Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis II (SS 2015) — Scheinklausur 1

Termin:	*06.06.2015*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Bei* ***allen Aufgaben außer Aufgabe 1 und Aufgabe 2*** *sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung pro Aufgabe jeweils ein Extrablatt.* *Bei Aufgabe 1 und Aufgabe 2 wird nur die Abgabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.* *Bei den Aufgabe 2 mit dem Hinweis* **J** *für "ja" und* **N** *für "nein" werden für richtige Antworten Pluspunkte, für falsche Antworten entsprechend viele Minuspunkte und für fehlende Antworten keine Punkte gegeben.* *Aufgabe 7 gibt tatsächlich die angegebene Punktzahl.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*75 min*

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	Σ

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
Kourosh.Sanei-Kashani@mathematik.uni-stuttgart.de

Aufgabe 1 (6 Punkte) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale auf geeigneten Integrationsbereichen.

(a) $\displaystyle\int \cos x \, dx =$ $\boxed{}$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx =$ $\boxed{}$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$ $\boxed{}$

(d) $\displaystyle\int \pi^x \, dx =$ $\boxed{}$

(e) $\displaystyle\int x \cdot \cos x \, dx =$ $\boxed{}$

(f) $\displaystyle\int x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \, dx =$ $\boxed{}$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Geben Sie an, ob folgende uneigentliche Integrale konvergieren
(**J** für “ja”, **N** für “nein”).

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2} \, dx$		$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx$		$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x} \, dx$		$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} \, dx$	
$\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \, dx$		$\displaystyle\int_0^1 x^x \, dx$		$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2(\sin(x)+2)} \, dx$		$\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx$	

Aufgabe 3 (8 Punkte) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale auf geeigneten Integrationsbereichen. Geben Sie dabei den vollständigen Rechenweg an:

(a) $\displaystyle\int (\sin x)^3 \, dx$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot \ln(x) \cdot \ln(\ln(x))} \, dx$

Ist folgendes uneigentliches Integral konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

Aufgabe 4 (2 Punkte) Seien $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Regelfunktion. Zeigen Sie, dass

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq f(b)$$

gilt.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

(a) Sei $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$. Es bezeichnet

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) \,:\, x \in [a,b]\}$$

den *Graphen* von f, dieser ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Länge L dieser Kurve durch

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\,dx$$

gegeben ist.

(b) Berechnen Sie die Länge des Graphen der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{3/2}$.

(c) Berechnen Sie die Länge der Schraubenlinie, welche durch die Parametrisierung

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t^{3/2} \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung wie in der Vorlesung angegeben.

(b) Sei $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetig. Angenommen es gilt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$, so zeigen Sie, dass jede Stammfunktion F von f die Bedingung $F(x) = F(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$ erfüllt.

(c) Sei $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$. Folgt dann, dass jede Stammfunktion F von f die Bedingung $F(x) = -F(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$ erfüllt?

Aufgabe 7 (0 Punkte) Ordnen Sie folgene Zahlen der Größe nach:

$$\pi, \qquad \mathrm{e}, \qquad \mathrm{i}, \qquad \sqrt{2}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$