Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis II (SS 2015) — Scheinklausur 1

Termin:	*06.06.2015*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Bei* ***allen Aufgaben außer Aufgabe 1 und Aufgabe 2*** *sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung pro Aufgabe jeweils ein Extrablatt.* *Bei Aufgabe 1 und Aufgabe 2 wird nur die Abgabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.* *Bei den Aufgabe 2 mit dem Hinweis* **J** *für "ja" und* **N** *für "nein" werden für richtige Antworten Pluspunkte, für falsche Antworten entsprechend viele Minuspunkte und für fehlende Antworten keine Punkte gegeben.* *Aufgabe 7 gibt tatsächlich die angegebene Punktzahl.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*75 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	Σ

Aufgabe 1 (6 Punkte) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale auf geeigneten Integrationsbereichen.

(a)	$\int \cos x \, dx =$	$\sin x + c$
(b)	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx =$	$2\sqrt{x} + c$
(c)	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$	$\arcsin x + c$
(d)	$\int \pi^x \, dx =$	$\frac{\pi^x}{\ln \pi} + c$
(e)	$\int x \cdot \cos x \, dx =$	$x \cdot \sin x + \cos x + c$
(f)	$\int x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \, dx =$	$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + c$

Korrekturanmerkung:

- **Jedes richtige Kästchen ergibt 1 Punkt, jedes falsche Kästchen ergibt 0 Punkte.**
- **Wurde in einem der Kästchen eine Konstante (z.B. “$+c$”) vergessen, so wird am Ende ein Punkt abgezogen.**

Aufgabe 2 (4 Punkte) Geben Sie an, ob folgende uneigentliche Integrale konvergieren (**J** für “ja”, **N** für “nein”).

$\int_0^1 \frac{1}{x^2} \, dx$	**N**	$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx$	**J**	$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x} \, dx$	**N**	$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} \, dx$	**J**
$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \, dx$	**J**	$\int_0^1 x^x \, dx$	**J**	$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(\sin(x)+2)} \, dx$	**J**	$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx$	**N**

Korrekturanmerkung:

- **Jedes richtige Kästchen ergibt $+0,5$ Punkte.**
- **jedes falsche Kästchen ergibt $-0,5$ Punkte.**

Aufgabe 3 (8 Punkte) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale auf geeigneten Integrationsbereichen. Geben Sie dabei den vollständigen Rechenweg an:

$$\textbf{(a)} \quad \int (\sin x)^3 \, dx \qquad\qquad \textbf{(b)} \quad \int \frac{1}{x \cdot \ln(x) \cdot \ln(\ln(x))} \, dx$$

Ist folgendes uneigentliches Integral konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

$$\textbf{(c)} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Lösung 3.

(a) *Alternative 1:*
Für die Berechnung dieses Integrals schreiben wir $(\sin x)^3 = \sin x \cdot (\sin x)^2$ und verwenden partielle Integration. Wir erhalten

$$\int (\sin x)^3 \, dx = \int \sin x \cdot (\sin x)^2 \, dx = -\cos x \cdot (\sin x)^2 + c + 2 \cdot \int (\cos x)^2 \sin x \, dx.$$ 1

Verwenden wir, dass $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ und formen den Ausdruck etwas um, so folgt 1

$$3 \cdot \int (\sin x)^3 \, dx = -\cos x \cdot (\sin x)^2 + c + 2 \cdot \int \sin x \, dx = -\cos x \cdot (\sin x)^2 + c - 2\cos x$$
$$= -\cos x \cdot ((\sin x)^2 + 2) + c$$ 1

Zusammenfassend erhalten wir, dass

$$\int (\sin x)^3 \, dx = -\frac{1}{3} \cos x \cdot ((\sin x)^2 + 2) + c.$$

Alternative 2:
Wir schreiben $(\sin x)^3 = (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x$ und substituieren $x' = \cos x$ mit $dx' = -\sin x dx$. 1
Dies liefert nach Rücksubstitution

$$\int (\sin x)^3 \, dx = \int (1 - \cos^2 x)(\sin x) \, dx = \int (1 - x'^2) \, dx' = -x' + \frac{1}{3}(x')^3 + c$$ 1
$$= -\cos x + \frac{1}{3}(\cos x)^3 + c$$ 1

Man rechnet leicht nach das beide Ergebnisse miteinander übereinstimmen.

(b) Substitution $x' = \ln(x)$ mit $dx' = dx/x$ liefert

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x) \cdot \ln(\ln(x))} \, dx = \int \frac{1}{x' \cdot \ln(x')} \, dx.$$ 1

Nochmalige Substitution $x'' = \ln x'$ mit $dx'' = dx'/x'$ liefert

$$\int \frac{1}{x' \cdot \ln(x')} \, dx = \int \frac{1}{x''} \, dx'' = \ln(|x''|) + c.$$

Nach Rücksubstitution erhalten wir schließlich, dass

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x) \cdot \ln(\ln(x))} \, dx = \ln(|x''|) + c = \ln(|\ln x'|) + c = \ln(\ln(|\ln x|)) + c.$$ 1+1

Natürlich lassen sich die beiden Substitutionen auch zu einer Substitution $x' = \ln(\ln(x))$ zusammenfassen.

(c) *Alternative 1:*
Für alle $x \geq 0$ ist $\sin x \leq x$. Damit erhalten wir, dass 1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx.$$ 1

Das Integral auf der rechten Seite ist aber konvergent, d.h. das gegebene Integral konvergiert nach dem Majorantenkriterium.
Alternative 2:
Wir substituieren $x' = 1/x$ mit $dx' = -1/x^2 \cdot dx$ bzw. $-dx'/x' = dx/x$ und erhalten, dass 1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 \frac{\sin x'}{x'}\, dx'.$$ 1

Da die Funktion $x' \mapsto \sin x'/x'$ stetig in $x' = 0$ fortsetzbar ist, konvergiert das Integral auf der rechten Seite.

Aufgabe 4 (2 Punkte) Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Regelfunktion. Zeigen Sie, dass

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq f(b)$$

gilt.

Lösung 4.
Wegen Monotonie von f gilt für alle $x \in [a, b]$, dass

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$ 1

Damit erhalten wir aufgrund der Monotonie des Integrals, dass

$$(b-a) \cdot f(a) = \int_a^b f(a)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(b)\,dx = (b-a) \cdot f(b).$$ 1

Die Aussage folgt nun durch Division mit $b - a \neq 0$.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

(a) Sei $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$. Es bezeichnet

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) \,:\, x \in [a,b]\}$$

den *Graphen* von f, dieser ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Länge L dieser Kurve durch

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx$$

gegeben ist.

(b) Berechnen Sie die Länge des Graphen der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{3/2}$.

(c) Berechnen Sie die Länge der Schraubenlinie, welche durch die Parametrisierung

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t^{3/2} \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Lösung 5.

(a) Eine Parametrisierung des Graphen ist durch die Abbildung

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$ 1

mit $\gamma'(x) = (1, f'(x))^T$ gegeben. Mit der aus der Vorlesung bekannten Formel für die Bogenlänge L des Graphen erhalten wir daraus 1

$$L = \int_a^b ||\gamma'(x)||\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$ 1

(b) Es ist $f'(x) = 3/2 \cdot x^{1/2}$. Dies, eingesetzt in die Formel aus Teilaufgabe **(a)** liefert

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - 1\right).$$ 1+1+0,5

(c) Wir berechnen die Bogenlänge nach der in der Vorlesung gegebenen Formel. Es ist

$$L = \int_0^{2\pi} ||\varphi(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} + \frac{9}{4}t}\, dt$$ 1

$$= \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{8}{27}\left(\left(1 + \frac{9\pi}{2}\right)^{3/2} - 1\right).$$ 0,5

Aufgabe 6 (6 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung wie in der Vorlesung angegeben.

(b) Sei $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ stetig. Angenommen es gilt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-a, a]$, so zeigen Sie, dass jede Stammfunktion F von f die Bedingung $F(x) = F(-x)$ für alle $x \in [-a, a]$ erfüllt.

(c) Sei $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-a, a]$. Folgt dann, dass jede Stammfunktion F von f die Bedingung $F(x) = -F(-x)$ für alle $x \in [-a, a]$ erfüllt?

Lösung 6.

(a) Wir Formulieren den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wie in der Vorlesung angegeben:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und 0,5

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt.$$ 0,5

Dann ist F differenzierbar auf $]a, b[$ und es gilt $F' = f$. 1

(b) Eine mögliche Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$ 1

gegeben. Substituieren wir $\tilde{t} = -t$ mit $d\tilde{t} = -dt$, so erhalten wir, dass

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\, dt = -\int_0^x f(-\tilde{t})\, d\tilde{t} = \int_0^x f(\tilde{t})\, d\tilde{t} = F(x).$$ 1

Im vorletzten Schritt haben wir dabei die Eigenschaft $f(\tilde{t}) = -f(-\tilde{t})$ für alle $\tilde{t} \in [-a, a]$ verwendet.
Sei G nun eine beliebige Stammfunktion von f, dann unterscheidet sich diese von F nur um einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$G(x) = F(x) + c$$

für alle $x \in [-a, a]$ gilt. Mit dem eben gezeigten folgt daraus aber, dass

$$G(-x) = F(-x) + c = F(x) + c = G(x).$$ 1

(c) *Alternative 1:*
Aus der Bedingung $F(x) = -F(-x)$ erhalten wir für $x = 0$, dass $F(0) = -F(0)$, d.h. $F(0) = 0$ gilt. Damit verläuft der Graph einer Stammfunktion, welche die Bedingung $F(x) = -F(-x)$ 1 erfüllt stets durch den Ursprung des Korrdinatensystems. Nun lassen sich Stammfunktionen jedoch um Konstanten verschieben, sodass deren Funktionsgraphen nicht mehr durch den Ursprung verlaufen. Für solche Stammfunktionen kann die Bedingung $F(x) = -F(-x)$ nicht gelten.
Alternative 2:
Wir geben ein möglichst einfaches Beispiel an: Es sei $f(x) = 1$ auf $[-a, a]$. Dann ist eine mögli- 1 che Stammfunktion von f durch $F(x) = x+1$ gegeben. Wir berechnen $F(1) = 2$ und $F(-1) = 0$ und erhalten, dass die Bedingung $F(x) = -F(-x)$ für $x = 1$ bereits verletzt ist.

Aufgabe 7 (0 Punkte) Ordnen Sie folgene Zahlen der Größe nach:

$$\pi, \qquad \mathrm{e}, \qquad \mathrm{i}, \qquad \sqrt{2}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Lösung 7.
Es ist

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

bzw.

$$\sqrt{2} < \mathrm{e} < \pi.$$

Der Vektor $(1, 2, 3)^T$ (keine Zahl!) und die komplexe Zahl i sind mit den übrigen Zahlen und unterienander kanonisch nicht vergleichbar.
Alternativ kann die gegebene Menge von Objekten nach dem Wohlordnungssatz geordnet werden.