_j)\big(x, \varphi(x) + \eta_j(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x))\big)\big(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x)\big),
\end{aligned}$$

wobei $\xi_j, \eta_j \in \,]0, 1[$. Fasse die Koordinaten $F_1, \ldots, F_m$ zu einem Vektor zusammen:

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \begin{pmatrix} (\partial_{x_l} F_1)\big(x + \xi_1 h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big) \\ \vdots \\ (\partial_{x_l} F_m)\big(x + \xi_m h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big) \end{pmatrix} \\
&\quad + \underbrace{\begin{pmatrix} (\partial_y F_1)\big(x, \varphi(x) + \eta_1(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x))\big) \\ \vdots \\ (\partial_y F_m)\big(x, \varphi(x) + \eta_m(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x))\big) \end{pmatrix}}_{=:A(h)\ \overset{h \to 0}{\to}\ (\partial_y F)(x, \varphi(x))\ \text{invertierbar}} \frac{1}{h}\big(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x)\big).
\end{aligned}$$

Aus Satz 12.5: $A(h)$ ist für kleines $|h|$ invertierbar und $\big(A(h)\big)^{-1} \to \big((\partial_y F)(x, \varphi(x))\big)^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \frac{1}{h}\big(\varphi(x + h\, e_l) - \varphi(x)\big) \;&=\; -\big(A(h)\big)^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} (\partial_{x_l} F_1)\big(x + \xi_1 h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big) \\ \vdots \\ (\partial_{x_l} F_m)\big(x + \xi_m h\, e_l, \varphi(x + h\, e_l)\big) \end{pmatrix}}_{\to\ (\partial_{x_l} F\big(x, \varphi(x)\big))} \\
&\overset{h \to 0}{\to}\ -(\partial_y F)\big(x, \varphi(x)\big)\big(\partial_{x_l} F\big(x, \varphi(x)\big)\big).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ (*)$. $\square$

12.6 Berechnung der Ableitung: Sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt, so ist die Auflösungsfunktion φ differenzierbar. Die Ableitung kann dann mit der Kettenregel berechnet werden: Beachte

$$F'(x, y) \;=\; \big(\partial_x F(x, y) \quad \partial_y F(x, y)\big) \quad (m \times (d + m)\text{-Matrix}).$$

Definiere $\Phi(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d}(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi'(x) = \begin{pmatrix} E_{d\times d} \\ \varphi'(x) \end{pmatrix}$ ($(d+m)\times d$-Matrix). Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= F\big(x,\varphi(x)\big) \\ \Leftrightarrow 0 &= (F\circ\Phi)(x) \\ \Rightarrow 0 &= (F\circ\Phi)'(x) = F'(\Phi(x))\circ\Phi'(x) = \partial_x F\big(x,\varphi(x)\big)E_{d\times d} + \partial_y F\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x) \\ \Rightarrow \varphi'(x) &= -\big(\partial_y F\big(x,\varphi(x)\big)\big)^{-1}(\partial_x F)\big(x,\varphi(x)\big). \end{aligned}$$

Falls $F \in C^k(D_x \times D_y \to \mathbb{R}^m) \Rightarrow$ Formel kann differenziert werden $\Rightarrow \varphi \in C^k(B_{\delta_1}(x_0) \to \mathbb{R}^m)$.

12.7 Hilfssatz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $g : D \to \mathbb{R}^m$ stetig, $O \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Dann ist $g^{-1}(O) = \{x \in D : g(x) \in O\}$ offen im $\mathbb{R}^d$.

Beweis: Sei $x_0 \in g^{-1}(O)$. Zeige: $\exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subseteq g^{-1}(O)$.

O offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon\big(g(x_0)\big) \subseteq O$

g stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow g(x) \in B_\varepsilon\big(g(x_0)\big) \subseteq O$

$\Rightarrow B_\delta(x_0) \subseteq g^{-1}(O)$. $\square$

Erinnerung: Formel aus Analysis 1: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

12.8 Anwendung: Umkehrfunktion: Gegeben: $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^d$.
Gesucht: Zu $y \in \mathrm{Bild}(f)$ suche $x \in D$ mit $f(x) = y$
Methode: Definiere $F(y,x) := y - f(x)$ für $y \in \mathbb{R}^d, x \in D$,
suche lokale Auflösung $x = \varphi(y)$ mit $F\big(y,\varphi(y)\big) = 0 \Leftrightarrow y = f\big(\varphi(y)\big)$.
Satz über implizite Funktionen anwenden. Welche Voraussetzungen muss f dafür erfüllen?

0) $F : D \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, also $m = d$.

1) $F(x_0, y_0) = 0$: Ein $x_0 \in D$ auswählen, $y_0 := f(x_0)$ setzen.

2) $F \in C^1(D_x \times D_y \to \mathbb{R}^d)$: $D_x := D$, $D_y := \mathbb{R}^d$
$\partial_y F(x,y) = E$ ist stetig
$\partial_x F(x,y) = -f'(x)$. Setze voraus: $f \in C^1(D \to \mathbb{R})$.

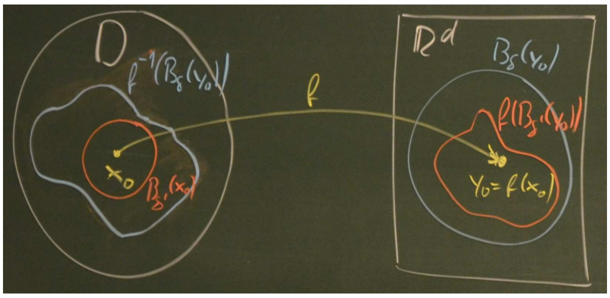
3) $\partial_x F(x_0, y_0) = -f'(x_0)$ muss invertierbar sein.

Dann besagt der Satz über implizite Funktionen: $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$:

$$\forall y \in B_{\delta_1}(y_0)\ \exists! \varphi(y) \in B_{\delta_2}(x_0) : F\big(y,\varphi(y)\big) = 0 \text{ bzw. } y = f\big(\varphi(y)\big).$$

Das bedeutet: Lokal auf $B_{\delta_1}(y_0)$ existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) := \varphi(y)$, denn $f\big(\varphi(y)\big) = y$. Außerdem gilt $f^{-1} = \varphi \in C^1(B_{\delta_1}(y_0) \to \mathbb{R}^d)$. Wie in 12.6 erhält man

$$0 = y - f\big(\varphi(y)\big) \quad \underset{\text{Kettenregel}}{\overset{\text{Ableiten}}{\Rightarrow}} \quad 0 = E_{d\times d} - \underbrace{f'\big(f^{-1}(y)\big)}_{\text{invertierbar}} \circ \big(f^{-1}(y)\big)'$$
$$\Rightarrow \quad \big(f^{-1}(y)\big)' = \Big(f'\big(f^{-1}(y)\big)\Big)^{-1}.$$



12.7 $\Rightarrow$ $f^{-1}\big(B_{\delta_1}(y_0)\big)$ ist offen $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}\big(B_{\delta_1}(y_0)\big)$.
Dann ist $f : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^d$ injektiv.
f^{-1} stetig $\overset{12.7}{\Rightarrow}$ $f\big(B_\delta(x_0)\big) = \big(\underbrace{f^{-1}}_{\text{stetig}}\big)^{-1}\big(B_\delta(x_0)\big)$ ist offen.
Außerdem ist f^{-1} ist auf $f\big(B_\delta(x_0)\big)$ stetig differenzierbar.

12.9 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $f \in C^1(D \to \mathbb{R})$, $x_0 \in D$, $f'(x_0)$ invertierbare $d \times d$-Matrix. Dann

$$\exists \delta > 0 \;\; f : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^d \text{ ist injektiv.}$$

Außerdem ist $f\big(B_\delta(x_0)\big)$ offen, und es gelten

$$f^{-1} \in C^1\Big(f\big(B_\delta(x_0)\big) \to \mathbb{R}^d\Big)$$
$$\big(f^{-1}(y)\big)' = \Big(f'\big(f^{-1}(y)\big)\Big)^{-1} \qquad \text{für } y \in f\big(B_\delta(x_0)\big).$$

Gilt zusätzlich $f \in C^k(D \to \mathbb{R}^d)$, so folgt $f^{-1} \in C^k\Big(f\big(B_\delta(x_0)\big) \to \mathbb{R}^d\Big)$.
Man sagt: $f : B_\delta(x_0) \to f\big(B_\delta(x_0)\big)$ ist ein **C^k-Diffeomorphismus** (d.h. $f : B_\delta(x_0) \to f\big(B_\delta(x_0)\big)$ ist bijektiv und f, f^{-1} sind k-Mal stetig differenzierbar).

12.10 Wichtigste Form der Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big) \;=\; (\partial_{x_1} f)(\ldots)g_1'(t) + (\partial_{x_2} f)(\ldots)g_2'(t) + (\partial_{x_3} f)(\ldots)g_3'(t)$$

falls g_1, g_2, g_3 differenzierbar in t und f differenzierbar in $\big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big)$.

12.11 Beispiel Polarkoordinaten:

$$\begin{array}{rcl} x(r,\varphi) &=& r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) &=& r\sin\varphi \end{array} \quad \text{für } r>0,\ 0<\varphi<2\pi \text{ (oder } \varphi_0<\varphi<2\pi+\varphi_0\text{).}$$

Dadurch ist eine bijektive Abbildung $]0,\infty[\times]0,2\pi[\ni(r,\varphi)\mapsto(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):x\geq 0\}$ definiert.

Umkehrfunktion? $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ist klar. $\varphi(x,y)=?$.

Es gilt

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right)=r\neq 0 \Rightarrow$ die Abbildung ist lokal invertierbar und

$$\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1}\Bigg|_{(r,\varphi)=(r(x,y),\varphi(x,y))} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Diese Formel ist für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ohne Ausnahmen gültig.
Umrechnung von Ableitungen:
Für $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sei $F(r,\varphi):=f\big(x(r\varphi),y(r,\varphi)\big)=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$. Mit Kettenregel:

$$F'(r,\varphi) \;=\; (\partial_r F,\partial-\varphi F) \;=\; f'\big(x(r\varphi),y(r,\varphi)\big)\circ\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$$

Ist umgekehrt $G(x,y):=g\big(r(x,y),\varphi(x,y)\big)$, so ergibt die Kettenregel

$$G'(x,y) \;=\; g'\big(r(x,y),\varphi(x,y)\big)\circ\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)}$$

12.1 Extrema unter Nebenbedingungen

12.12 Beispiel: Gesucht ist der Quader mit dem größten Volumen und Oberflächeninhalt 1:

Maximiere	$f(a,b,c)=abc$	(Z)
unter der Nebenbedingung	$g(a,b,c)=2ab+2ac+2bc=1$	(N)

Lösungsmöglichkeit: Löse (N) nach c auf: $c=\dfrac{1-2ab}{2(a+b)}$, setze in (Z) ein und löse Extremwertproblem in zwei Variablen.

Bei komplizierte Nebenbedingung (N), z.B. $g(a,b,c)=a^2+b^2+c^2$ oder mehreren Nebenbedingungen, ist globale Auflösung nach einer Variablen eventuell gar nicht möglich.

12.13 Notwendige Bedingung: Seien $m<d$, $D\subseteq\mathbb{R}^d$ offen, $f\in C^1(D\to\mathbb{R})$, $g\in C^1(D\to\mathbb{R}^m)$ mit $\mathrm{Rang}\big(g'(x)\big)=m$ auf D und

$$N \;:=\; \big\{x\in D: g(x)=0\big\}.$$

(N ist die Menge der $x \in D$, die die m Nebenbedingungen $g_1(x) = 0 \wedge \ldots \wedge g_m(x) = 0$ erfüllen.)

Hat die eingeschränkte Funktion $f\big|_N$ ein lokales Extremum in $x_0 \in N$, so folgt

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m : f'(x_0) + \lambda^T g'(x_0) \;=\; 0$$

bzw. ausgeschrieben

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m \;\forall j = 1, \ldots d : \;\partial_j f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \partial_j g_k(x_0) \;=\; 0.$$

Beweis: Wegen $\operatorname{Rang}\big(g'(x_0)\big) = m$ gilt (eventuell nach Vertauschung der Reihenfolge der Koordinaten)

$$\operatorname{Rang}\big(\partial_k g_j(x_0)\big)_{j,k=1,\ldots,m} = m \text{ bzw. äquivalent } \det\big(\partial_k g_j(x_0)\big)_{j,k=1,\ldots,m} \neq 0.$$

Setze $y = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,\; z = (x_{m+1}, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-m}$, entsprechend y_0, z_0.

$$\Rightarrow \;g(y_0, z_0) = 0 \text{ und } \partial_y g(y_0, z_0) = \big(\partial_k g_j(x_0)\big)_{j,k=1,\ldots,m} \text{ ist invertierbar.}$$

Beachte

$$\begin{aligned} f'(x_0) + \lambda^T g'(x_0) \;=\; 0 \;&\Leftrightarrow\; \big(\partial_y f(y_0,z_0), \partial_z f(y_0,z_0)\big) + \lambda^T\big(\partial_y g(y_0,z_0), \partial_z g(y_0,z_0)\big) \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow\; \underbrace{\partial_y f(y_0,z_0) + \lambda^T \partial_y g(y_0,z_0) = 0}_{(1)} \wedge \;\underbrace{\partial_z f(y_0,z_0) + \lambda^T \partial_z g(y_0,z_0) = 0}_{(2)} \end{aligned}$$

1) Bestimmung des Vektors λ: Das lineare Gleichungssystem

$$\big(\partial_y g(x_0, y_0)\big)^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \;=\; -\begin{pmatrix} \partial_{y_1} f(y_0, z_0) \\ \cdots \\ \partial_{y_m} f(y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

besitzt eine eindeutige Lösung $\lambda =: \lambda_0 \in \mathbb{R}^m$. Transponieren der Gleichung:

$$\lambda_0^T \partial_y g(y_0, z_0) \;=\; -\partial_y f(y_0, z_0).$$

$\Rightarrow\;\exists! \lambda_0 \in \mathbb{R}^m$: (1) ist erfüllt.

2) Nachweis von (2) für $\lambda = \lambda_0$:

Wende den Satz über implizite Funktionen auf

$$g(y, z) = 0, \quad g(y_0, z_0) = 0, \quad \partial_y g(y_0, z_0) \text{ invertierbar}$$

an $\Rightarrow$ Es existiert eine eindeutige lokale Auflösung $\varphi \in C^1\big(B_\delta(z_0) \to \mathbb{R}^m\big)$ so dass

$$g\big(\varphi(z), z\big) = 0 \text{ für } z \in B_\delta(z_0).$$

Wir benötigen φ'. Mit Kettenregel:

$$\begin{aligned}\underbrace{\partial_y g(y_0,z_0)\circ\varphi'(z_0)}_{\text{Matrix Mal Vektor}}+\partial_z g(y_0,z_0) &= 0\\ \Rightarrow\ \varphi'(z_0)=-\big(\partial_y g(y_0,z_0)\big)^{-1}\partial_z g(y_0,z_0).\end{aligned}$$

Setze $y=\varphi(z)$ in f ein:

$$F(z) := f\big(\varphi(z),z\big).$$

$f\big|_N$ hat lokales Extremum in x_0 $\Rightarrow$ F hat ein lokales Extremum in z_0 $\Rightarrow$ $F'(z_0)=0$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad (\partial_y f)(y_0,z_0)\circ\varphi'(z_0)+\partial_z f(y_0,z_0) = 0\\
&\Leftrightarrow\quad (\partial_y f)(y_0,z_0)\Big(-\big(\partial_y g(y_0,z_0)\big)^{-1}\partial_z g(y_0,z_0)\Big)+\partial_z f(y_0,z_0) = 0\\
&\underset{\lambda=\lambda_0}{\overset{(1)}{\Rightarrow}}\quad \big(\lambda_0^T\partial_y g(y_0,z_0)\big)\big(\partial_y g(y_0,z_0)\big)^{-1}\partial_z g(y_0,z_0)+\partial_z f(y_0,z_0) = 0\\
&\overset{\text{AG}}{\Leftrightarrow}\quad \lambda_0^T\partial_z g(y_0,z_0)+\partial_z f(y_0,z_0) = 0\\
&\Leftrightarrow\quad (2)
\end{aligned}$$

□

12.14 Bemerkung: Zur Bestimmung von Kandidaten für lokale Extrema werden die $d+m$ Gleichungen

$$\begin{aligned}f'(x_0)+\lambda^T g'(x_0) &= 0 \quad (d\text{ Gleichungen})\\ g'(x_0) &= 0 \quad (m\text{ Gleichungen})\end{aligned}$$

für die $d+m$ Unbekannten $x_1,\dots,x_d,\lambda_1,\dots,\lambda_m$ gelöst.

12.15 Methode von Lagrange: Seien die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt. Bilde die Funktion

$$F(x,\lambda) := f(x)+\lambda^T g(x) \text{ für } x\in D,\ \lambda\in\mathbb{R}^m.$$

Hat $f\big|_N$ in $x_0\in N$ ein lokales Extremum, so folgt

$$\exists\lambda_0\in\mathbb{R}^m : F'(x_0,\lambda_0) = 0.$$

Beweis: Beachte: $F'=(\partial_x F,\partial_\lambda F)$. Nach letztem Satz:

$$\exists\lambda_0\in\mathbb{R}^m : f'(x_0)+\lambda_0^T g'(x_0)=0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\partial_x F(x_0,\lambda_0) &= f'(x_0)+\lambda_0^T g'(x_0) = 0,\\ \partial_\lambda F(x_0,\lambda_0) &= g(x_0) \overset{x_0\in N}{=} 0.\end{aligned}$$

□

12.16 Beispiel: Gesucht ist das Maximum von $f(a,b,c) = abc$
unter der Nebenbedingung $g(a,b,c) = 2ab + 2ac + 2bc = 1$.
Hinweis: Lös man die Nebenbedingung nach c auf: $c = \dfrac{1-2ab}{2(a+b)}$, so folgt mit der Abschätzung $(a+b)^2 \geq 4ab$:

$$0 \;\leq\; f(a,b,c) \;\leq\; ab\frac{1-2ab}{4\sqrt{ab}} \;=\; \frac{1}{4}\sqrt{ab}(1-2ab).$$

in $D = \{(a,b,c) : a,b,c > 0\}$. Man sieht, dass f am Rand von D verschwindet.

12.17 Satz von Heine-Borel: In $\mathbb{R}^d$ gilt für $K \subseteq \mathbb{R}^d$

$$K \text{ ist kompakt } \Leftrightarrow K \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.}$$

Der Beweis verläuft entsprechend dem Fall $d = 1$.

12.18 Satz: Seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume, $D \subseteq M_1$ offen, $f : D \to M_2$ stetig. Ist $K \subseteq D$ kompakt, dann ist $f(K)$ kompakt.

Beweis: Sei $O = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, d.h. die Elemente von O sind offen und $f(K) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} O_\alpha$.

Zeige: $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A : f(K) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} O_{\alpha_j}$. Dann folgt die Kompaktheit von $f(K)$.
Betrachte $O' := \left\{f^{-1}(O_\alpha) : \alpha \in A\right\}$. Dann:

1) $\forall \alpha \in A : f^{-1}(O_\alpha)$ ist offen. Siehe Beweis von Satz 12.7.

2) O' ist Überdeckung von K, denn $x \in K \;\Rightarrow\; \exists \alpha \in A : f(x) \in O_\alpha \;\Rightarrow\; x \in f^{-1}(O_\alpha)$.

3) O' offene Überdeckung von $K \;\wedge\; K$ kompakt

$$\Rightarrow\; \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A : K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(O_{\alpha_j}).$$

$$\Rightarrow\; f(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f\big(f^{-1}(O_{\alpha_j})\big) = \bigcup_{j=1}^{n} O_{\alpha_j}.$$

□

12.19 Folgerung: Ist (M,d) metrischer Raum, $D \subseteq M$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $K \subseteq D$ kompakt. Dann besitzt $f\big|_K$ auf K ein Maximum und ein Minimum:

$$\exists x_1, x_2 \in K\ \forall x \in K : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Beweis: $f(K)$ ist kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$
$\overset{\text{Satz 6.32}}{\Rightarrow} \sup\{f(x) : x \in K\} = \sup\{y : y \in f(K)\} \in f(K)$.
Genauso für Minimum.

□

13 Gleichmäßigkeit

13.1 Vertauschung von Grenzwert und Integral

13.1 Frage: Gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}x \;=\; \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathsf{d}x?$$

Antwort: Nicht allgemein, denn

$$f_n(x) \;:=\; \begin{cases} n^2x & 0\le x<\frac{1}{n} \\ 2n-n^2x & \frac{1}{n}\le x<\frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n}\le x \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \forall n\in\mathbb{N}: \int_0^1 f_n(x) \;=\; 1$$

$$\text{Aber: } \forall x\in[0,1]: f_n(x)\to 0 \quad\Rightarrow\quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathsf{d}x \;=\; 0$$

13.2 Satz: Sei $-\infty < a < b < \infty <$, $\forall n\in\mathbb{N}: f_n\in\mathcal{R}([a,b])$ und $f_n\to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Dann folgen

- $f\in\mathcal{R}([a,b])$,
- $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent,
- $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}x \;=\; \int_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=f(x)}\,\mathsf{d}x.$

Beweis: $f_n\to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\|f_n-f\|_\infty = \sup\limits_{[a,b]}\big|f_n(x)-f(x)\big| \to 0.$

10.18: $\big(\mathcal{R}([a,b]),\|.\|_\infty\big)$ ist ein Banachraum, d.h. vollständig $\Rightarrow$ $f\in\mathcal{R}([a,b])$.

Also ist f über $[a,b]$ integrierbar.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\; \left|\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathsf{d}x\right| &\overset{\text{Linearität}}{=} \left|\int_a^b \big(f_n(x)-f(x)\big)\,\mathsf{d}x\right| \\ &\overset{\text{Monotonie}}{\le} \int_a^b \big|f_n(x)-f(x)\big|\,\mathsf{d}x \\ &\overset{\text{Monotonie}}{\le} \int_a^b \|f_n-f\|_\infty\,\mathsf{d}x \\ &= (b-a)\|f_n-f\|_\infty \;\to\; 0.\end{aligned}$$

□

13.3 Folgerung: Sei $-\infty < a < b < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{R}([a,b])$. Ist die Reihe

$$f(x) \ := \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$, so folgen

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \ \wedge \ \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \text{ ist konvergent } \ \wedge \ \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \ = \ \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

13.4 Gleichmäßiger Grenzwert einer Funktion: Seien (M_1,d_1), (M_2,d_2) metrische Räume, $D \subseteq M_1$, X Menge, $f : D \times X \to M_2$, $x_0 \in H(D)$, $\varphi : X \to M_2$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x,t) = \varphi(t) \textbf{ gleichmäßig bezüglich } t \in X,$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x' \in D \ \forall t \in X : d_1(x,x') < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2\big(f(x,t),\varphi(t)\big) < \varepsilon$$

(vgl. 9.1).

13.5 Satz: Sei (M,d) metrischer Raum, $D \subseteq M$, $-\infty < a < b < \infty <$, $f : D \times [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\forall x \in D : f(x,.) : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ ist Regelfunktion.}$$

Gilt für ein $x_0 \in H(D) \cap D$

$$\lim_{x \to x_0} f(x,t) = \varphi(t) \text{ gleichmäßig bezüglich } t \in [a,b],$$

dann folgen:

- $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$,
- $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \ = \ \int_a^b \lim_{x \to x_0} f(x,t)\,\mathrm{d}t \ = \ \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$

Beweis: Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to x_0$. Setze $g_n(t) := f(x_n,t)$. Dann folgt $g_n \in \mathcal{R}([a,b])$ und $g_n(t) \to \varphi(t)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [a,b]$.

$$\overset{13.2}{\Rightarrow} \ \varphi \in \mathcal{R}([a,b]) \ \wedge \ \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x_n,t)\,\mathrm{d}t \ = \ \int_a^b \lim_{n \to \infty} f(x_n,t)\,\mathrm{d}t \ = \ \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Da der Grenzwert nicht von der Folge (x_n) abhängt, folgt die Behauptung. $\square$

13.2 Parameterabhängige Integrale

13.6 Grundvoraussetzung: In diesem Kapitel wird immer vorausgesetzt:
$-\infty < a < b < \infty$, X ist eine Menge, $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ und

$$J(x) \;:=\; \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ für } x \in X,$$

sofern $f(x,.) \in \mathcal{R}([a,b])$.

13.7 Satz: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $f \in C(K \times [a,b] \to \mathbb{R})$. Dann ist J definiert und stetig auf K.

Beweis: **1)** Für jedes feste $x \in K$ gilt $f(x,.) \in C([a,b] \to \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; J(x)$ ist definiert.

2) Setze

$$K' \;:=\; K \times [a,b] \;=\; \big\{(x,t) = (x_1,\dots,x_d,t) : x \in K \;\wedge\; t \in [a,b]\big\}.$$

Nach Heine Borel ist K beschränkt und abgeschlossen
$\Rightarrow\;$ K' ist beschränkt und abgeschlossen
$\overset{\text{Heine-Borel}}{\Rightarrow}$ K' ist kompakt.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Satz 6.52 ist f auf K' gleichmäßig stetig.

$$\Rightarrow\; \exists \delta_\varepsilon > 0\; \forall (x,t),(x',t') \in K' : \big\|(x,t)-(x',t')\big\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \big|f(x,t)-f(x',t')\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Für $x, x' \in K$ mit $\|x - x'\| < \delta_\varepsilon$ folgt $\|(x,t)-(x',t)\| < \delta_\varepsilon$ für $t \in [a,b]$ und

$$\begin{aligned}
\big|J(x) - J(x')\big| &= \left|\int_a^b \big(f(x,t) - f(x',t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \int_a^b \big|f(x,t) - f(x',t)\big|\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

13.8 Folgerung: Sei $-\infty \le c < d \le \infty$ und $f \in C(\,]c,d[\, \times [a,b] \to \mathbb{R})$. Dann ist J definiert und stetig auf $]c,d[$.

Beweis: $J(x)$ ist definiert: Wie vorher.

Sei $x \in\,]c,d[$ fest. Wähle $\delta > 0$, so dass $K := [x-\delta, x+\delta] \subseteq\,]c,d[$.

$$\overset{\text{voriger Satz}}{\Rightarrow} \quad J \text{ ist stetig auf K} \quad \Rightarrow \quad J \text{ ist stetig in } x.$$

□

13.9 Satz: Seien $-\infty \le c < d \le \infty$, $\Omega :=]c,d[\, \times [a,b]$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

- $\forall x \in]c,d[: f(x,.) \in \mathcal{R}([a,b])$,
- $\forall (x,t) \in \Omega : f$ ist in (x,t) partiell nach x differenzierbar,
- $\partial_x f \in C(\Omega \to \mathbb{R})$.

Dann gilt $J \in C^1(\,]c,d[\to \mathbb{R})$ und

$$J'(x) \;=\; \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x} \int_a^b f(x,t)\,\mathsf{d}t \;=\; \int_a^b \partial_x f(x,t)\,\mathsf{d}t \text{ für } x \in]c,d[\,,$$

d.h. Ableitung nach x und $\displaystyle\int_a^b \ldots\,\mathsf{d}t$ sind vertauschbar.

Beweis: Nach Voraussetzungen sind $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathsf{d}t$, $\displaystyle\int_a^b \partial_x f(x,t)\,\mathsf{d}t$ definiert für $x \in]c,d[$.

Sei $x \in]c,d[$ fest. Wähle $\delta_0 > 0$, so dass $K := [x-\delta_0, x+\delta_0] \subseteq]c,d[$. Dann ist $\partial_x f$ auf $[x-\delta_0, x+\delta_0] \times [a,b]$ gleichmäßig stetig.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\delta \in]0,\delta_0]$, so dass

$$\forall x, x' \in [x_0-\delta, x_0+\delta]\ \forall t \in [a,b] : |x-x'| < \delta \Rightarrow \big|\partial_x f(x,t) - \partial_x f(x',t)\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Für $|h| < \delta,\ h \neq 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{J(x+h)-J(x)}{h} - \int_a^b \partial_x f(x,t)\,\mathsf{d}t\right| &= \left|\int_a^b \left(\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h} - \partial_x f(x,t)\right)\mathsf{d}t\right| \\
&\overset{\text{Mittelwertsatz}}{\underset{\text{Diff'rechnung}}{=}} \left|\int_a^b \big(\partial_x f(x+\xi_t h,t) - \partial_x f(x,t)\big)\,\mathsf{d}t\right| \\
&\le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathsf{d}t \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

(Beachte: $\forall t \in [a,b] : \partial_x f(.,t)$ stetig $\Rightarrow$ $f(.,t)$ stetig.)
$\varepsilon \to 0+0 \;\Rightarrow\;$ Formel für $J'(x)$.
13.8 $\Rightarrow$ $J' \in C(\,]c,d[\to \mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $J \in C^1(\,]c,d[\to \mathbb{R})$. □

13.10 Satz: Seien die Voraussetzungen von Satz 13.9 erfüllt, $u, o \in C^1(]c,d[\to \mathbb{R})$ mit $\mathrm{Bild}(u), \mathrm{Bild}(o) \subseteq [a,b]$ und

$$J(x) \;:=\; \int_{u(x)}^{o(x)} f(x,t)\,\mathsf{d}t.$$

Dann folgt $J \in C^1(\,]c,d[\to \mathbb{R})$ und

$$J'(x) \;=\; f\big(x, o(x)\big)o'(x) - f\big(u(x)\big)u'(x) + \int_{u(x)}^{o(x)} \partial_x f(x,t)\,\mathsf{d}t.$$

Beweis: Setze

$$F(x_1, x_2, x_3) \ := \ \int_{x_1}^{x_2} f(x_3, t)\,\mathrm{d}t.$$

Es gelten

$$\partial_1 F(x_1, x_2, x_3) \ = \ -f(x_3, x_1), \quad \partial_2 F(x_1, x_2, x_3) \ = \ f(x_3, x_2).$$

Aus dem letzten Satz:

$$\partial_3 F(x_1, x_2, x_3) \ = \ \int_{x_1}^{x_2} \partial_x f(x_3, t)\,\mathrm{d}t.$$

Nun gilt $J(x) = F\big(u(x), o(x), x\big)$. Mit Kettenregel:

$$J'(x) \ = \ (\partial_1 F)\big(u(x), o(x), x\big)u'(x) + (\partial_2 F))\big(u(x), o(x), x\big)o'(x) + (\partial_3 F))\big(u(x), o(x), x\big) \cdot 1.$$

$\square$

13.3 Uneigentliche parameterabhängige Integrale

13.11 Definition: Sei X eine Menge (Parametermenge), $f : X \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ und für jedes $x \in X$ konvergiere

$$\int_0^\infty f(x, t)\,\mathrm{d}t. \tag{$*$}$$

Dann konvergiert $(*)$ **gleichmäßig bezüglich $\boldsymbol{x \in X}$**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R_\varepsilon > 0 \ \forall R > R_\varepsilon \ \forall x \in X : \left| \int_0^\infty f(x, t)\,\mathrm{d}t - \int_0^R f(x, t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

13.12 Satz: Es gelte $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in C([0, \infty[\to \mathbb{R})$ und

1) $\forall R \geq 0 : f_n \to f$ gleichmäßig auf $[0, R]$ und

2) $\displaystyle\int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert gleichmäßig bezüglich $n \in \mathbb{N}$.

Dann folgen:

1) $f \in C([0, \infty[\to \mathbb{R})$,

2) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert,

3) $\displaystyle\left(\int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und

4) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t.$

D.h. Limes und $\displaystyle\int_0^\infty$ sind vertauschbar.

Beweis: **1)** Satz 9.19: $f \in C([0,R] \to \mathbb{R})$ für jedes $R > 0 \;\Rightarrow\;$ 1).

2) Setze $F_n(R) := \displaystyle\int_0^R f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Dann

$$F(R) \;:=\; \int_0^R f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^R \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \;\overset{13.2}{=}\; \lim_{n\to\infty} \int_0^R f_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \lim_{n\to\infty} F_n(R).$$

Sei (R_k) Folge in $\mathbb{R}$ mit $R_k \to \infty$. Laut Voraussetzung

$$F_n(R_k) \;\to\; \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ gleichmäßig bezüglich } n \in \mathbb{N}.$$

$$\overset{\text{Satz 9.16}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} F_n(R_k) \;=\; \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} F_n(R_k) \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_0^{R_k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

und alle Grenzwerte existieren.

$\Rightarrow$ 3).

Die linke Seite ist unabhängig von der gewählten Folge (R_k)

$\Rightarrow$ 2) und $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_0^{R_k} f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

$\Rightarrow$ 4). □

13.13 Bemerkung: Der letzte Satz gilt entsprechend für Funktionenreihen.

13.14 Stetigkeit des Integrals über die Grenzfunktion: Sei (M,d) metrischer Raum, $D \subseteq M$, $f : D \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in H(D) \cap D$,

1) $\forall R \geq 0 : f(x,t) \to f(x_0,t)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0,R]$ und

2) Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

konvergiere gleichmäßig bezüglich $x \in D$.

Dann folgt

$$\lim_{x\to x_0} \int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\infty \lim_{x\to x_0} f(x,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\infty f(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$$

D.h. $J(x) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ ist stetig in x_0.

Beweis: Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to x_0$. Zeige $J(x_n) \to J(x_0)$.
Setze $f_n(t) := f(x_n,t)$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_n(t) \to f(x_0,t) \text{ gleichmäßig bezüglich } t \in [0,R], \\ \displaystyle\int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ konvergiert gleichmäßig bezüglich } n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} J(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t \;\overset{13.12}{=}\; \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\infty f(x_0,t)\,\mathrm{d}t \;=\; J(x_0).$$

□

13.15 Satz: Sei $f \in C(\,]a,b[\,\times[0,\infty[\,\to\mathbb{R})$ für alle $(x,t)\in\,]a,b[\,\times[0,\infty[$ partiell nach x differenzierbar mit $\partial_x f \in C(\,]a,b[\,\times[0,\infty[\,\to\mathbb{R})$. Gilt außerdem

1) $\forall x \in\,]a,b[\,: J(x) := \displaystyle\int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ ist konvergent und

2) $\displaystyle\int_0^\infty \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert gleichmäßig bezüglich $x \in\,]a,b[$.

Dann ist J differenzierbar in $]a,b[$ und es gilt

$$J'(x) \;=\; \int_0^\infty \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ für } x \in\,]a,b[\,.$$

Beweis: Setze $J_R(x) := \displaystyle\int_0^R f(x,t)\,\mathrm{d}t$ für $R>0,\ x\in\,]a,b[$.

Satz 13.9 $\Rightarrow$ $J_R'(x) = \displaystyle\int_0^R \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t$ für $R>0,\ x\in\,]a,b[$.

Sei (R_k) in $\mathbb{R}$ mit $R_k\to\infty$. Nach Voraussetzung:

$$\forall x\in\,]a,b[\,: J_{R_k}(x)\to J(x) \text{ und } J_{R_k}'(x)\to\int_0^\infty \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ gleichmäßig bezüglich } x.$$

Satz 9.22 $\Rightarrow$ J ist differenzierbar und $J'(x) = \displaystyle\lim_{k\to\infty} J_{R_k}'(x) = \int_0^\infty \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t$. $\square$

14 Integration im $\mathbb{R}^n$

14.1 Treppenfunktionen

14.1 Volumen: Ein **abgeschlossenes Intervall** I im $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} I &= \prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j] = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n] \\ &= \big\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \bigm| \forall j\in\{1,\ldots,n\}: a_j\le x_j\le b_j\big\} \end{aligned}$$

mit $-\infty < a_j \le b_j < \infty$. Das **Maß** des Intervalls ist

$$\mu_n(I) = \mu_n\big(\prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j]\big) := \prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j).$$

Falls $\exists j\in\{1,\ldots,n\}: a_j=b_j$, so gilt $\mu_n(I)=0$ und I heißt **Nullmenge**.

14.2 Beispiele: **1)** $n=3$: $I=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$, $\mu_3(I)=6$.

2)

14.3 Bemerkungen: **1)** Setzt man $I' := \prod_{j=1}^{n-1}[a_j,b_j]$, so gelten

$$I = I'\times[a_n,b_n] \quad \text{und} \quad \mu_n(I) = \underbrace{(b_n-a_n)}_{=\mu_1([a_n,b_n])}\mu_{n-1}(I').$$

2) Für $X\subseteq\mathbb{R}^n$ ist

$$\chi_X:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}: x\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x\in X \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die **charakteristische Funktion** von X.

Mit I' wie vorher gilt

$$\chi_I(x',x_n) = \chi_{I'}(x')\cdot\chi_{[a_n,b_n]}(x_n) \quad \text{für } x'\in\mathbb{R}^{n-1},\ x_n\in\mathbb{R}.$$

3) I_1, I_2 Intervalle im $\mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; I_1 \cap I_2$ ist ein Intervall im $\mathbb{R}^n$ oder die leere Menge.

14.4 Treppenfunktionen: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall.

1) Eine Funktion $t : I \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion** auf I, falls

$$\exists m \in \mathbb{N} \; \exists \text{ Intervalle } I_1, \ldots, I_m \subseteq I \; \exists c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R} : t = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{I_j}.$$

2) Zwei Treppenfunktionen $t_1, t_2 : I \to \mathbb{R}$ heißen **gleich fast überall**, falls es endlich viele Nullmengen $N_1, \ldots, N_k$ gibt, so dass $t_1(x) = t_2(x)$ für $x \in I \setminus \bigcup_{j=1}^{k} N_j$. Schreibe $t_1 = t_2$ f.ü.

3) $\mathcal{T}(I) := \{t : I \to \mathbb{R} \mid t \text{ ist Treppenfunktion}\}$.

14.5 Bemerkung: $\mathcal{T}(I)$ ist ein Untervektorraum das Raumes aller Funktionen von I nach $\mathbb{R}$.

14.6 Definition: Für $t \in \mathcal{T}(I)$ mit $t = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{I_j}$ heißt

$$\int_I t(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \int_I t \;:=\; \sum_{j=1}^{m} c_j\, \mu_n(I_j)$$

das **Integral** von t über I.

14.7 Satz: $t_1 = t_2$ fast überall $\;\Rightarrow\; \int_I t_1 = \int_I t_2$.

Ohne Beweis

14.8 Eigenschaften: Für $t, t_1, t_2 \in \mathcal{T}(I)$ und $c \in \mathbb{R}$ gelten

1) $t_1 + t_2 \in \mathcal{T}(I)$ und $\int_I (t_1 + t_2) = \int_I t_1 + \int_I t_2$,

2) $c \cdot t \in \mathcal{T}(I)$ und $\int_I (c \cdot t) = c \int_I t$,

3) $\forall x \in I : t_1(x) \le t_2(x) \;\Rightarrow\; \int_I t_1 \le \int_I t_2$ (Monotonie),

4) $\left| \int_I t \right| \le \|t\|_\infty \cdot \mu(I)$,

5) $|t| \in \mathcal{T}(I)$ und $\left| \int_I t \right| \le \int_I |t|$,

6) $t_1 \cdot t_2 \in \mathcal{T}(I)$.

14.2 Das Regelintegral

14.9 Definition und Satz: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit $\mu_n(I) > 0$.

1) $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, falls

$$\exists (t_k) \text{ in } \mathcal{T}(I): \ t_k \to f \text{ gleichmäßig auf } I$$
$$\text{bzw. } \|f - t_k\|_\infty = \sup_{x \in I} \big|f(x) - t_k(x)\big| \to 0.$$

2) $\mathcal{R}(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Regelfunktion}\}$.

3) Für $f \in \mathcal{R}(I)$, (t_k) in $\mathcal{T}(I)$, $t_k \to f$ gleichmäßig auf I, existiert

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \ := \ \int_I f \ := \ \lim_{k\to\infty} \int_I t_k$$

und ist unabhängig von der Folge (t_k).
$\displaystyle\int_I f$ heißt **(Regel-)integral** von f über I.

Beweis: 1) $\displaystyle\left|\int_I t_k - \int_I t_l\right| = \left|\int_I (t_k - t_l)\right| \leq \|t_k - t_l\|_\infty \cdot \mu_n(I) < \varepsilon$
für $k, l > K_\varepsilon$, da $\|t_k - f\|_\infty \to 0$
$\Rightarrow \displaystyle\left(\int_I t_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge, also konvergent in $\mathbb{R}$.

2) Sind $(t_k), (\tilde{t}_k$ zwei solche Folgen, dann gilt $\displaystyle\left|\int_I t_k - \int_I \tilde{t}_k\right| \leq \|t_k - \tilde{t}_k\|_\infty \cdot \mu_n(I) \to 0$.
$\Rightarrow \displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_I t_k = \lim_{k\to\infty} \int_I \tilde{t}_k$. □

14.10 Satz: 1) $f \in \mathcal{R}(I) \ \Rightarrow \ f$ ist beschränkt auf I.

2) $f \in C(I \to \mathbb{R}) \ \Rightarrow \ f \in \mathcal{R}(I)$.

3) Die Eigenschaften aus 14.8 übertragen sich durch Grenzwertbildung direkt auf das Regelintegral.

Beweis: 1) $\varepsilon := 1 \ \Rightarrow \ \exists K \in \mathbb{N} : \|t_K - f\|_\infty < 1$.
$\displaystyle t_k = \sum_{j=1}^m c_j\, \chi_{I_j} \ \Rightarrow \ \|t_K\|_\infty \leq \sum_{j=1}^m |c_j| < \infty$.
$\Rightarrow \ \|f\|_\infty = \|f - t_K + t_K\|_\infty < \|f - t_K.\|_\infty + \|t_k\|_\infty < 1 + \|t_k\|_\infty < \infty$.

2) Beweis im Fall $n = 2$: Sei $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Kontstruiere t_k mit $\|t_k - f\|_\infty < \frac{1}{k}$.

I ist kompakt, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig. Wähle $\delta > 0$, so dass

$$\forall x, x' \in I : |x - x'| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(x')\big| < \frac{1}{k}.$$

Sei $I = [a, b] \times [[c, d]$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{N}, \frac{d-c}{N} < \frac{\delta}{2}$. Setze

$$\begin{aligned}
J_{rs}^{(1)} &:= [a + r\frac{b-a}{N}, a + (r+1)\frac{b-a}{N}] \times [c + s\frac{d-c}{N}, c + (s+1)\frac{d-c}{N}] \\
J_{rs}^{(2)} &:= [a + r\frac{b-a}{N}, a + (r+1)\frac{b-a}{N}] \times [c + (s+1)\frac{d-c}{N}, c + (s+1)\frac{d-c}{N}] \\
J_{rs}^{(3)} &:= [a + (r+1)\frac{b-a}{N}, a + (r+1)\frac{b-a}{N}] \times [c + s\frac{d-c}{N}, c + (s+1)\frac{d-c}{N}]
\end{aligned}$$

für $0 \le r, s \le N - 1$. Seien $x_{rs} \in J_{rs}^{(1)}$ Dann ist

$$t_k := \sum_{r,s=0}^{N-1} f(x_{rs})\chi_{J_{rs}^{(1)}} - \sum_{r,s=0}^{N-2} f(x_{rs})\chi_{J_{rs}^{(2)}} - \sum_{r,s=0}^{N-2} f(x_{rs})\chi_{J_{rs}^{(3)}}$$

die gewünschte Treppenfunktion.

3) Siehe Beweis von Satz 10.20. $\square$

14.3 Iterierte Integrale

14.11 Satz: Sei $I = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$ Intervall mit $\mu(I) \neq 0$, $f \in \mathcal{R}(I)$.

Für jedes $c \in [a_n, b_n]$ sei $\tilde{f}_c(x') := f(x', c)$ für $x' \in I' = \prod_{j=1}^{n-1} [a_j, b_j]$. Dann gelten:

1) $\forall c \in [a_n, b_n] : \tilde{f}_c \in \mathcal{R}(I')$,

2) $x_n \mapsto \int_{I'} f(x', x_n)\, \mathsf{d}x' \in \mathcal{R}([a_n, b_n])$,

3) $\int_I f \;=\; \int_{x_n = a_n}^{b_n} \left(\int_{I'} f(x', x_n)\, \mathsf{d}x' \right) \mathsf{d}x.$

Beweis: 1) Sei zunächst $f = t \in \mathcal{T}(I)$, $t = \sum_{l=1}^{m} c_l\, \chi_{I_l}$, $I_l = \prod_{j=1}^{n} [a_j^{(l)}, b_j^{(l)}]$.

Mit $I'_l := \prod_{j=1}^{n-1}[a_j^{(l)}, b_j^{(l)}]$ folgt $t(.,x_n) = \sum_{l=1}^{m} c_l\,\chi_{[a_n^{(l)},b_n^{(l)}]}(x_n)\chi_{I'_l} \in \mathcal{T}(I')$ und

$$\begin{aligned}
\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{I'} t(x',x_n)\,\mathsf{d}x'\right)\,\mathsf{d}x &= \int_{a_n}^{b_n}\sum_{l=1}^{m} c_l\chi_{[a_n^{(l)},b_n^{(l)}]}(x_n)\mu_{n-1}(I'_l)\,\mathsf{d}x_n \\
&= \sum_{l=1}^{m} c_l\,\underbrace{\mu_1\big([a_n^{(l)},b_n^{(l)}]\big)\mu_{n-1}(I'_l)}_{=\mu_n(I_l)} \\
&= \int_I t.
\end{aligned}$$

2) Sei (t_k) Folge in $\mathcal{T}(I)$, $t_k \to f$ gleichmäßig auf I. Dann

a) $\big|\tilde{f}_c(x') - \underbrace{t_k(x',c)}_{\in\mathcal{T}(I')}\big| = \big|f(x',c) - t_k(x',c)\big| \le \|f-t_k\|_\infty < \varepsilon$ für $k > K_\varepsilon$

$\Rightarrow\ \tilde{f}_c \in \mathcal{R}(I')$.

b) $$\begin{aligned}\Big|\int_{I'} f(x',x_n)\,\mathsf{d}x' - \underbrace{\int_{I'} t_k(x',x_n)\,\mathsf{d}x'}_{\in\mathcal{T}([a_n,b_n])}\Big| &\le \int_{I'}\big|f(x',x_n)-t_k(x',x_n)\big|\,\mathsf{d}x' \\ &\le \mu_{n-1}(I')\|f-t_k\|_\infty < \varepsilon \text{ für } k > K_\varepsilon\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \int_{I'} f(x',.)\,\mathsf{d}x' \in \mathcal{R}([a_n,b_n])$.

c) $$\begin{aligned}\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{I'} f(x',x_n)\,\mathsf{d}x'\right)\,\mathsf{d}x_n &\overset{\text{Def}\int}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{I'} t_k(x',x_n)\,\mathsf{d}x'\right)\,\mathsf{d}x_n \\ &\overset{1)}{=} \lim_{k\to\infty}\int_I t_k \overset{\text{Def}\int}{=} \int_I f.\end{aligned}$$

□

14.12 Beispiel: $f(x,y) = x\mathrm{e}^{x+y}$, $I = [0,1]\times[0,2]$:
$f \in C(I \to \mathbb{R}) \ \Rightarrow\ f \in \mathcal{R}(I)$.

$$\int_I f \;=\; \int_{y=0}^{2}\left(\int_{x=0}^{1} x\mathrm{e}^{x+y}\,\mathsf{d}x\right)\,\mathsf{d}y \;=\; \mathrm{e}^2 - 1.$$

14.13 Folgerung: Für $f \in \mathcal{R}([a,b]\times[c,d])$ (also insbesondere für $f \in C([a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R})$) gilt

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f \;=\; \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathsf{d}x\right)\,\mathsf{d}y \;=\; \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathsf{d}y\right)\,\mathsf{d}x.$$

D.h. die Reihenfolge der Intgrationen ist vertauschbar.

14.4 Das Maß von Mengen

14.14 Definition: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt.

1) Das kleinste Intervall, das X enthält, wird mit $I(X)$ bezeichnet:

$$I(X) := \bigcap_{\{I \subseteq \mathbb{R}^n : I \text{ Intervall } \wedge \ X \subseteq I\}} I.$$

$I(X)$ ist kompakt (beschränkt: klar, abgeschlossen als Schnitt abgeschlossener Mengen).

2) Eine endliche Menge $P = \{I_1, \ldots, I_m\}$ von Intervallen heißt **Partition** von $I(X)$, falls

(i) $\forall j, k = 1, \ldots, m : j \neq k \ \Rightarrow \ \mu_n(I_j \cap I_k) = 0$,
d.h. die Intervalle haben höchstens auf ihrem Rand gemeinsame Punkte.

(ii) $\bigcup_{j=1}^{m} I_j = I(X)$.

3) Für jede Partition P von $I(X)$ sei

$$\begin{aligned} m_P(X) &:= \sum_{\{I \in P : I \subseteq X\}} \mu_n(I), \\ M_P(X) &:= \sum_{\{I \in P : I \cap X \neq \emptyset\}} \mu_n(I). \end{aligned}$$

14.15 Definition: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt.

1) $\mu_i := \sup\{m_P(X) : P$ ist Partition von $I(X)\}$ heißt **inneres Riemann-Maß** von X,
$\mu_a := \inf\{M_P(X) : P$ ist Partition von $I(X)\}$ heißt **äußeres Riemann-Maß** von X.

2) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Riemann-messbar**, falls $\mu_i(X) = \mu_a(X)$.

3) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Nullmenge**, falls X Riemann-messbar ist mit $\mu(X) = 0$.

14.16 Bemerkungen: **1)** $I \subseteq \mathbb{R}^n$ Intervall $\Rightarrow$ I messbar, $\mu(I) = \mu_n(I)$,

2) Ist $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit $I(X) \subseteq I$, so gilt

$$\sup\{m_P(X) : P \text{ ist Partition von } I(X)\} \ = \ \sup\{m_P(X) : P \text{ ist Partition von } I\}.$$

14.17 Satz: **1)** $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge und $X' \subseteq X$ $\Rightarrow$ X' messbar und $\mu(X') = 0$.

2) $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmengen $\Rightarrow$ $X_1 \cup X_2$ sind Nullmengen.

Beweis: **1)** Sei $\varepsilon > 0$ und P Partition von $I(X)$ mit $M_P(X) < \varepsilon$

$$\Rightarrow M_P(X') = \sum_{\{I\in P: I\cap X'\neq\emptyset\}} \mu_n(I) \le \sum_{\{I\in P: I\cap X\neq\emptyset\}} \mu_n(X) = M_P(X) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu_a(X') = \inf\{M_P(X') : P \text{ Partition von } I(X)\} < \varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon>0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \mu_a(X') = 0.$$

2) Seien $\varepsilon > 0$ und P, P' Partitionen von $I(X_1 \cup X_2)$ mit $M_P(X_1), M_{P'}(X_2) < \varepsilon$.

Setze

$$P'' := \{I \cap I' : I \in P \wedge I' \in P'\}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P'' \text{ Partition von } I(X_1 \cup X_2) \\ M_{P''}(X_1) \le M_P(X_1) < \varepsilon \\ M_{P''}(X_1) \le M_{P'}(X_2) < \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad M_{P''}(X_1 \cup X_2) &= \sum_{\{I\in P'': I\cap(X_1\cup X_2)\neq\emptyset\}} \mu_n(I) \\ &\le \sum_{\{I\in P: I\cap X_1\neq\emptyset\}} \mu_n(I) + \sum_{\{I\in P: I\cap X_2\neq\emptyset\}} \mu_n(I) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

da $I \cap (X_1 \cup X_2) = (I \cap X_1) \cup (I \cap X_2)$.

$\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 : \mu_a(X_1 \cup X_2) < 2\varepsilon.$ □

14.18 Definition: Sei (M, d) metrischer Raum, $X \subseteq M$.

1) $\mathring{X} := \bigcup\{O \subseteq M : O \subseteq X \wedge O \text{ offen}\}$ heißt **Inneres** von X.

2) $\overline{X} := \bigcap\{A \subseteq M : X \subseteq A \wedge A \text{ abgeschlossen}\}$ heißt **Abschluss** von X.

3) $\partial X := \overline{X} - \mathring{X}$ heißt **Rand** von X.

14.19 Beispiele: $X = [a, b[\subseteq \mathbb{R}$: $\overline{X} = [a, b]$, $\mathring{X} =]a, b[$, $\partial X = \{a, b\}$.

$I = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$: $\overline{I} = I$, $\mathring{I} =]a, b[\times]c, d[$, $\partial I = [a, b] \times \{c, d\} \cup \{a, b\} \times [c, d]$.

14.20 Satz: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann ist X genau dann Riemann-messbar, wenn ∂X messbar und $\mu(\partial X) = 0$.

Beweis: $\Rightarrow$: Zeige: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ Partition P von $I(X) : M_P(\partial X) < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wähle Partition P von $I(X)$ mit $M_P(X) - m_P(X) < \varepsilon$. Unterteile ∂X in zwei Mengen:

$$M_1 := \{x \in \partial X : x \notin \bigcup_{\{I\in P: I\subseteq X\}} I\}, \quad M_2 := \partial X \setminus M_1.$$

M_2 ist Teilmenge der endlichen Vereinigung aller Ränder der $I \in P \overset{\text{Satz 14.17}}{\Rightarrow} \mu(M_2) = 0$.
Wegen

$$M_P(M_1) = M_P(X) - m_P(X) < \varepsilon$$

folgt $\mu(\partial X) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$: Zeige: $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ Partition P von $I(X) : M_P(X) - m_P(X) < \varepsilon$.
Sei $\varepsilon > 0$ fest. $\mu(\partial X) = 0 \ \Rightarrow\ \exists$ Partition P von $I(X)$ mit $M_P(\partial X) < \varepsilon$
Für diese Partition von $I(X)$ gilt

$$\begin{aligned} M_P(X) - m_P(X) &= \sum_{\{I \in P : I \cap X \neq \emptyset\}} \mu_n(I) - \sum_{\{I \in P : I \subseteq X\}} \mu_n(I) \\ &\leq \sum_{\{I \in P : I \cap \partial X \neq \emptyset\}} \mu_n(I) \\ &= M_P(\partial X) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

14.5 Volumenberechnung

14.21 Satz: Sei $I' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ Intervall, $f \in \mathcal{R}(I')$, $f(x) \geq 0$ auf I'. Dann ist

$$X \ := \ \big\{(x', y) \in \mathbb{R}^n : x' \in I' \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x')\big\}$$

Riemann-messbar mit

$$\mu(X) \ = \ \int_{I'} f(x')\, \mathrm{d}x'.$$

Beweis: Es gilt $I(X) = I' \times [0, b]$ mit geeignetem $b \geq 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest, $t \in \mathcal{T}(I')$ mit $\|t - f\|_\infty < \varepsilon$.
Wähle eine Partition $P' = \{I'_1, \dots, I'_m\}$ von I', so dass $t = \sum_{j=1} c_j\, \chi_{I'_j}$, setze

$$d_j := \max\{c_j - \varepsilon, 0\}, \quad D_j := \min\{c_j + \varepsilon, b\}.$$

Dann ist

$$P \ := \ \{I'_j \times [0, d_j], I'_j \times [d_j, D_j], I'_j \times [D_j, b] : j = 1, \dots, m\}$$

eine Partition von $I(X)$ mit

$$\begin{aligned} m_P(X) &= \sum_{j=1}^{m} d_j \mu_{n-1}(I'_j) \ \geq \ \int_{I'} (t - \varepsilon) \ \geq \ \int_{I'} (f - 2\varepsilon) \ = \ \int_{I'} f - 2\varepsilon \mu_{n-1}(I'), \\ M_P(X) &= \sum_{j=1}^{m} D_j \mu_{n-1}(I'_j) \ \leq \ \int_{I'} (t + \varepsilon) \ \leq \ \int_{I'} (f + 2\varepsilon) \ = \ \int_{I'} f + 2\varepsilon \mu_{n-1}(I'). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ X messbar, $\mu(X) = \displaystyle\int_{I'} f$.

□

14.22 Definition: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Riemann-messbar. Dann heißt $f : X \mapsto \mathbb{R}$ **Regel-integrierbar** auf X, falls für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Partition $P = \{I_1, \ldots, I_m\}$ von $I(X)$ und Konstanten $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$M_P(X) \leq \mu(X) + \varepsilon \ \wedge \ m_P(X) \geq \mu(X) - \varepsilon$$

und für die Treppenfunktion $t_k := \sum_{j=1}^{m} c_j \, \chi_{I_j}$ gilt:

$$\sup_{x \in X} \big| f(x) - t_k(x) \big| < \frac{1}{k}.$$

Der Grenzwert

$$\int_X f \ := \ \lim_{k \to \infty} \int_X t_k \quad \text{mit} \quad \int_X t_k \ := \sum_{\{j : I_j \cap X \neq 0\}} c_j \mu_n(I_j)$$

existiert, ist unabhängig von der Folge (t_n) und heißt **Integral** von f über X.

14.23 Satz: Die Integraleigenschaften aus Satz 14.8 gelten entsprechend. Außerdem ist jede Funktion $f \in C(\overline{X} \to \mathbb{R})$ auf X regelintegrierbar.

14.24 Satz: Sei $X' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ Riemann-messbar, $u, o : X' \to \mathbb{R}$ regelintegrierbar mit $u(x') \leq o(x')$ auf X'. Dann ist

$$X \ := \ \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in X' \ \wedge \ u(x') \leq x_n \leq o(x')\}$$

Riemann-messbar mit

$$\mu(X) \ = \ \int_{X'} (o - u).$$

Ist zusätzlich $f : X \to \mathbb{R}$ regelintegrierbar, so gilt

$$\int_X f \ = \ \int_{X'} \left(\int_{u(x')}^{o(x')} f(x', x_n) \, \mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x'.$$

Beweis: Es gilt $I(X) = I(X') \times [a, b]$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ fest.

Wähle eine Partition $P' = \{I_1', \ldots, I_m'\}$ von $I(X')$ mit

$$M_P(X) \leq \mu(X) + \varepsilon \ \wedge \ m_P(X) \geq \mu(X) - \varepsilon,$$

so dass Konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ und $\delta_1, \ldots, \delta_m$ existieren, so dass

$$\sup_{x \in X} \Big| u(x) - \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \, \chi_{I_j} \Big| < \varepsilon \ \wedge \ \sup_{x \in X} \Big| o(x) - \sum_{j=1}^{m} \delta_j \, \chi_{I_j} \Big| < \varepsilon.$$

Setze

$$c_j := \max\{\gamma_j - \varepsilon, a\}, \ \ C_j := \min\{\gamma_j + \varepsilon, \delta_j - \varepsilon\}, \ \ d_j := \max\{\gamma_j + \varepsilon, \delta_j - \varepsilon\}, \ \ D_j := \min\{\delta_j + \varepsilon, b\}$$

und

$$P \; := \; \big\{ I'_j \times [a, c_j], I'_j \times [c_j, C_j], I'_j \times [C_j, d_j], I'_j \times [d_j, D_j], I'_j \times [D_j, b] : j = 1, \ldots, m \big\}.$$

Dann ist P Partition von $I(X)$ und

$$\begin{aligned} m_P(X) \; &\geq \; \int_{I'} (o - u - 4\varepsilon) - 2\max\{\|u\|_\infty + \varepsilon, \|o\|_\infty + \varepsilon\}\big(M_P(X') - m_P(X')\big), \\ M_P(X) \; &\leq \; \int_{I'} (o - u + 4\varepsilon). \end{aligned}$$

□

14.25 Beispiel: Gegeben ist der Zylinder $\{x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ und der Keil $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 \geq 0 \;\wedge\; 0 \leq x_3 \leq x_2\}$. Gesucht ist das Volumen des Schnittkörpers.

$$X' := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1 \;\wedge\; 0 \leq x_2 \leq \sqrt{1 - x_1^2}\}$$

ist Riemann-messbar nach Satz 14.24.

$$K \cap Z = \{(x', x_3) : x' \in X' \;\wedge\; 0 \leq x_3 \leq x_2\}$$

ist Riemann-messbar nach Satz 14.24.

$$\begin{aligned} \mu(K \cap Z) \; &\overset{14.24}{=} \; \int_{X'} (x_2 - 0) \, \mathrm{d}x' \\ &\overset{14.24}{=} \; \int_{[-1,1]} \left(\int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} x_2 \, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ &= \; \frac{2}{3}. \end{aligned}$$