Prüfungsklausur — Analysis II (SS 2015)

Termin:	*15.02.2016*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

Aufgabe 1. (5 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer Regelfunktion auf einem Intervall $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ an.

(b) Zeigen Sie: Ist f eine Regelfunktion auf einem Intervall $[a, b]$, so ist f auf $[a, b]$ beschränkt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \cdot ||f||_\infty$$

für alle Regelfunktionen auf einem Intervall $[a, b]$ gilt.
(*Hinweis:* Sie dürfen verwenden, dass diese Ungleichung für alle Treppenfunktionen auf $[a, b]$ erfüllt ist.)

Aufgabe 2. (6 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition der Richtungsableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ in einerm Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ in Richtung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ an.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass in $(0, 0)$ alle Richtungsableitungen von f existieren und berechnen sie diese.
(ii) Ist f in $(0, 0)$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.
(iii) Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{a+x^2}\,dx$$

für alle $a > 0$ konvergiert und berechnen Sie seinen Wert.

(b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx$$

gleichmäßig bzgl. $a > 0$ konvergiert.

(c) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx$$

unter Ausnutzung des Integrals aus Teilaufgabe **(a)**.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2^3 \\ x_2 &= y_1^2 - 2\mathrm{e}^{y_2} \end{aligned}$$

mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ im Punkt $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -2, 0, 0)$ lokal nach $y = (y_1, y_2)$ auflösbar ist und berechnen Sie die Ableitung der auflösenden Funktion in diesem Punkt.

Aufgabe 5. (7 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(b) Begründen Sie, dass der Raum $C([0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R})$ versehen mit der Norm

$$||f||_\infty := \max\{|f(x)| \,:\, x \in [0, \tfrac{1}{2}]\}$$

vollständig ist.

(c) Zeigen Sie durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes in einem geeigneten normierten Raum, dass die Integralgleichung

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

genau eine Lösung $f \in C([0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R})$ besitzt.