Prüfungsklausur — Analysis II (SS 2015)

Termin:	*15.02.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

Aufgabe 1. (5 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer Regelfunktion auf einem Intervall $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ an.

(b) Zeigen Sie: Ist f eine Regelfunktion auf einem Intervall $[a, b]$, so ist f auf $[a, b]$ beschränkt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \cdot ||f||_\infty$$

für alle Regelfunktionen auf einem Intervall $[a, b]$ gilt.
(*Hinweis:* Sie dürfen verwenden, dass diese Ungleichung für alle Treppenfunktionen auf $[a, b]$ erfüllt ist.)

Lösung 1.

(a) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine *Regelfunktion*, wenn es eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $t_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, welche gleichmäßig gegen f konvergiert.

(b) Wir geben hier den Beweis aus der Vorlesung wieder:
Da f ein gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen ist, finden wir eine Treppenfunktion t_n, für die

$$|f(x) - t_n(x)| < 1$$

für alle $x \in [a, b]$ ist. Als Treppenfunktion kann t_n jedoch nur endlich viele Werte annehmen, sodass $\max t_n < \infty$ existiert. Damit erhalten wir, dass

$$|f(x)| \leq |f(x) - t_n(x)| + |t_n(x)| < 1 + \max t_n < \infty.$$

(c) Wählen wir für f eine approximierende Folge von Treppenfunktionen $t_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, so konvergiert nach Definition des Regelintegrals

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

sowie wegen

$$0 \leq |\, ||t_n||_\infty - ||f||_\infty| \leq ||t_n - f||_\infty \to 0$$

für $n \to \infty$ auch

$$\lim_{n\to\infty} ||t_n||_\infty = ||f||_\infty.$$

Gleichzeitig dürfen wir Ungleichung (1) für Treppenfunktionen vorausseten, weshalb wir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx \leq \lim_{n\to\infty} (b-a) \cdot ||t_n||_\infty = (b-a) \cdot ||f||_\infty$$

erhalten.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition der Richtungsableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ in einerm Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ in Richtung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ an.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass in $(0,0)$ alle Richtungsableitungen von f existieren und berechnen sie diese.

(ii) Ist f in $(0,0)$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

(iii) Ist f in $(0,0)$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

Lösung 2.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, v \in \mathbb{R}^n$, dann ist f in x_0 in Richtung v genau dann differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$Df(x_0)(v) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x_0 + h \cdot v) - f(x_0))$$

existiert. Im Falle der Existenz ist $Df(x_0)(v)$ die Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v.
Alternativ kann man auch den Ausdruck

$$Df(x_0)(v) = \frac{d}{dt} f(x_0 + t \cdot v)\Big|_{t=0}$$ 1

für die Definition der Richtungsableitung nutzen.

(b) (i) Sei $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$, dann ergibt sich die Richtungsableitung in Richtung von v zu

$$Df(0,0)(v_x,v_y) = \lim_{h\to 0} f(h(v_x,v_y)) - f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{2h^3 v_x v_y}{h^2(v_x^2+v_y^2)} = \frac{2v_x v_y^2}{v_x^2+v_y^2}.$$

(ii) Wir zeigen, dass f in $(0,0)$ stetig ist. Sei $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$, welche gegen $(0,0)$ konvergiert. Dann folgt wegen $y_n^2/(x_n^2+y_n^2) \leq 1$ und $|x_n| \leq ||(x_n,y_n)||$, dass

$$\left|\frac{2x_n y_n^2}{x_n^2+y_n^2}\right| = 2|x_n| \frac{y_n^2}{x_n^2+y_n^2} \leq 2 \cdot |x_n| \leq 2 \cdot ||(x_n,y_n)|| \to 0$$

für $n \to \infty$.

(iii) Die in Teilaufgabe (i) berechnete Richtungsableitung hängen nicht linear von der Richtung ab. Wählen wir z.B. die Richtungen $(1,0)$, $(0,1)$ und $(1,1)$, so erhalten wir, dass

$$Df(0,0)(1,0) = 0, \qquad Df(0,0)(0,1) = 0, \qquad Df(0,0)(1,1) = 1$$

und beobachten, dass

$$0 = Df(0,0)(1,0) + Df(0,0)(0,1) \neq Df(0,0)((1,0)+(0,1)) = Df(0,0)(1,1) = 1.$$

Damit ist f in $(0,0)$ nichteinmal schwach differenzierbar. f kann daher auch nicht differenzierbar sein.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{a+x^2}\,dx$$

für alle $a > 0$ konvergiert und berechnen Sie seinen Wert.

(b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx$$

gleichmäßig bzgl. $a > 0$ konvergiert.

(c) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx$$

unter Ausnutzung des Integrals aus Teilaufgabe **(a)**.

Lösung 3.

(a) Aus der Analysis I ist bekannt, dass

$$(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Hiermit können wir das uneigentliche Integral berechnen, es ist

$$\int_0^\infty \frac{1}{a+x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{1}{a+x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{1}{1+\frac{x^2}{a}}\,\frac{dx}{a}.$$

Nach Substitution $t = x/\sqrt{a}$ mit $dt/\sqrt{a} = dx/a$ erhalten wir weiter, dass

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{1}{1+\frac{x^2}{a}}\,\frac{dx}{a} = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{c/\sqrt{a}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan t\,\Big|_0^{c/\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{c\to\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{a}},$$

da für $c \to \infty$ auch $c/\sqrt{a} \to \infty$ und $\arctan(c/\sqrt{a}) \to \pi/2$ konvergiert. Das uneigentliche Integral konvergiert also gegen den Wert

$$\int_0^\infty \frac{1}{a+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}.$$

(b) Für $R > 0$ haben wir, dass

$$\left|\int_0^\infty \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx - \int_0^R \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx\right| = \left|\int_R^\infty \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx\right| \le \int_R^\infty \frac{1}{x^4}\,dx.$$

Da es sich auf der rechten Seite um den Rest eines konvergenten uneigentlichen Integrals handelt, konvergiert die rechte Seite für $R \to \infty$ gegen Null. D.h. wir finden zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $R_\varepsilon > 0$, sodass

$$\left|\int_0^\infty \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx - \int_0^R \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx\right| < \varepsilon$$

für alle $R > R_\varepsilon$ gilt und das uneigentliche Integral konvergiert gleichmäßig für alle $a > 0$.

(c) Es ist

$$\frac{d}{da}\frac{1}{a+x^2} = -\frac{1}{(a+x^2)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Da nach Teilaufgabe **(a)** das uneigentliche Integral $\int_0^\infty (a+x^2)^{-1}\,dx$ konvergiert und nach Teilaufgabe **(b)** das uneigentliche Integral $\int_0^\infty (a+x^2)^{-2}\,dx$ gleichmäßig für alle $a > 0$ konvergiert folgt daraus, dass

$$-\int_0^\infty \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{d}{da}\frac{1}{a+x^2}\,dx = \frac{d}{da}\int_0^\infty \frac{1}{a+x^2}\,dx = \frac{d}{da}\frac{\pi}{2\sqrt{a}} = -\frac{\pi}{4a^{3/2}}.$$

D.h. es ist

$$\int_0^\infty \frac{1}{(a+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a^{3/2}}.$$

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das System von Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 + y_2^3 \\
x_2 &= y_1^2 - 2\mathrm{e}^{y_2}
\end{aligned}
$$

mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ im Punkt $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -2, 0, 0)$ lokal nach $y = (y_1, y_2)$ auflösbar ist und berechnen Sie die Ableitung der auflösenden Funktion in diesem Punkt.

Lösung 4.
Wir schreiben das Gleichungssystem in der Form $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ mit

$$
F(x_1, x_2, y_1, y_2) := \begin{pmatrix} x_1 - y_1 - y_2^3 \\ x_2 - y_1^2 + 2\mathrm{e}^{y_2} \end{pmatrix}
$$

und prüfen die Voraussetzungen des Satz über implizite Funktionen:

- Es ist

$$
F(0, -2, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 - 0 - 0 \\ -2 - 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

- F ist stetig differenzierbar als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen.
- Die Matrix

$$
\frac{\partial F}{\partial y}(0, -2, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -3y_2^2 \\ -2y_1 & 2\mathrm{e}^{y_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,-2,0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

ist offensichtlich invertierbar.

Damit existiert eine Funktion $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ mit der Eigenschaft, dass

$$
F(x, \varphi(x)) = F(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) = 0
$$

für alle (x_1, x_2) in einer Umgebung des Punktes $(0, -2)$. Die Ableitung von φ ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel zu

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\left(\frac{\partial F}{\partial(y_1, y_2)}(x, \varphi(x)) \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial(x_1, x_2)}(x, \varphi(x)) \right) \\
&= -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5. (7 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(b) Begründen Sie, dass der Raum $C([0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R})$ versehen mit der Norm

$$||f||_\infty := \max\{|f(x)| \,:\, x \in [0, \tfrac{1}{2}]\}$$

vollständig ist.

(c) Zeigen Sie durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes in einem geeigneten normierten Raum, dass die Integralgleichung

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

genau eine Lösung $f \in C([0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R})$ besitzt.

Lösung 5.

(a) Sei $(\mathcal{B}, ||\cdot||)$ ein vollständiger normierter Raum (d.h. Banachraum) und $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ eine kontrahierende Abbildung, d.h. es gibt ein $\gamma \in]0, 1[$, sodass

$$||f(x), f(y)|| \le \gamma \cdot ||x - y||$$

für alle $x, y \in \mathcal{B}$ gilt. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein $x^* \in \mathcal{B}$ für das die Bedingung $f(x^*) = x^*$ erfüllt ist.

(b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C([0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R})$, dann ist

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon \tag{1}$$

für alle $x \in [0, 1/2]$ und $m, n \ge N_\varepsilon$ mit $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$. D.h. $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge reller Zahlen, und es existiert wegen der Vollständigkeit von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ der punktweise Grenzwert

$$f(x) = \lim_{n\to\mathbb{N}} f_n(x).$$

Desweiteren folgt aus (1) für $m \to \infty$, dass

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

für alle $n \ge N_\varepsilon$ unabhängig von $x \in [0, 1/2]$, d.h. $f_n(x) \to f(x)$ gleichmäßig bzgl. $x \in [0, 1/2]$. Als gleichmäßiger Limes einer Folge stetiger Funktionen ist f selbst damit ebenfalls stetig und wir haben gezeigt, dass $f_n \to f$ in $(C([0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}), ||\cdot||)$ konvergiert.

(c) Nach Teilaufgabe **(b)** ist $(C([0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}), ||\cdot||)$ ein Banachraum und wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : C([0, \tfrac{1}{2}] \to \mathbb{R}) \to C([0, \tfrac{1}{2}] \to \mathbb{R}), \qquad \varphi \mapsto \Phi(\varphi)(x) := \int_0^x \varphi(t)\,dt.$$

Nach dem Haupsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Abbildung

$$x \mapsto \int_0^x \varphi(t)\,dt$$

für stetige Integranden $\varphi(t)$ differenzierbar und damit stetig. Φ ist also wohldefiniert. Die Aussage folgt nun aus dem Banachschem Fixpuktsatz, falls Φ eine Kontraktion ist. Dies ist leicht nachzurechnen, man erhält mit Hilfe der Abschätzung aus **Aufgabe 1**, dass

$$\begin{aligned}|\Phi(\varphi)(x) - \Phi(\psi)(x)| &= \left|\int_0^x \varphi(t)\,dt - \int_0^x \psi(t)\,dt\right| \leq \int_0^x |\varphi(t) - \psi(t)|\,dt \\ &\leq ||\varphi - \psi||_\infty \cdot \int_0^x 1\,dt \leq \frac{1}{2}||\varphi - \psi||_\infty\end{aligned}$$

für alle $x \in [0, 1/2]$. Damit ist auch

$$||\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)||_\infty \leq \frac{1}{2}||\varphi - \psi||_\infty$$

und Φ ist eine kontrhierende Abbildung, welche nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt mit

$$\varphi^*(x) = \Phi(\varphi^*)(x) = \int_0^x \varphi^*(t)\,dt$$

besitzt. Dieser löst zugleich die gegebene Integralgleichung.