Prüfungsklausur — Analysis II (SS 2015)

Termin:	*01.10.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

Aufgabe 1. (8 Punkte)

(a) Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in \mathcal{R}([a, b])$ eine Regelfunktion, so zeigen Sie, dass die Abbildung

$$J : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$$

stetig ist.

(b) Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sowie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in]a, b[$ gibt, sodass

$$\int_{g(a)}^{g(c)} f(t)\, dt = \int_{g(c)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

gilt.

(c) Ist die Voraussetzung, dass $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt \neq 0$ aus Teilaufgabe **(b)** notwendig? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem weiteren Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Lösung 1.

(a) Wir wollen zeigen, dass $|J(x) - J(y)| < \varepsilon$ für alle $|x - y| < \delta_\varepsilon$, wobei δ_ε zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gewählt wird. Als Regelfunktion auf $[a, b]$ ist f beschränkt, d.h. es ist $|f(x)| < c$ für alle $x \in [a, b]$ und ein $c > 0$. Wählen wir nun $\delta_\varepsilon := \varepsilon/c$, so folgt

$$|J(x) - J(y)| = \left| \int_x^y f(t)\, dt \right| \leq |y - x| \cdot c < \varepsilon$$

für $|x - y| < \delta_\varepsilon$.

(b) In Teilaufgabe **(a)** wurde gezeigt, dass die Abbildung $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ stetig ist. Damit ist auch

$$x \mapsto \int_{g(a)}^{g(x)} f(t)\, dt$$

bzw.

$$\tilde{J} : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_{g(a)}^{g(x)} f(t)\, dt + \int_{g(b)}^{g(x)} f(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(x)} f(t)\, dt - \int_{g(x)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

als Verkettung (bzw. Summe) stetiger Funktionen stetig. Wir bemerken, dass die beiden Funktionswerte

$$\tilde{J}(a) = -\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt \qquad \text{und} \qquad \tilde{J}(b) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

wegen der Bedingung $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt \neq 0$ verschiedene Vorzeichen haben. D.h. nach dem Zwischenwertsatz (oder Nullstellensatz) aus Analysis I besitzt $\tilde{J}$ eine Nullstelle $c \in]a, b[$, für diese gilt dann

$$\int_{g(a)}^{g(c)} f(t)\, dt = \int_{g(c)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

(c) Wir geben ein Beispiel an, welches zeigt, dass die Voraussetzung $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt \neq 0$ tatsächlich notwendig ist:
Setzen wir $-a = b = 1$ und $f = g = \mathrm{id}_{[-1,1]} : x \mapsto x$, dann ist

$$\int_{-1}^{x} t\,dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} < 0$$

und

$$\int_{x}^{1} t\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 > 0$$

für alle $x \in]-1,1[$. Insbesondere ist damit aber auch

$$\int_{-1}^{x} t\,dt \neq \int_{x}^{1} t\,dt$$

für alle $x \in]-1,1[$, was die Aussage aus Teilaufgabe **(b)** widerlegt.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion. Definieren Sie die folgenden Symbole:

$$\text{(i)} \quad \int_c^\infty f(x)\,dx,\ c \in \mathbb{R}; \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

Zeigen Sie im Fall von (ii) auch die Wohldefiniertheit.

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das uneigentliche Integral

$$\int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{1}{x \cdot (\ln x)^\alpha}\,dx$$

konvergiert. Geben Sie im Fall der Konvergenz auch den Wert des Integrals an.

Lösung 2.

(a) Wir geben zunächst die geforderten Definitionen der Symbole an:

(i) $\displaystyle\int_c^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,dx,$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,dx$ für ein frei gewähltes $c \in \mathbb{R}$.

Bei (ii) hängt die Definition von einem beliebig gewählten $c \in \mathbb{R}$ ab, d.h. für die Wohldefiniertheit ist die Unabhängigkeit der rechten Seite von c zu zeigen: Wählt man $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{c} \neq c$, so ist

$$\int_a^{\tilde{c}} f(x)\,dx + \int_{\tilde{c}}^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{\tilde{c}} f(x)\,dx + \int_{\tilde{c}}^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

und die beiden Grenzwerte für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$ stimmen überein.

(b) Nach Substitution $t = \ln x$ mit $dt = dx/x$ folgt zunächst für jedes $b > 0$, dass

$$\int_{\mathrm{e}}^b \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,dx = \int_1^{\ln b} \frac{1}{t^\alpha}\,dt.$$

Das Integral auf der rechten Seite konvergiert dabei genau dann für $b \to \infty$, wenn $\alpha > 1$. In diesem Fall ist

$$\int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{\ln b} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}}\Big|_1^{\ln b} = \frac{1}{\alpha-1} + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(\ln b)^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Aufgabe 3. (5 Punkte)

(a) Seien V, W zwei normierte Vektorräume und $f : V \to W$ eine Abbildung. Geben Sie die Definition der Freéchetdifferenzierbarkeit von f in einem Punkt $x_0 \in V$ an.

(b) Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ erfülle für alle $x \in V$ die Ungleichung

$$|f(x)| \le ||x||^2.$$

Zeigen Sie, dass f in $0 \in V$ fréchetdifferenzierbar ist und die Fréchetableitung durch

$$f'(0) : x \mapsto 0$$

gegeben ist.

Lösung 3.

(a) Wir geben die Definition der Fréchetdifferenzierbarkeit wie in der Vorlesung:
Die Funktion f ist in $x_0 \in V$ genau dann fréchetdifferenzierbar, wenn es eine stetige (oder beschränkte) lineare Abbildung $f'(x_0) : V \to W$ gibt, sodass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + o(||h||)$$

für $h \to 0$ gilt.
(Alternativ kann man die Definition auch mit $x = x_0 + h$ bzw. $h = x - x_0$ formulieren.)

(b) Wir bemerken zunächst, dass wegen $|f(x)| \le ||x||^2$ für alle $x \in V$ im Fall $x = 0$ folgt, dass

$$0 \le |f(0)| \le ||0||^2 = 0.$$

D.h. es ist $f(0) = 0$. Damit erhalten wir für die Fréchetableitung im Ursprung

$$f(0 + h) = f(h) = f(0) + 0 + f(h).$$

Wir behaupten nun, dass $f(h)$ für $h \to 0$ zur Klasse $o(||h||)$ gehört, dies folgt jedoch wegen

$$0 \le \lim_{h\to 0} \frac{|f(h)|}{||h||} \le \lim_{h\to 0} \frac{||h||^2}{||h||} = \lim_{h\to 0} ||h|| = 0.$$

Damit ist f in $x_0 = 0$ fréchetdifferenzierbar und die Fréchetableitung von f in $x_0 = 0$ ist gegeben durch die Abbildung

$$f'(0) : x \mapsto 0$$

(das diese Abbildung stetig und linear ist, muss nicht gezeigt werden, da offensichtlich!).

Aufgabe 4. (9 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

(a) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion f in einem geeigneten Koordinatensystem.

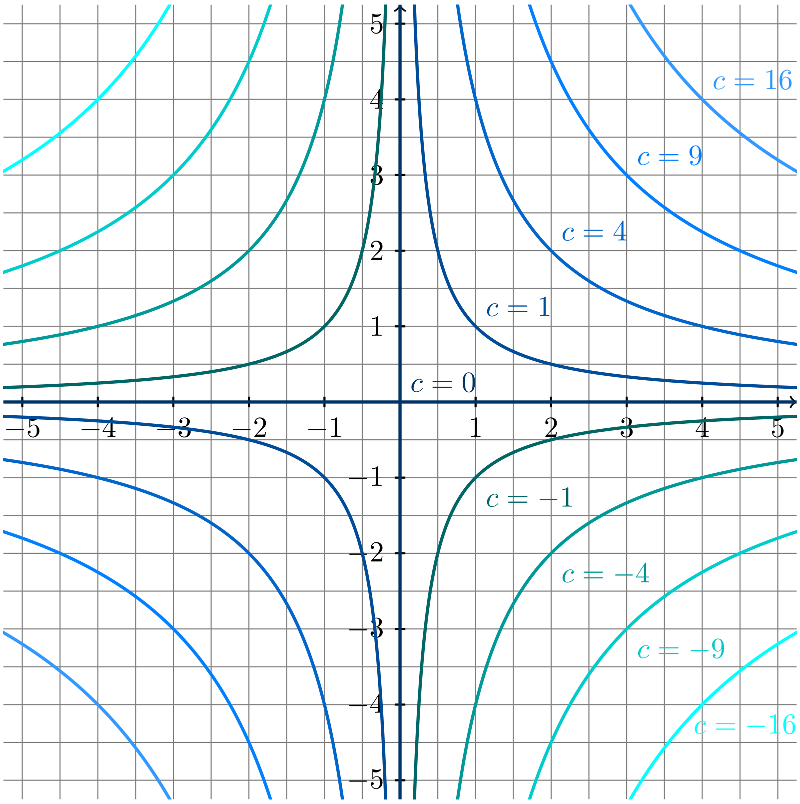
(b) Wir betrachten f eingeschränkt auf $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Warum besitzt $f|_{\mathbb{S}^1}$ einen größten und einen kleinsten Wert? Berechnen Sie diese mit Hilfe eines Lagrange-ansatzes und geben Sie die Art und Lage der Extrema an.

Lösung 4.

(a) Um die Höhenlinien zeichnen zu können bemerken wir, dass

$$x \cdot y = c \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{c}{x} = \pm\frac{|c|}{y}$$

für $x \neq 0$ und eine gegebene Konstante $c \in \mathbb{R}$. Für $x = 0$ bzw. $y = 0$ ist $x \cdot y = 0$ unabhängig von y bzw. x. Die Höhenlinien sind also Hyperbeln, bzw. für $c = 0$ die Koordinatenachsen.



(b) Wir klären zunächst, warum $f|_{\mathbb{S}^1}$ einen größten und einen kleinsten Wert besitzt: $\mathbb{S}^1$ ist beschränkt, da

$$x^2 + y^2 = 1 \leq 1$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ ist. Desweiteren ist $\mathbb{S}^1$ abgeschlossen. (Hierfür betrachten wir eine Folge $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ welche in $\mathbb{R}^2$ gegen (x, y) konvergiert. Wegen Stetigkeit der Normabbildung $(x, y) \mapsto ||(x, y)||$ ist aber auch

$$||(x, y)|| = || \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n)|| = \lim_{n\to\infty} ||(x_n, y_n)|| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

d.h. es ist $(x, y) \in \mathbb{S}^1$.) Gleichzeitig ist die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}^2$, da es sich bei der Abbildungsvorschrift um ein Polynom handelt, nach einem Satz aus der Vorlesung nimmt $f|_{\mathbb{S}^1}$ also einen größten und einen kleinsten Wert an.
Die Extrema lassen sich nun mit Hilfe des Lagrangeansatzes berechnen. Im konkreten Fall betrachten wir die Lagrangefunktion

$$g(x, y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

woraus wir aus $\nabla g = 0$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y - 2\lambda x &= 0 \\ x - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

erhalten. Subtrahieren wir nun die ersten beiden Gleichungen voneinander, so folgt, dass

$$0 = y - x + \lambda(y - x) = (y - x)(\lambda + 1).$$

Angenommen es ist nun $\lambda = -1$, so liefern die ersten beiden Gleichungen, dass $y = -2x$ bzw. $y = -x/2$. Gleichsetzen liefert also $4x = x$ bzw. $x = y = 0$, was der dritten Gleichung des ursprüngleichen Systems widerspricht. Es folgt also, dass $x = y$, was eingesetzt in die dritte Gleichung die vier kritischen Punkte

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

liefert. Dabei ist

$$f(P_1) = f(P_3) = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad f(P_2) = f(P_4) = -\frac{1}{2}.$$

In P_1 und P_3 wird also das Maximum, in P_2 und P_4 das Maximum von $f|_{\mathbb{S}^1}$ angenommen.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

(a) Beweisen oder wiederlegen Sie folgende Aussage mit einem Gegenbeispiel:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, welche für $n \to \infty$ punktweise gegen eine stetige Grenzfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert, so folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

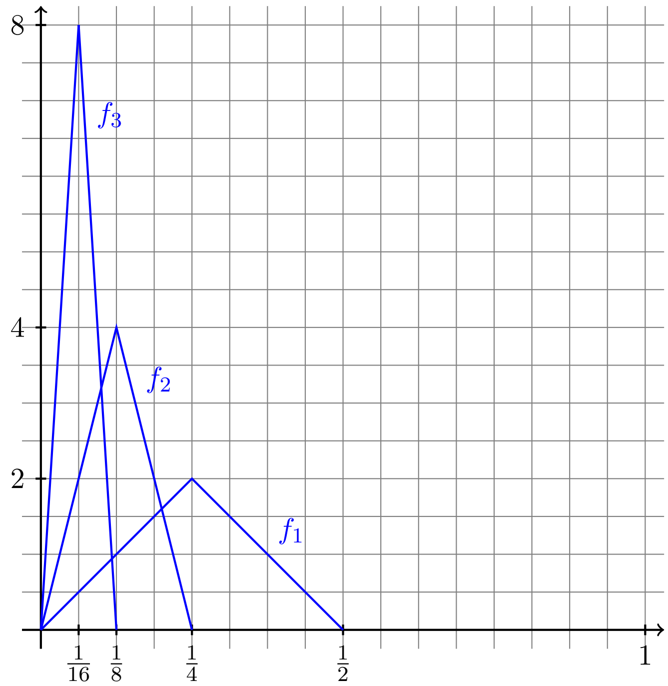
(b) Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiere nun gleichmäßig bzgl. $x \in [0,1]$ gegen eine Grenzfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

gilt.

Lösung 5.

(a) Die Aussage ist offensichtlich falsch und wir wollen ein Gegenbeispiel angeben. Die Idee besteht darin eine Folge stetiger Fuktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ zu finden, welche nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion $x \mapsto 0$ auf $[0,1]$ konvergiert. Dazu können wir z.B. ein Folge von Dreiecksfunktionen wählen, deren Träger immer kleiner werden, wobei die Spitze so hoch ansteigt, dass der Flächeninhalt konstant auf den Wert 1 normiert ist (vgl. Skizze).



Wir setzen also

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 4^{n+1}x & \text{für } x \in \left]0, \frac{1}{2^{n+1}}\right] \\ 4^{n+1}\left(\frac{1}{2^n} - x\right) & \text{für } x \in \left]\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right], \\ 0 & \text{für } x \in \left]\frac{1}{2^n}, 1\right], \end{cases}$$

und erhalten, dass

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n+1} = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das Integral der Grenzfunktion $f(x) = 0$ ist hingegen Null, d.h. wir haben zusammengefasst

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

(b) Angenommen es konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig bzgl. $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Funktionenfolge bzgl. der Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$ und wir finden zu jedem gegebenen $\varepsilon > 0$ einen Startindex $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$$||f_n - f||_\infty \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N_\varepsilon$ erfüllt ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f_n(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 (f_n(x) - f(x))\,dx\right| &\leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq 1 \cdot ||f_n - f||_\infty < \varepsilon\end{aligned}$$

für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ und alle $n \geq N_\varepsilon$ und es konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Da $f_n \to f$ und alle f_n stetig sind, folgt auch, dass f stetig und damit regelintegrierbar ist.