Analysis II (SS 2015) — Scheinklausur 2

Termin:	*25.07.2015*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Bei den* **Aufgaben 5,6 und 8** *sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung pro Aufgabe jeweils ein Extrablatt.* *Bei den übrigen Aufgaben wird nur die Abgabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.* *Bei Aufgabe 1 mit dem Hinweis* **J** *für "ja" und* **N** *für "nein" werden für richtige Antworten Pluspunkte, für falsche Antworten entsprechend viele Minuspunkte und für fehlende Antworten keine Punkte gegeben.* *Bei Aufgabe 7 sind die Punkte direkt in der gegebenen Karte zu markieren und zu beschriften.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*100 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	Σ

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de

Aufgabe 1 (3 Punkte) Sind folgende Aussagen wahr? (**J** für “ja”, **N** für “nein”).

Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ zwischen zwei linearen Räumen V und W ist genau dann stetig auf V, wenn sie in einem einzigen Punkt $x_0 \in V$ stetig ist.	
Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ schwach differenzierbar, so ist f auch fréchetdifferenzierbar.	
Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fréchetdifferenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen.	
Existieren für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen in einer Umgebung eines Punktes und sind in diesem Punkt stetig, dann ist f in diesem Punkt auch fréchetdifferenzierbar.	
Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\nabla f(x_0) = 0$, so liegt in x_0 unbedingt ein Extremum vor.	
Die Gleichung $x^2 + y^2 = 2$ ist in allen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lokal nach x auflösbar.	

Aufgabe 2 (6 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := \sin(2x + y) + \cos(z).$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

$\nabla f(x, y, z) =$

$H_f =$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von f im Punkt $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ an.

$T_2(f; (x, y, z), (0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) =$

Aufgabe 3 (6 Punkte) Es sollen die Art und Lage aller Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto (3 - x^2 - y^2) \cdot \mathrm{e}^{-y}$$

bestimmt werden. Tragen Sie ihre (Zwischen-) Ergebnisse in folgende Kästchen ein.
(*Hinweis: Die Funktion besitzt genau zwei kritische Punkte.*)

1. kritischer Punkt: $(x, y) =$ $\boxed{}$ und Funktionswert $f(x, y) =$ $\boxed{}$

Hessematrix in diesem Punkt $H_f(x, y) =$ $\boxed{}$

Definitheit der Hessematrix:
(positiv/negativ definit oder indefinit) $\boxed{}$

Art des Extremums oder Sattelpunkt: $\boxed{}$

---

2. kritischer Punkt: $(x, y) =$ $\boxed{}$ und Funktionswert $f(x, y) =$ $\boxed{}$

Hessematrix in diesem Punkt $H_f(x, y) =$ $\boxed{}$

Definitheit der Hessematrix:
(positiv/negativ definit oder indefinit) $\boxed{}$

Art des Extremums oder Sattelpunkt: $\boxed{}$

Aufgabe 4 (2 Punkte) Gegeben sind $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}),\ g \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)$.

(a) Geben Sie die Definition des Raumes $C^1(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$ an:

$C^1(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}) = \boxed{}$

(b) Geben Sie die Ableitung von $f \circ g$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von f und g an:

$(f \circ g)'(x) = \boxed{}$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

(a) Seien E, F zwei normierte Räume und $f : E \to F$ eine Funktion. Geben Sie die Definition der Fréchetableitung von f in einem Punkt $x_0 \in E$ an.

(b) Berechnen Sie die Fréchetableitung der folgenden Funktionen in allen Punkten ihres Definitionsbereichs:

(i) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

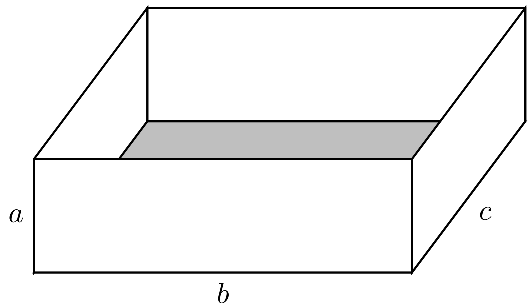
$$x \mapsto A(x+b)$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

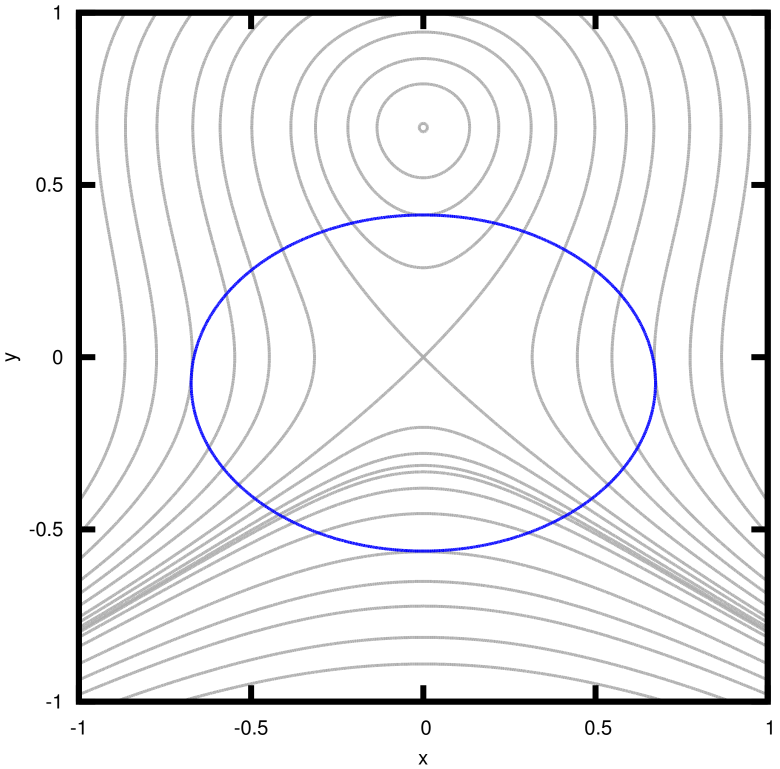
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Wir betrachten eine offene Schachtel (ohne Deckel) mit den Kantenlängen $a, b, c > 0$. Die Gesamtoberfläche dieser Schachtel (ohne Deckel) soll gerade eine Flächeneinheit betragen. Wie müssen a, b, c gewählt werden, damit das Volumen der Schachtel maximal wird (die Existenz der Lösung soll dabei stillschweigend vorausgesetzt werden).



Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Aufgabe 7 (3 Punkte) Folgende Graphik zeigt das Höhenprofil (grau) einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



(a) Die Funktion besitzt im gezeichneten Gebiet $[-1, 1] \times [-1, 1]$ einen Extrem- und einen Sattelpunkt. Markieren Sie diese in der Graphik und beschriften Sie das Extremum mit **E** und den Sattelpunkt mit **S**.

(b) In der Graphik ist zusätzlich ein Weg (blau) eingezeichnet. Markieren Sie die Extrema entlang dieses Weges und beschriften Sie diese mit **W**.

Aufgabe 8 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass das System von Gleichungen

$$x_1^2 = y_1$$
$$x_2 = y_2^3 - y_2$$

mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ in $(0, 0, 0, 0)$ lokal nach $y = (y_1, y_2)$ auflösbar ist und berechnen Sie die Ableitung der auflösenden Funktion in diesem Punkt.
(*Hinweis:* Bringen Sie das Gleichungssystem in die Form $F(x, y) = 0$ mit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.)