Prüfungsklausur — Analysis II (SS 2015)

Termin:	*01.10.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

Aufgabe 1. (8 Punkte)

(a) Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in \mathcal{R}([a,b])$ eine Regelfunktion, so zeigen Sie, dass die Abbildung

$$J : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

stetig ist.

(b) Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sowie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in]a,b[$ gibt, sodass

$$\int_{g(a)}^{g(c)} f(t)\,dt = \int_{g(c)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

gilt.

(c) Ist die Voraussetzung, dass $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt \neq 0$ aus Teilaufgabe **(b)** notwendig? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem weiteren Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion. Definieren Sie die folgenden Symbole:

$$\text{(i)} \quad \int_c^\infty f(x)\,dx,\ c \in \mathbb{R}; \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

Zeigen Sie im Fall von (ii) auch die Wohldefiniertheit.

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das uneigentliche Integral

$$\int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{1}{x \cdot (\ln x)^\alpha}\,dx$$

konvergiert. Geben Sie im Fall der Konvergenz auch den Wert des Integrals an.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

(a) Seien V, W zwei normierte Vektorräume und $f : V \to W$ eine Abbildung. Geben Sie die Definition der Freéchetdifferenzierbarkeit von f in einem Punkt $x_0 \in V$ an.

(b) Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ erfülle für alle $x \in V$ die Ungleichung

$$|f(x)| \leq ||x||^2.$$

Zeigen Sie, dass f in $0 \in V$ fréchetdifferenzierbar ist und die Fréchetableitung durch

$$f'(0) : x \mapsto 0$$

gegeben ist.

Aufgabe 4. (9 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

(a) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion f in einem geeigneten Koordinatensystem.

(b) Wir betrachten f eingeschränkt auf $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$. Warum besitzt $f|_{\mathbb{S}^1}$ einen größten und einen kleinsten Wert? Berechnen Sie diese mit Hilfe eines Lagrangeansatzes und geben Sie die Art und Lage der Extrema an.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

(a) Beweisen oder wiederlegen Sie folgende Aussage mit einem Gegenbeispiel:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, welche für $n \to \infty$ punktweise gegen eine stetige Grenzfunktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ konvergiert, so folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

(b) Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ konvergiere nun gleichmäßig bzgl. $x \in [0, 1]$ gegen eine Grenzfunktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$$

gilt.